

CONTROVERSIAS EN GEOMETRÍA. LOS INDIVISIBLES DE BONAVENTURA CAVALIERI

CONTROVERSIES IN GEOMETRY. THE INDIVISIBLES OF BONAVENTURA CAVALIERI

PIEDAD YUSTE LECIÑENA

UNED

pyuste@fsof.uned.es

Resumen: Una de las polémicas más interesantes surgidas en el campo de las matemáticas la protagonizó Bonaventura Cavalieri quien, inspirado posiblemente en los desarrollos mecánicos de su maestro Galileo, trató de calcular las superficies y volúmenes de objetos limitados por curvas utilizando, respectivamente, colecciones de líneas y planos a los que llamó indivisibles. La indefinición de estos elementos y su conflicto con los postulados euclidianos suscitó un fructífero debate entre los geómetras del siglo XVII que finalizó con la creación del cálculo integral a manos de Leibniz y Newton.

Palabras clave: Indivisibles, Cavalieri, controversias, geometría, cálculo.

Abstract: One of the most interesting polemics in the field of mathematics was started by Bonaventura Cavalieri, who, inspired by the mechanical developments of his teacher Galileo, tried to calculate the surfaces and volumes of objects bounded by curves using respectively collections of lines and planes that he called indivisibles. The undefinition of these elements and their conflict with the Euclidean postulates led to a fruitful debate among the seventeenth-century geometers that it ended with the creation of integral calculus in the hands of Leibniz and Newton.

Keywords: Indivisibles, Cavalieri, controversies, geometry, calculus.

Copyright © 2018 PIEDAD YUSTE LECIÑENA

Ápeiron. Estudios de filosofía, monográfico «Artes de la controversia. Homenaje a Quintín Racionero», n.º 8, 2018, pp. 223–247,
Madrid-España (ISSN 2386 – 5326)
<http://www.apeironestudiosdefilosofia.com/>

Recibido: 10/1/2017 **Aceptado:** 31/5/2017

Introducción

Cuenta Proclo que la geometría fue descubierta primeramente por los egipcios y que debió su origen a la medición de las tierras, cuyos límites se borraban periódicamente a causa de las crecidas del Nilo.¹ Asimismo, en las civilizaciones asentadas en el Creciente Fértil la geometría surgió en la Edad del Bronce para dar solución a cuestiones prácticas relacionadas con la división y el reparto de tierras, asignación de impuestos en función del tamaño y la producción agrícola de un terreno, adjudicación de propiedades por servicios prestados, etcétera. Los razonamientos de estos primeros geómetras no se apoyaban en demostraciones ni en deducciones sino en la efectividad de los resultados. Así, fueron capaces de calcular las áreas de superficies rectilíneas (como trapecios, cuadrados, rectángulos y triángulos) y algunos volúmenes.

Los matemáticos babilonios computaron la medida del círculo haciendo la longitud de la circunferencia equivalente a tres diámetros o, lo que es lo mismo, aproximando a 3 el valor de π . El área del círculo era para ellos la doceava parte del cuadrado de la circunferencia.² No sabemos cómo lograron formalizar este algoritmo (seguramente de manera práctica), pero a partir de él descubrieron además las superficies de las regiones curvas inscritas en el interior de estas figuras, como semicírculos, lúnulas y cuadrados y triángulos cóncavos. Para los egipcios (*Papiro Rhind* 16.48) la medida del círculo era como el cuadrado de las ocho novenas partes del diámetro. Los escribas y eruditos de estas culturas solían registrar en papiros o tablillas de arcilla colecciones de problemas geométricos y ejercicios de cálculo, sin incluir en ellos ninguna referencia teórica que no fuera la mera aplicación de fórmulas y el uso de procedimientos estandarizados.

Probablemente, los griegos recibieron esta herencia y se preguntaron por el origen y justificación de tan variados algoritmos y metodología, intentando detectar en ellos posibles enunciados generales, pruebas y demostraciones. La geometría helena estaba embebida de filosofía y se articulaba según los preceptos del pensamiento de Platón y Aristóteles, pues la geometría, como la filosofía³, aspiraba alcanzar un conocimiento universal o *episteme* frente al saber particular obtenido por la experiencia. Las matemáticas elaboradas por egipcios y babilonios no excedían ese nivel de particularidad aludido; por tanto, los geómetras griegos se enfrentaban, por un lado, al problema de establecer una ciencia de objetos eternos e inmutables⁴ y por otro, a la manera de conseguir ese conocimiento. Necesitaron, en consecuencia, formular proposiciones indemostrables a las que sucedieran otras necesariamente.⁵ Es decir, la geometría, como cualquier ciencia apodíctica, debía comenzar fijando principios necesarios cuya existencia y significado no ofreciera dudas y, a partir de éstos, proponer enunciados de significado conocido pero de existencia aún por determinar.⁶ Esos principios necesarios e indemostrables son los llamados por Aristóteles *axiomas* que, a su vez, pueden ser *koiná* (comunes a todas las ciencias cuantitativas) o *idia* (propios de una determinada ciencia). Existen, además, otros principios indemostrables, pero no necesarios, denominados *tesis*, y éstos se subdividen a su vez en *hipótesis* (dicen que algo es) y *definiciones* (afirman lo que algo es).⁷ Según Platón, los matemáticos griegos más antiguos utilizaban el término *hipótesis* en el sentido de “condición preliminar de la verdad de lo que se busca”⁸; mientras Aristóteles afirmaba que las hipótesis se introducen para garantizar la existencia de objetos matemáticos

¹ Proclo (1970), *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, Prologus II*, 65.7. G. Friedlin (ed.), Leipzig, 1883, reimp. 1967. Normalmente, se atribuyen estos datos a la *Historia de la Geometría* de Eudemo, quien fue a su vez discípulo de Aristóteles; sin embargo, la fuente probable de este fragmento concreto parece ser Herodoto, *Historia* II, 109, quien hizo hincapié en que fue la necesidad la causa desencadenante del estudio de las matemáticas. Aristóteles, por el contrario, escribió en la *Metafísica* I 1, 981 b: “Así ocurrió con las matemáticas nacidas cerca de Egipto, porque en aquel país las castas sacerdotales estaban libres de todo trabajo.” Cf. Conrado Eggers, *El nacimiento de la matemática en Grecia*, Eudeba, Buenos Aires, 1995, p. 55.

² Piedad Yuste, *Matemáticas en Mesopotamia. Álgebra, geometría y cálculo*, Dykinson 2013, p. 75.

³ Platón habla de “la geometría o de cualquier otro tipo de filosofía” en *Teeteto* 143 d.

⁴ “Además de las cosas sensibles y de las Formas, dice [Platón] que hay los objetos de las matemáticas, los cuales ocupan una posición intermedia, diferenciándose de las cosas sensibles por cuanto son eternos e inmutables, y de las Formas por cuanto hay muchos que son semejantes, mientras que la Forma misma es única en cada caso.” Aristóteles, *Metafísica* 987 b.

⁵ Aristóteles, *Analíticos Post.* I 2, 72 a.

⁶ *Ibid.*, I 10.

⁷ *Ibid.*, I 2.

⁸ *Menón* 86 e.

simples⁹. Respecto a los *postulados*, el Estagirita los opone a las hipótesis; la diferencia entre ambos reside en la duda acerca de la verdad de los primeros¹⁰. El conjunto de estos principios, axiomas y enunciados constituye lo que en la Antigüedad entendían como *elementos*¹¹ y así lo declara Proclo¹² cuando informa que antes de Euclides de Alejandría, Hipócrates de Quíos, Leodamas de Tasio, Arquitas de Tarento, Teeteto de Atenas, Eudoxo de Cnido y León elaboraron esta clase de libros.¹³ Pero solamente conservamos los *Elementos de Geometría* compilados por Euclides, formalmente estructurados y axiomatizados, en los cuales las *Nociones Comunes* cumplen las condiciones de los *koiná* aristotélicos mientras los *Postulados* parecen corresponder a los *idia*. Como vemos, hubo “una transferencia parcial de reglas y principios de la Dialéctica platónica y de la Lógica aristotélica a la Matemática”.¹⁴

La medida del círculo (y cualquier otra figura limitada por líneas curvas) era difícil de calcular debido a la inconmensurabilidad entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Parece que Antifón de Atenas (ca. 470-411 a.C.) concibió una manera de hacerlo inscribiendo sucesivos polígonos regulares en el interior del círculo hasta intentar agotarlo, inaugurando así el llamado método de *exhaución*¹⁵, también utilizado en el cálculo de cubaturas y que Euclides (ca. 325-265 a.C.) legitimó en la proposición I del Libro X de los *Elementos*:

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una [magnitud] mayor que su mitad, y de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.



Figura 1

Pero esta magnitud residual no nos lleva a conocer la medida del círculo; solo nos indica que el polígono inscrito de un número indeterminado de lados casi coincide con él, ya que las líneas curva y poligonal nunca pueden identificarse una con la otra porque no son homogéneas y contravienen el *axioma de congruencia* en *Elementos I, Noción común 7*: “Las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí”, haciendo alusión a la práctica de algunos geómetras antiguos de comprobar si dos figuras son iguales superponiéndolas (*epharmózein*).¹⁶ Euclides, retomando las tesis de Eudoxo de Cnido (ca. 390-337 a. C.), se aseguró de no trascender el ámbito de la homogeneidad al incluir en el Libro V de los *Elementos* las definiciones 3 y 4:

- Razón es una relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
- Guardan razón entre sí las magnitudes que al multiplicarse se exceden una a la otra.

⁹ Aristóteles, *Anal. Post.* I 2 y en I 10, 76 b: “Lo que es capaz de ser demostrado, pero el maestro lo presupone sin prueba alguna es una hipótesis.”

¹⁰ Aristóteles, *ibid.*, I 10, 76 b: “el *postulado ilegítimo* es contrario a la opinión del discípulo”, aunque, como la hipótesis, es “una proposición demostrable [que] se supone y se utiliza sin demostración.”

¹¹ Para Aristóteles, en cambio, los elementos de geometría son “aquellas proposiciones cuyas demostraciones se hallan en el fondo de las demostraciones de las demás, ya sea en todas, ya sea en parte” (*Metafísica* III 3, 998 a).

¹² Proclo, *op. cit.* 72, 5-7.

¹³ *Ibid.*, 66.4- 67.

¹⁴ Eggers, *op.cit.*, p. 98.

¹⁵ El término *exhaución* lo sugirió Gregorio de San Vicente, en *Theoremata Mathematica* (1624), para calificar el método desarrollado por Euclides en el libro XII.

¹⁶ Con la técnica de *encajar* figuras, Tales demostrará I.5 y I.26, según comenta Proclo (*Ibid.*, 250.19 y 352.12), mientras Euclides hace lo mismo en I.4, I.8 y III.24; pero, superando en esta ocasión a Tales, Euclides deducirá I.26 por reducción al absurdo.

Tampoco podía admitir la existencia de un polígono cuyo número de lados fuera infinito (quizá Antifón lo hiciera) pues, al igual que Aristóteles, negaba el infinito actualizado: “lo continuo se divide al infinito, pero hacia lo mayor no hay infinito.”¹⁷ En consecuencia, si no se podía hallar el área del círculo, al menos era posible establecer una relación de proporcionalidad entre la superficie curva y la rectilínea; es decir, entre el círculo y el cuadrado de su diámetro, como enunció Hipócrates.¹⁸ De esta manera, Euclides intentaba proporcionar una base teórica a los descubrimientos de Hipócrates y Demócrito relativos a la proporción existente entre el cilindro y el cono o entre el prisma y la pirámide. Pero no sabemos si estos matemáticos acabaron su razonamiento mediante un salto inductivo al infinito, identificando curva y recta en el límite de la sucesión: si somos indivisibilistas, pitagóricos o atomistas, pensaremos que la línea poligonal de infinitos lados acaba resolviéndose en puntos que se superponen a la curva¹⁹; por el contrario, si defendemos la tesis continuista aristotélica, crearemos que jamás un polígono se identifica con su círculo circunscrito.

Para establecer una relación de proporcionalidad o equivalencia de razones entre dos superficies, una de contorno curvo y la otra de borde rectilíneo, Euclides se apoyó en el *Teorema V.12*:

Si de cualquier número de magnitudes, cada una de las antecedentes tiene la misma razón con cada una de las consecuentes, en la misma razón estarán todos los antecedentes y todos los consecuentes.²⁰

Esta proposición siempre se ha interpretado en términos de sumas, aunque sin decirlo de modo expreso:

$$a : b :: c : d :: e : f :: \dots :: m : n :: (a + c + e \dots + m) : (b + d + f + \dots + n)$$

Pero, desde luego, en ningún momento se infiere que el número de elementos de la misma sea infinito. Así, aplicando ambos *Teoremas* (X.1 y V.12), Euclides consigue demostrar en el Libro XII, entre otras, las siguientes proposiciones:

- XII.2: Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.
- XII.10: Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base e igual altura.
- XII.18: Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros.

Esgrimiendo un doble razonamiento apagógico o de reducción al absurdo.

Arquímedes afinó aún más el enunciado X.1 formulado por Euclides. Aseguraba así que los residuos descubiertos en el proceso de aproximación a la curva fueran homogéneos e impedía que, en el límite, los bordes de ambas figuras pudieran coincidir; de hecho, podemos obviar dichos bordes²¹:

De desiguales líneas, desiguales superficies y desiguales sólidos, el mayor excede al menor por una cantidad tal que, cuando se añade a sí misma, puede exceder cualquier magnitud asignada del tipo de las magnitudes comparadas una con otra.²²

Este es el denominado *Lema de Arquímedes* o *Axioma de continuidad* que el sabio de Siracusa aplicó en el cálculo de cuadraturas y cubaturas. Fueron varios los métodos de exhaustión inventados por él:

- Compresión por diferencias y compresión por razones.

¹⁷ Física IV, 6, 207 b.

¹⁸ Eudemo, al comentar que Hipócrates fue el primero en describir la cuadratura de las lúnulas, afirmó que “lo demostró apoyándose en lo que ya había demostrado: que los círculos son entre sí como sus diámetros en potencia.”, según refiere F.Vera en su edición de los *Elementos*, Aguilar, Madrid, 1970. Esta proporción figura en *Elementos* XII, 2.

¹⁹ “Quienes renunciaron a la división hasta lo infinito por la imposibilidad de dividir las cosas indefinidamente y demostrar que tal división no tiene límite, decían que los cuerpos están formados por partículas indivisibles y se descomponen en éstas”, aludiendo a Demócrito y Leucipo. Cf. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 1903; Simplicio (54-A-13).

²⁰ Aristóteles la menciona en *Ética a Nicómaco* V 7.

²¹ Piedad Yuste, “Reflexiones sobre la Geometría griega”, *Éndoxa* 23 (2009), pp. 57-81.

²² *Sobre la esfera y el cilindro* I, asunción 5. Cf. Dijksterhuis: *Archimedes*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1987, pp. 146 y ss.

- Mecánico: con magnitudes convencionales y con indivisibles.
- Aproximación.

Y los resultados, excepcionales; tanto es así que los matemáticos posteriores creyeron que Arquímedes escondía un secreto procedimiento para conseguir tan asombrosas conclusiones. Su modelo geométrico consistía, por lo general, en inscribir y circunscribir polígonos cada vez más próximos al perímetro de la curva. Uno de estos procedimientos, el de compresión por diferencias, lo empleó en *La medida del círculo*²³:

El área de un círculo es igual a un triángulo rectángulo en el cual, uno de los lados del ángulo recto es igual al radio, y el otro lado del ángulo recto es como la longitud de la circunferencia.

Ya no se trata de encontrar una relación de proporcionalidad entre ambas figuras, sino de hacerlas equivalentes:

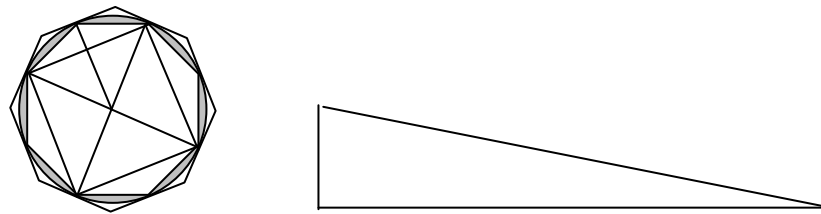


Figura 2

1. Sea K el área del círculo y Δ la superficie del triángulo
2. Nos proponemos demostrar que $K = \Delta$
3. Negamos esa proposición: $\neg (K = \Delta)$
4. Suponemos una superficie $K > \Delta$
5. Aplicamos X.I:
 - 5.1. La superficie asignada será $(K - \Delta)$
 - 5.2. Inscribimos en K polígonos, tales que $(K - I_n) < (K - \Delta)$
 - 5.3. Obtenemos $I_n > \Delta$
6. Comparamos el área del polígono, I_n ($1/2$ del perímetro por la apotema) con la superficie de Δ ($1/2$ de la longitud de la circunferencia por el radio): ambos, perímetro y apotema, son menores que la longitud y el radio de la circunferencia; luego $I_n < \Delta$.
7. Tenemos algo imposible: $(I_n > \Delta)$ y $(\Delta > I_n)$
8. Negamos la hipótesis c): $\neg (K > \Delta)$
9. Proponemos entonces que $K < \Delta$
10. Aplicamos de nuevo X.I:
 - 10.1. La superficie asignada será $(\Delta - K)$
 - 10.2. Circunscribimos en K polígonos, tales que $(C_n - K) < (\Delta - K)$
 - 10.3. Obtenemos $\Delta > C_n$
11. Comparamos el área del polígono C_n ($1/2$ perímetro por el radio) con la superficie de Δ ($1/2$ de la longitud de la circunferencia por el radio): el perímetro del polígono es mayor que la longitud de la circunferencia; luego $C_n > \Delta$
12. Tenemos de nuevo un absurdo: $(C_n < \Delta)$ y $(C_n > \Delta)$
13. Negamos la segunda hipótesis: $\neg (K < \Delta)$
14. Concluimos que $K = \Delta$, c.q.d.

²³ *Ibid.*, p. 222. Según Knorr ("Archimedes and the Elements: Proposal for a revised Chronological ordering of Archimedean Corpus", *Archive for the History of Exact Sciences*, 19 (1978), pp. 211-290). La solución hallada por Arquímedes es la que habitualmente usamos para calcular el área de un círculo: $S = \pi r^2$.

La incorporación de polígonos circunscritos, logra un equilibrio perfecto entre las dos ramas del argumento apagógico; asimismo, no necesita recurrir a una cuarta proporcional ni a otras magnitudes, como había hecho Euclides, consiguiendo simplificar el razonamiento. La demostración elaborada por Arquímedes es aún más bella que la de su predecesor, debido a su elegancia y simetría.

En *La cuadratura de la parábola*, Arquímedes determina la superficie de un segmento parabólico, BPT , con un nuevo método basado en el equilibrio hallado entre magnitudes convencionales²⁴: las líneas y figuras geométricas corresponden a pesos insertos en un sistema mecánico, la balanza AT , cuyo fulcro situamos en el vértice de la curva, B .

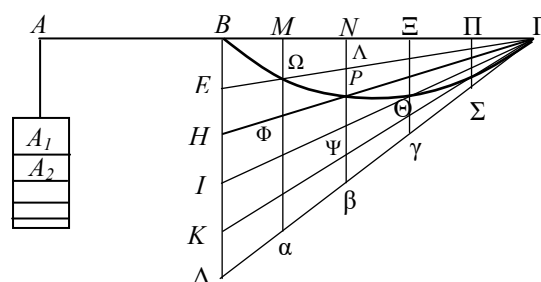


Figura 3

La deducción es larga y compleja: primero determina las razones y proporciones existentes entre los diversos segmentos y figuras semejantes; después, transforma estas proporciones en relaciones de equilibrio; por último, aplica el método de compresión por diferencias, comprobando que la superficie del segmento parabólico equivale a un tercio del área del triángulo circunscrito. Las magnitudes que intervienen en este proceso son las que obedecen los axiomas y definiciones recogidos en los *Elementos*. Únicamente, las ha trasladado, sin desnaturalizarlas, a un sistema mecánico.

Pero Arquímedes avanza todavía más cuando incluye en su programa geométrico otro tipo de magnitudes: los indivisibles; objetos incómodos de explicar e incluso de naturaleza contradictoria e imposible; pues tomados uno a uno podrían ser las líneas y las superficies tal como los define Euclides en los *Elementos* I:

- Definición 2: línea es la longitud sin anchura.
- Definición 5: superficie es lo que solo tiene largo y ancho.

Pero sus agregados ¿qué dimensión tienen? Para determinar el área de un segmento parabólico, el volumen y el centro de gravedad de un segmento de paraboloide o el volumen de un segmento de cilindro, Arquímedes incorpora colecciones de estos elementos, considerando que *todas las líneas* de una determinada figura plana constituyen esa figura y que *todos los planos* de un sólido componen ese sólido, y explica a su amigo Eratóstenes en un breve tratado, *El Método*, en qué consiste este procedimiento:

Pues algunos de los [teoremas] que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto [...]²⁵

Los denominados indivisibles, que en un sistema mecánico como la balanza constituyen unidades de peso, se transfieren a la geometría perdiendo su magnitud. Las relaciones entre los objetos descubiertas en

²⁴ *La cuadratura de la parábola*, proposiciones 14 a 16.

²⁵ "Carta a Eratóstenes", en *El Método*. Edición a cargo de Luis Vega, Alianza (1986). El texto fue encontrado por Johan Ludvig Heiberg en 1906. Aquí observamos claramente la distinción entre *universo de la justificación* y *universo del descubrimiento*.

una máquina simple son trasladadas al espacio euclidiano. Esta metodología debió parecer poco ortodoxa a los sabios de la época, si es que llegaron a conocerla, de la misma manera que siglos después muchos matemáticos se escandalizaron cuando Cavalieri incorporó indivisibles en sus desarrollos de cuadraturas y cubaturas.

En *La cuadratura de la parábola*, Arquímedes ya anunciaba, sin llegar a desvelarlo, que había descubierto un nuevo método para hallar superficies y volúmenes y, desde entonces, un aura de misterio y expectación envolvió por completo sus trabajos.²⁶ El desconocimiento de esta técnica provocó que muchos geómetras esperaran más de lo previsto; entre ellos, los matemáticos del siglo XVII, quienes creyeron siempre que el método de Arquímedes, como el suyo propio, dependía directamente del uso de elementos indivisibles. Sin embargo, la importancia que el sabio de Siracusa concedió a esos objetos fue sólo secundaria. Lo que realmente le preocupaba era crear demostraciones geométricas rigurosas en consonancia al formalismo euclídeo.

Las magnitudes omnes

Como hemos visto, las técnicas de exhaución empleadas por Arquímedes se apoyaban en un cálculo complejo, largo y difícil. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) ideó un método más sencillo e intuitivo de resolver cuadraturas y cubaturas, innovador respecto al anterior, aunque frágil en sus fundamentos. Pensó que en cualquier figura plana o sólida se podían trazar, respectivamente, líneas y planos contiguos y paralelos entre sí; lo comprenderemos mejor si imaginamos una superficie completamente rayada o un cuerpo seccionado en láminas: todas las rayas o todas las láminas serán, respectivamente, sendas colecciones de líneas y de planos, no importa en qué cantidad, pues lo que únicamente nos interesa es su agregado o conjunto.

Cavalieri tuvo que precisar esos nuevos conceptos con los que después establecería razones y proporciones para realizar cuadraturas y cubaturas. En primer lugar, necesitaba encontrar un respaldo epistemológico para ellos y, a la hora de redactar su *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, tomó como modelo los *Elementos* de Euclides; definió los objetos que iba a utilizar y enunció un *Postulado de igualdad* antes de demostrar los teoremas. Casi todo el Libro II está dedicado a fundamentar su nuevo método; en la *Definición primera*, alude al modo de conseguir ese agregado de líneas u *omnes lineæ*:

Si por tangentes opuestas de una figura plana cualquiera llevamos dos planos paralelos, perpendiculares o inclinados respecto al plano de la figura dada, indefinidamente desde una a la otra parte, hasta superponerse, las líneas rectas que durante todo el movimiento surgen de la intersección del plano y la superficie de la figura, tomadas juntas, las llamamos todas las líneas (*omnes lineæ*) de esa figura, designando como referencia a una de ellas; así, cuando los planos sean perpendiculares a la figura dada tendremos todas las líneas de tránsito recto. Pero cuando los planos están inclinados respecto a ella, las llamamos todas las líneas del mismo tránsito oblicuo de la figura dada, tomada una de ellas como referencia; es decir, dependiendo ese tránsito de la inclinación del plano a la superficie de la figura dada.²⁷

Cavalieri, inspirado seguramente en su maestro Galileo, introdujo el *movimiento* en su definición con el propósito de eludir el delicado asunto acerca de la composición del continuo; no afirmaba que éste estuviera constituido de elementos indivisibles de dimensión inferior, como son las líneas respecto de las superficies y éstas en relación a los sólidos, sino que un plano deslizándose ortogonal u oblicuamente a una figura dada describía en ella una cantidad indeterminada de líneas. Así, el *dictum de divisibilidad infinita*²⁸ quedaba, en su opinión, salvaguardado. La *regula* es esa línea o superficie tomada como referencia.

Otros conceptos *omnes* se refieren a *puntos* y se encuentran comentados en la *Definición III* de este mismo Libro II. Resultan del movimiento continuo de un plano respecto de una línea, o de los lugares descritos cuando un plano discurre a lo largo de un segmento. El tránsito es también recto o inclinado, según sea el ángulo de incidencia.

²⁶ Cf. Vega (1986), pp. 35-36

²⁷ *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Clemente Ferroni (ed.), Bologna, 1635, pp. 191-192. También: *Geometria degli indivisibili*, Lombardo-Radice (ed.), Utet, 1966.

²⁸ Enunciado por Aristóteles en *Física* III, 6, 206: "No existe una magnitud infinita en acto; pero esta magnitud sí podría ser infinita en su divisibilidad".

El término *omnes* designa una colección de magnitudes homogéneas entre sí e indivisibles cuyo cardinal parece ser infinito o indefinido. Cavalieri pretende establecer relaciones de proporcionalidad entre estas líneas y las respectivas superficies para determinar las áreas de las figuras curvas. Sin embargo, las definiciones 3 y 4 del libro V de los *Elementos* no contemplan la posibilidad de establecer razones entre objetos geométricos de distinto orden²⁹; tampoco entre magnitudes finitas e infinitas³⁰. Consciente de estos problemas, Cavalieri intentará demostrar que su noción *omnes* se ajusta a la idea de magnitud expresada por Eudoxo y así lo hizo en los *Teoremas I y III*; primero, alegando que al ser cada una de las líneas (y de los planos) una magnitud finita, el agregado de todas ellas también lo es; segundo, mostrando que esas colecciones admiten ser multiplicadas por una cantidad entera, cumpliendo así la condición 5 del Libro V de Euclides³¹. Pero antes necesitaba introducir un *Primer Postulado* para asegurar la legitimidad de su razonamiento:

Todas las líneas de figuras planas congruentes, tomada una de ellas como referencia, son congruentes; y todos los planos de los sólidos congruentes, escogiendo como referencia a uno cualquiera ellos, son también congruentes.

Se trata de la vieja práctica de superponer figuras³² para constatar su posible igualdad, descartada en los *Elementos* a partir del Libro V y que Cavalieri la hace surgir ahora como fundamento último de su teoría. Esta misma técnica conlleva a la vez una trampa: ¿cómo comparar cantidades infinitas o hacer que éstas coincidan?

Advertimos las dificultades de carácter epistemológico que Cavalieri debió superar hasta conseguir formular sus teoremas más importantes acerca de cuadraturas y cubaturas. Constantemente aparecían numerosas cuestiones a las que responder y, según relató a Galileo, dudó mucho respecto a la cantidad de líneas y de planos que debía utilizar al componer sus razones:

Me gustaría saber si todas las líneas de un plano mantienen cierta proporción con todas las líneas de otro plano porque, como siempre se pueden trazar más, parece como si todas las líneas de una figura dada sean infinitas y así, excluidas de la definición de magnitudes que tienen razón entre sí.³³

Nos preguntamos entonces:

- Cómo se suceden las líneas (o planos) de una determinada figura. ¿Hay espacios intermedios?
- ¿En qué modo son indivisibles?
- ¿Cuántos son?
- ¿Es el conjunto de todos ellos una magnitud?
- ¿Cómo comparar colecciones?
- ¿Qué relación guardan con las respectivas figuras?
- ¿Existe correspondencia una a una entre las líneas (o los planos) de figuras congruentes?

Las colecciones infinitas, al ser cantidades, escapan al contexto de la geometría e invaden el terreno de la aritmética; aun así, la tradición euclídea consideraba absurdo y faltar de sentido el hecho de comparar o relacionar infinitos, ya fueran números o magnitudes. Pero Cavalieri, a fin de soslayar esas discusiones, insistió en el carácter *geométrico* y *determinado* de la noción *omnes*. Para ello, enunció su *Teorema I*:

²⁹ *Elementos* V, Definición 3: “Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.” Definición 4: “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que al multiplicarse pueden exceder una a la otra”.

³⁰ Aristóteles, *Del Cielo* I, 6, 273b-274a: “No hay razón ni proporción entre lo finito y lo infinito”.

³¹ *Elementos* V, Definición 5: “Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta”.

³² *Elementos* I, Noción Común 7: “Las cosas que coinciden entre sí son iguales”. Este enunciado recibe el nombre de *Principio de congruencia* y se apoya en la antigua práctica de superponer figuras (*ephamózein*) para descubrir su semejanza o equivalencia.

³³ Carta del 15 de diciembre de 1621; E. N., vol. XIII, p. 81. Ver F. De Gandt (1984): “Naissance et métamorphoses d’une théorie mathématique: la géométrie des indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli)”, *Sciences et Techniques en perspective*, Univ. de Nantes, vol. IX, pp. 179–226; aquí, p. 207.

Todas las líneas de tránsito recto de figuras planas cualesquiera, y todos los planos de figuras sólidas cualesquiera, son magnitudes que tienen razón entre sí.

En este teorema, Cavalieri pretende probar que los conjuntos de todas las líneas y de todos los planos son magnitudes y, por tanto, comparables al estilo de las definiciones 3 y 4 del Libro V de los *Elementos*. Sin embargo, su razonamiento procede tomando uno a uno esos objetos para, *después de un paso inductivo*, inferir a toda la colección lo afirmado de sus elementos individualmente. Veamos cómo:

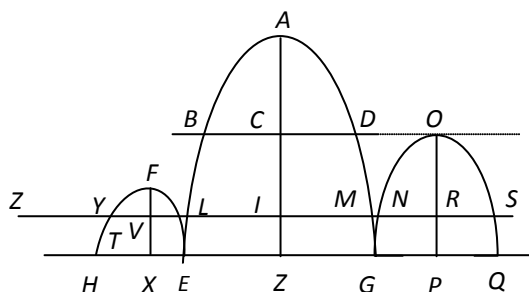


Figura 4, *Geometria*, p. 202

Cada una de las líneas *NS* de la figura *GOQ* puede aumentar indefinidamente y superar a *LM* de la otra figura, *EAG*. Suponiendo que ambas figuras son iguales, el argumento concluye satisfactoriamente pues, lo que sucede a cualquiera de las líneas, sucederá también a todas ellas. Si ambas figuras son desiguales, hacemos que su diferencia sea *BAD*, la cual trasladamos como *HFE*; observamos que cada una de las líneas *NS* puede aumentar hasta sobrepasar a *LM + YL*, con lo cual queda probado que las líneas de las dos figuras son magnitudes y por ello –asegura el autor– también son magnitudes los conjuntos de las mismas. Por consiguiente, las respectivas colecciones de líneas poseen una razón común.

Pero esto sería como admitir que una multitud de camellos es un camello, aunque mucho más grande. Creemos que Cavalieri se adentra en un terreno inseguro y contradictorio: ¿Es la dimensión de esos agregados de líneas superior a la que tiene cada una de ellas? Es decir, ¿son *todas las líneas* una medida de superficie y *todos los planos* una medida de volumen? Y en ese caso, ¿cómo las líneas sin espesor constituyen una superficie y los planos sin grosor componen un sólido? Porque el indivisible de Cavalieri es el punto sin partes, la línea sin anchura y el plano sin volumen, que especifica Euclides.³⁴

Así, para impedir futuras objeciones como aquellas que tiempo atrás formulara Galileo³⁵, añadió un escolio donde explicaba que él no comparaba en estas colecciones su cantidad, o

[...] su número, que ignoramos, sino sólo su magnitud, que es igual al espacio ocupado por esas mismas líneas, siendo congruente [por el *Postulado I*] con ellas.³⁶

Y aquí Cavalieri parece decantarse hacia esa opinión que hemos señalado respecto de la dimensión de orden superior de los agregados de indivisibles. La noción *omnes*, aunque alude a cantidades infinitas, es manejada por Cavalieri como *totalidad*, imprimiéndole así un carácter de finitud o de algo concluido. En el *Prefacio* al Libro VII insistirá en que estos conceptos se alcanzan también por la *vía de la negación* (o reducción al absurdo), pues en la figura entera no se excluye ningún plano y ninguna línea³⁷.

Pero cuando nos preguntamos si coincide el continuo con esos indivisibles o es otra cosa, Cavalieri reflexiona y responde: “Tanto si ese continuo está compuesto de indivisibles como si no lo está, los agregados de

³⁴ *Elementos* I, Definiciones 1, 2 y 5.

³⁵ Carta a Galileo del 22 de marzo de 1622. Cf. Favaro, E.N., vol. XIII, p. 86.

³⁶ *Ibid.*, p. 205.

³⁷ Lombardo – Radice aclara que esto significa definir un conjunto por una propiedad, al estilo moderno, p. 652, nota 3.

sus indivisibles son mutuamente comparables y guardan relación”.³⁸ Ni afirma ni rechaza la idea de divisibilidad al infinito; pero tampoco iguala el continuo con sus indivisibles de rango inferior, pues admite la posibilidad de que existan huecos o espacios vacíos entre los mismos. Y en conformidad con el modelo griego, no están las superficies compuestas de líneas ni éstas de puntos:

Yo no afirmo que el continuo esté compuesto de indivisibles, sino sólo demuestro que el continuo tiene la proporción de los agregados de esos indivisibles.³⁹

Cavalieri pretende salvar la condición de homogeneidad⁴⁰ y la ortodoxia euclídea evitando a toda costa transgredir el principio que subyace a la geometría y que consiste en la prohibición absoluta de acceder a objetos de dimensión n con otros de dimensión $(n - 1)$. En última instancia, se protege de polémicas y disquisiciones argumentando que, al final, sus resultados son los mismos que los obtenidos por Arquímedes y esto le parece suficiente defensa⁴¹. Pero nuestra duda sigue todavía en pie: ¿son las magnitudes *omnes* de un orden inmediatamente superior a los elementos que las componen?

El método colectivo de indivisibles

Cavalieri cree necesitar únicamente su postulado de congruencia para justificar el *Teorema II*:

Todas las líneas de figuras planas equivalentes son iguales, y todos los planos de sólidos equivalentes son iguales, tomados con un referente cualquiera.

Congruencia que expresa superponiendo sucesivamente fragmentos de las figuras equivalentes iniciales, hasta agotarlas por completo⁴². Este proceso no es muy ortodoxo y debió impactar a los geómetras de la época, acostumbrados como estaban al formalismo euclídeo. Pero Cavalieri *fuerza* su discurso hasta obtener los principios en los que fundar sus cálculos posteriores.

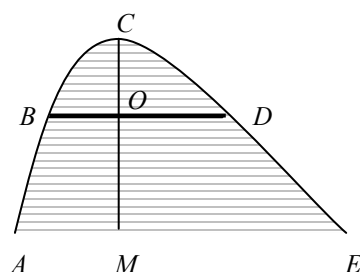


Figura 5, *Geometria*, p. 212

Así, en el *Teorema III*, fundamento del que llamaremos *método distributivo de indivisibles*, escribe:

³⁸ *Ibid.*, p. 207.

³⁹ Carta de Cavalieri a Galileo del 2 de octubre de 1632. Cf. Favaro, E.N., vol. XVI, p. 138. También en *Geometria degli indivisibili*, “Lettere” p. 757.

⁴⁰ *Elementos* V, def. 4. También denominado *axioma de continuidad* o *axioma de Eudoxo-Aquímedes*.

⁴¹ “Lettere”, *Ibid.*

⁴² Andersen (1984, p. 314) destaca que este proceso podría ser infinito en algunos casos, como cuando se compara un triángulo y un semicírculo, sin embargo —añade— Cavalieri no lo previó en la *Geometria*, aunque se refirió a ello en una carta que envió a Torricelli el 10 de marzo de 1642 (Torricelli, *Opere*, vol 3, p. 114) y en las *Exercitationes* (p. 212). Según parece —comenta Andersen— Cavalieri echaría mano del viejo método de exhaución si llegara el caso.

Las figuras planas tienen entre sí la misma relación que guardan todas sus líneas, tomadas con una referencia cualquiera; y las figuras sólidas poseen la misma razón que tienen todos sus planos, tomados respecto a uno cualquiera de ellos.⁴³

Su razonamiento intenta adecuarse a la *Definición 5* del Libro V de los *Elementos*: tantas veces como repetimos la figura A y la D, tantas veces hacemos lo mismo con los respectivos agregados de sus líneas; luego si un múltiplo, n , de A es igual, mayor o menor que un múltiplo, m , de D, así sucederá con esos múltiplos de sus correspondientes colecciones de líneas. Por tanto, las cuatro magnitudes: A, D, $\theta_A(l)$ y $\theta_D(l)$, son proporcionales.

De nuevo, observamos al jesuato manejar los conceptos *omnes* como magnitudes finitas, o colecciones completas, pues solamente adoptando esta idea es posible aplicar V.5 sin tener en cuenta los tamaños diferentes de las líneas de ambas figuras. Consigue también obviar el producto de infinitos, es decir, aumentar una cantidad inicialmente infinita, lo cual le hubiera conducido a un callejón sin salida. Si el *Teorema III* precisa considerar *omnes lineae* como magnitud, ¿por qué no define, en lugar de demostrar, el enunciado de proporcionalidad, tal como se explicita en los *Elementos*? Admitimos de momento con Cavalieri que *omnes* es una nueva clase de magnitud extensa introducida como hipótesis en geometría y que cumple, por consiguiente, todos los requisitos exigidos a ese tipo de magnitudes.

El *Teorema IV* suele denominarse *Principio de Cavalieri* y reza así:

Si dos figuras planas (o sólidas) tienen la misma altura, y llevando planos paralelos y equidistantes sobre ellas observamos que siempre, a idénticas alturas de sus bases respectivas, describen líneas (o secciones) en la misma razón, afirmamos entonces que las dos figuras están también en esa razón.

El enunciado anterior confirma que si:

$$BO : OD :: AM : ME$$

Entonces se cumple que:

$$ACM : MCE :: AM : ME^{44}$$

Es decir, la figura ACM guarda con MCE la misma relación que cualquiera de los antecedentes de la primera con su respectivo consecuente de la segunda⁴⁵. Para llegar a este resultado, Cavalieri se apoya en el *Corolario* que, sin embargo, mencionará después del *Teorema*: “[...] como uno de los antecedentes está a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes están a todos los consecuentes.”

Denominado por Andersen *Principio ut-unum*; más que añadir conocimientos al *Teorema IV*, justifica su demostración⁴⁶:

$$BO : OD :: \theta_{ACM}(l) : \theta_{MCE}(l)$$

El *Teorema III* afirmaba que:

$$ACM : MCE :: \theta_{ACM}(l) : \theta_{MCE}(l)$$

⁴³ Este es el nombre con el que Cavalieri, en sus *Exercitationes Geometriae* Sex, II, p. 843, caracteriza a su *Priori Methodo*, “en el cual, los indivisibles mismos son tomados colectivamente.” Andersen, entonces, lo denomina *método colectivo de indivisibles*.

⁴⁴ Adoptamos la expresión de Andersen (1984), p. 316, quien comenta que para que se cumpla esta proporción es necesario que las curvas ABC y CDE posean curvatura semejante en todos los puntos (BO) y (OD), algo de lo que Cavalieri no fue consciente.

⁴⁵ *Geometria degli indivisibili*, p. 212.

⁴⁶ Andersen (1984), op. cit., p. 317.

Luego

$$BO : OD :: ACM : MCE$$

O bien,

$$ACM : MCE :: AM : ME$$

Lombardo Radice subraya que en este lugar se insinúa el *método distributivo* de indivisibles⁴⁷ (desarrollado después en el Libro VII), puesto que se comparan pares de líneas o superficies a la totalidad de la figura. Este teorema y los sucesivos recuerdan algunos de los que hallamos en los *Elementos*, como la *Proposición I* del Libro VI: “Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases”.

El principio *ut-unum* nos aproxima a la *Proposición V.12* de los *Elementos*⁴⁸, piedra angular de las deducciones desarrolladas en los métodos de exhaustión. Pero, ¿en qué sentido entendemos el *Corolario* de Cavalieri? Si lo interpretamos desde *V.12*, estaremos *identificando el concepto omnes con la suma de elementos*, y entonces, sería posible escribir:

$$AM : ME :: BO : OD :: \dots :: \Sigma_{ACM}(l) : \Sigma_{MCE}(l)$$

Y, además:

$$ACM : MCE :: \Sigma_{ACM}(l) : \Sigma_{MCE}(l) \quad ^{49}$$

La cantidad de los términos que intervienen en esas sumas no importa demasiado; lo que realmente interesa es saber el parecer de Cavalieri al respecto. En opinión de Andersen, “Cavalieri no reveló sus pensamientos concernientes al principio *ut-unum*, aunque en sus *Exercitationes*⁵⁰ señaló que él no fue el único en utilizar este principio, pues también Torricelli lo había usado en *De dimensione parabolae*”.⁵¹ El método de Torricelli lo analizaremos más adelante, pero las palabras de Cavalieri señaladas por Andersen nos inclinan a pensar que, efectivamente, aquel entendió el principio *ut-unum* en el sentido de *V.12*. No obstante, existe un grave inconveniente:

El teorema de Euclides es válido únicamente para elementos homogéneos y nunca permite trascender la dimensión en la que se opera.

Es decir, la suma de las líneas nos daría una línea mayor en longitud, no una superficie. Por ello, aunque Cavalieri pensara que sus magnitudes *omnes* surgían de la suma de los indivisibles de rango inmediatamente inferior, no disponía de ningún teorema que lo avalara; al menos, sin transgredir la geometría de los *Elementos*. Por otra parte, si creyó que su *principio ut-unum* posibilitaba esa conversión de las líneas en superficies y de estas en sólidos, necesitaba antes demostrar que el concepto *omnes lineæ* era una medida de superficie; pero esta idea resultaba insostenible en el dominio de la geometría euclídea. Nos queda otra opción: la de considerar los agregados de indivisibles como conjuntos discretos e infinitos y la posibilidad de comparar dos de ellos estableciendo una correspondencia biunívoca entre sus elementos respectivos, según dispone el método

⁴⁷ *Ibid.* nota 11 p. 212.

⁴⁸ *Elementos* V.12: “Si de cualquier número de magnitudes cada una de las antecedentes tiene la misma razón con cada una de las consecuentes, en la misma razón estarán todas las antecedentes y todas las consecuentes”.

⁴⁹ Interpretar *omnes* en el sentido de *sumas* es algo que rechazan Giusti, Andersen y Lombardo Radice. Andersen explica el paso de las magnitudes *omnes* a sumas y por qué se confundieron los conceptos de indivisibles e infinitésimos, en “The Method of Indivisibles: Changing Understanding”, *300 Jahre ‘Nova Methodus’ von G.W. Leibniz (1684-1984)*, Studia Leibnitiana, Steiner Verlag, 1986.

⁵⁰ *Exercitatio Prima*, p. 30. Cavalieri alude aquí a los lemas 24 y 27 de la obra de Torricelli, mediante los cuales se estudia el segmento parabólico en función de la *suma* de los infinitos términos de una proporción continua decreciente.

⁵¹ Andersen (1984), p. 318.

de superposición; pero no podemos identificar esas colecciones por una propiedad que caracterice tanto al conjunto como a sus términos, pues las líneas son magnitudes de longitud y sus agregados magnitudes de superficie.

Baroncelli destaca la ausencia del vocablo *suma* en todos los tratados de geometría clásica que aluden a esta proposición, incluyendo los *Elementos*⁵², aunque era habitual –afirma– hacer alusión a *todos y todas* cuando se trataban *sumas* de diversos objetos geométricos. Torricelli tampoco mencionará *sumas* de líneas y de planos sino *todas las líneas y todos los planos*, aunque, en esta ocasión, él sí haga referencia explícita a las sumas de indivisibles.

Pero, como hemos señalado antes, la expresión en forma de *sumas* resultaba muy incómoda a Cavalieri, por lo cual pensamos que abrazó la última opción, al menos de cara a eludir futuras críticas. Hay que tener en cuenta, además, que Paul Guldin en su *Centrobaryca*, no advirtió en ningún momento que Cavalieri hubiera manejado sumas de indivisibles al confeccionar sus teoremas, lo cual es bastante significativo. No obstante, Baroncelli insiste en que en otros textos del jesuata “el término *aggregatum* es sinónimo de suma y no de conjunto”⁵³ y que al analizar el movimiento de caída de un grave en *Lo Specchio ustorio*⁵⁴, describe los grados acumulativos de velocidad en función de los tiempos, representados estos últimos por los radios de circunferencias concéntricas.

Esta fórmula sirvió a Cavalieri para demostrar muchos teoremas, entre otros, el IX, donde cambia el orden de magnitud:

Todos los cuadrados contruidos sobre paralelogramos de igual altura, poseen la misma razón que los cuadrados de las bases, si se ha tomado a éstas como referencia.

Cavalieri introduce aquí un nuevo concepto *omnes*: el de las *colecciones de cuadrados* levantados sobre todas y cada una de las líneas descritas en un paralelogramo, tomando uno de esos cuadrados como referencia. Y lo que declara para los cuadrados, lo extiende también a los agregados de cualesquiera otras figuras que logremos definir en las superficies de paralelogramos semejantes (*Corolario*, p. 219). Hábilmente prueba para colecciones de cuadrados lo que antes había demostrado mediante agregados de líneas. Lo expone en las proposiciones IX a XIV. Todos esos resultados son análogos a los que Euclides obtenía en su libro VI.

El método distributivo de indivisibles

Para evitar las exacerbadas críticas dirigidas a la noción *omnes* y a la introducción de infinitos en geometría, Cavalieri ideó otro argumento cuya diferencia con el primero fue tan sutil y, sin embargo, tan evidente, que no consiguió convencer a sus detractores: en el fondo, se escondía su técnica de indivisibles, aunque disimulada por un hábil cambio en el uso de las palabras. Prescindió, eso sí, de las magnitudes *omnes* y, por consiguiente, del principio *ut-unum*; pero intensificó el uso del procedimiento de inducción incompleta, apuntalando todo su razonamiento con algo tan experimental como la preeudoxiana *epharmózein*. Maneja líneas y planos al estilo de siempre sin tan siquiera insinuar que toma una cantidad infinita de los mismos o que juntos constituyen una magnitud o conforman el continuo; únicamente, escoge unos cuantos al azar y los compara; pero, antes de nada, *necesitará fijar unas condiciones iniciales de proporcionalidad* que restablezcan el equilibrio que anteriormente habían proporcionado los agregados de indivisibles y sin las cuales no hubiera obtenido

⁵² G. Baroncelli, *Bonaventura Cavalieri. Carteggio*. Olschki, Firenze, 1987, pp. 22-23.

⁵³ *Ibid.*, p. 24. Por ejemplo, en *Opusculum de geometria practica*, ed. a cargo de E. Giusti, “Bolletino di storia delle scienze matematiche” (1985), n. 1-2, pp. 202, 234.

⁵⁴ Bolonia, 1632, p. 159. Cf. E. Giusti, *Aspetti matematici della cinematica galileana*, “Bolletino di storia delle scienze matematiche” (1981), n.2, pp. 35-37. Baroncelli (*Ibid.*) hace hincapié en que Cavalieri siempre se refirió a sumas de indivisibles, como cuando se dirigió a Torricelli en 1642, para rebatir un argumento falso de Borelli (cf. *Le Opere dei Discepoli di Galileo Galilei. Carteggio 1642-1648*, vol. I; P. Galuzzi & M. Torrini (eds.), Giunti-Barberà, Firenze, 1975; aquí, p.33). En este caso, sí se escribe la palabra *somme* para indicar que la *suma* de las líneas de un segmento parabólico no es media proporcional entre las respectivas *sumas* de las líneas de su triángulo inscrito y las del rectángulo circunscrito.

ninguno de los resultados buscados. Cavalieri propone este *nuevo método* en el Libro VII⁵⁵, insistiendo en que sus fundamentos son radicalmente distintos a los del primero⁵⁶ aunque, como vimos, ya fue esbozado en el *Teorema IV* del Libro II. Inmediatamente después, efectuará un rápido recorrido por los teoremas principales de los libros anteriores y los explicará según esta nueva perspectiva.

Empeñado en construir una geometría perfectamente formalizada y sólida, carente de fisuras y firme ante las críticas, Cavalieri eliminará del Libro VII cualquier término *bajo sospecha* y procederá al modo euclídeo, obviando lo que en los *Elementos* estaba ya definido; pero al no incluir el principio de generalización *ut-unum*, hubiera sido bueno que añadiera un postulado para justificar el método inductivo; sin embargo, no lo hizo porque este orden de argumentar, tal como fuera propuesto por Francis Bacon, carecía a su vez de fundamento lógico.

Así, el Libro VII comienza planteando esas condiciones que delimitan el marco teórico en el cual nos vamos a mover. La primera de ellas es la *condición de igualdad y analogía*, y viene expresada en forma de *Teorema I*; gracias a él se pretende demostrar cuándo dos figuras son iguales o igualmente análogas: cuando al superponerse coinciden o son equivalentes:

Dadas figuras planas o sólidos cualesquiera, situados entre las mismas líneas o planos paralelos, si al trazar otras rectas y planos paralelos y equidistantes a los anteriores, las secciones intersecadas son mutuamente iguales, esas figuras son también iguales; o igualmente análogas si la unión de las porciones correspondientes son congruentes.

El autor dibuja dos figuras, $F_1 (F_1 O_1 P_1)$ y $F_2 (F_2 O_2 P_2)$, situadas entre las líneas XY y UV y cuyas bases, D_1 y D_2 , son iguales; intercaladas, traza otras dos rectas paralelas: MN y WZ , elegidas al azar.

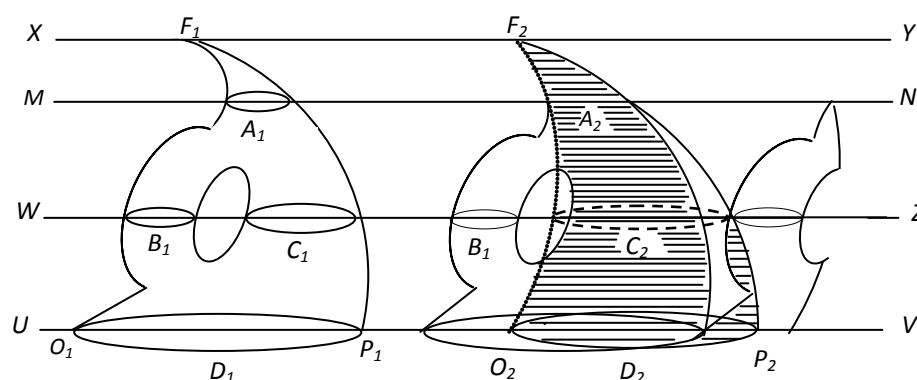


Figura 6, Geometria, p. 655

Trasladamos F_1 sobre F_2 , siendo la parte rayada congruente con ambas. El resto de F_1 , se llevará sucesivas veces sobre F_2 , en trozos, hasta intentar conseguir una coincidencia total. Así,

$$\begin{aligned} A_1 &\cong A_2 \\ (B_1 \text{ \& } C_1) &\cong C_2 \\ D_1 &= D_2 \end{aligned}$$

Cavalieri incluye dos lemas que sustentan las condiciones de igualdad y analogía:

⁵⁵ Cavalieri (*Exercitatio Tertia*, p. 843) caracteriza este *Posteriori Methodo* como aquel “en el cual, se toman los indivisibles *distributivamente*” Andersen lo denomina *método distributivo*.

⁵⁶ *Geometria*, “Prefacio” al Libro VII, p.653.

- 1) *Lema I.* Las figuras son iguales si:
 - a) Están situadas entre las mismas líneas o planos paralelos
 - b) Sus bases son iguales
 - c) Tomando segmentos continuos, paralelos a la base, éstos son siempre iguales
- 2) *Lema II.* Las figuras son igualmente análogas si:
 - a) Están situadas entre las mismas rectas paralelas
 - b) Sus bases son iguales
 - c) Los trazos son análogos respecto de las bases

Estas condiciones relacionan, una a una, las porciones indivisibles de ambas figuras, confirmando su igualdad y analogía. Considera necesario añadir dos lemas más que faciliten sus posteriores razonamientos:

Lema III. Si una recta corta a una línea curva en dos lugares, se puede trazar una tangente a esa curva en el tramo comprendido entre ambos puntos y que sea además paralela a la primera.

Lema IV. Si una figura plana cualquiera puede ser cortada cuantas veces queramos por líneas paralelas a otra, tomada como referencia, de tal modo que los segmentos hallados sean de un solo trazo, entonces esa figura puede descomponerse en paralelogramos rectilíneos o curvilíneos, o en figuras deficientes por una de las partes.

La condición de *proporcionalidad* queda determinada en un teorema homólogo al IV del Libro II y en él se establece además el *principio fundamental de ese segundo método o método distributivo de indivisibles*:

Teorema VII. II:

Si tomamos figuras planas cualesquiera colocadas entre las mismas paralelas, y llevamos líneas rectas arbitrariamente escogidas, equidistantes y paralelas a las primeras, y las secciones respectivas que surgen en ambas figuras están siempre en la misma proporción, decimos entonces que estas figuras están también en esa proporción o son proporcionalmente análogas.

Su técnica consiste en aplicar el criterio de proporcionalidad de Eudoxo, como hiciera anteriormente en II. III, y apoyarse en el *Lema II* para después dar un *paso inductivo* y generalizar las relaciones que descubre en cada una de las secciones a la totalidad de ambas figuras. Apelar a la definición eudoxiana de proporcionalidad nos parece ineficaz y superflua al entender, por hipótesis, que todas esas magnitudes han de ser proporcionales: El punto clave reside precisamente en ese salto inductivo que se podría haber planteado desde el comienzo, sin necesidad de argumentar de una forma tan prolija. Tampoco parece viable confirmar este enunciado mediante superposiciones sucesivas. Así pues, para conservar la apariencia de solidez que, a su modo de ver, alcanzó el primer teorema, Cavalieri incluyó en el segundo la prueba de la definición V.5, que no hace sino corroborar lo que ya sabemos por hipótesis: que las magnitudes correspondientes de las dos figuras poseen siempre la misma razón.

Aunque la consecuencia final de este razonamiento puede ser traducida según la expresión, *tal como sucede a uno, así sucede a todos*, al estilo del principio *ut-unum*; no debe ser entendida, sin embargo, al uso de *Elementos* V.12, desterrando entonces del libro VII cualquier alusión al empleo de sumas indefinidas o infinitas. Nos encontramos pues ante un dilema: si Cavalieri utilizó este principio en los dos métodos y con idéntico significado, entonces, como ya sospechábamos, no le confirió los rasgos propios de V.12. Por el contrario, si el modo de generalizar es distinto en el método distributivo, debemos inferir que el principio *ut-unum* fue entendido siempre como una suma de infinitos términos y con esa intención fue introducido en el Libro II.

Y nos preguntamos ahora qué pretendía Cavalieri al cambiar de procedimiento. ¿Acaso disimular que, en el fondo, el origen del método colectivo apuntaba a sumas de indivisibles? ¿O bien, prescindir de las *magnitudes omnes*? Seguramente, ambas cosas. Cavalieri no ha mencionado en el Libro VII este último término, sino únicamente líneas y planos cualesquiera, tantos como queramos; no necesita decir que sean todos, sino solamente unos cuantos. Pero nosotros sobrentendemos, *todos*, pues si esa proporcionalidad fallara en uno solo de ellos, ambas figuras dejarían de tener la misma razón. De este modo, evita introducir su nueva y controvertida

magnitud *omnes*, y desde luego, cualquier sugerencia, ficticia o real, a sumas de líneas y de planos. Convertir el principio *ut-unum* en una variante de la *Proposición V.12* hubiera sido una operación harto arriesgada y falta de fundamentos. La más mínima alusión a una interpretación semejante hubiera suscitado todo tipo de enconadas críticas por parte de los llamados filósofos⁵⁷, quienes, arraigados en la corriente más conservadora de la geometría, habían rechazado antes sus colecciones de indivisibles. Cavalieri se sentiría sorprendido e inseguro ante esta posibilidad; pero no así su discípulo Torricelli, el cual dejó a un lado los temores que animaron a su maestro y se dispuso a trabajar con sumas de un número infinito de elementos.

Las semejanzas y diferencias con Arquímedes

Según Cavalieri, un segmento podía degenerar en un punto; lo vemos en el *Teorema XXIII* del Libro II de su *Geometría*. Esta concepción es opuesta al pensamiento de Arquímedes, para quien la homogeneidad asienta su dominio en la geometría. Los indivisibles de Arquímedes no coinciden con los de Cavalieri. Lo sabemos porque hemos interpretado el *Axioma de continuidad* precisamente como la condición de que los segmentos no degeneren en puntos ni las superficies en líneas. Los indivisibles de Cavalieri, en cambio, no tienen magnitud, pues si la tuvieran, al ser infinitos en número su suma o adición alcanzaría una dimensión infinita, y Cavalieri, de ningún modo, estaba preparado para discutir esta objeción. Prefirió aceptar las líneas sin partes ni extensión y también, las líneas como límites o fronteras de las superficies, tal como defendía la geometría clásica; aunque pretendió evadir la cuestión sugiriendo que los agregados de líneas y de planos son solamente *indefinidos* en número.

Así pues, los indivisibles de Cavalieri, tomados uno a uno, logran someterse al principio de Eudoxo, y lo intentan si están agrupados; pero no consiguen ajustarse al axioma de Arquímedes, ni individualmente ni como colección. Por ello, toda la problemática aristotélica acerca del continuo aflora de nuevo. Tampoco tienen ninguna referencia mecánica; son exclusivamente geométricos. A pesar de estas discrepancias, las semejanzas con la técnica de indivisibles abordada por el sabio alejandrino son esenciales:

- Todas las líneas y todos los planos de una determinada figura son esa misma figura, defiende Arquímedes.
- Todas las líneas y todos los planos de una determinada figura poseen razón con esa misma figura, afirma con cautela Cavalieri.

Cuando el matemático milanés aludió a la técnica que Arquímedes debió emplear en la resolución de cuadraturas⁵⁸, no indicó que esta fuera de naturaleza mecánica o experimental, sino más bien insinuó la posibilidad de que aquel usara indivisibles. Cavalieri perturbó el corazón mismo de la geometría euclídea: las razones y sus leyes, ofreciendo la posibilidad de obtener superficies y volúmenes a partir de líneas y de planos. Introdujo subrepticamente un elemento de carácter empírico, como fue la técnica de superposición de figuras; y, aunque aparentemente pareciera restablecer el orden platónico relegado por Arquímedes, recurrió al método de inducción incompleta con excesiva asiduidad, e instaló por primera vez en las matemáticas el infinito actual.

Críticas y objeciones al método de indivisibles

Fueron muchas las críticas dirigidas al método de Cavalieri y lanzadas desde muy diversas perspectivas. El jesuita Paul Guldin (1577-1643), desde una posición conservadora, formuló una serie de interesantes objeciones en su *Centrobarýca*. Todas ellas apuntaban a esos aspectos tan discutibles de las tesis presentadas por el

⁵⁷ Prefacio al Libro VII. Aquí Cavalieri hace referencia a la postura de esos filósofos que han opuesto objeciones a su teoría de indivisibles basándose en consideraciones escolásticas acerca de la noción de infinito.

⁵⁸ Cavalieri, Prefacio al libro VII de la *Geometría*, p. 652.

maestro de Milán: utilización de procedimientos empiristas, introducción de un concepto de infinito negado por Aristóteles, uso y *abuso* de operaciones realizadas con ese infinito y, lo que es peor, una *mala interpretación* de la noción de razón entre magnitudes homogéneas.

Galileo también puso reparos a las conjeturas de Cavalieri y los expresó sucintamente en los *Discorsi*, mostrando un hermoso argumento en forma de paradoja:

Os he de mostrar, por tanto –afirma Salviati, el portavoz de Galileo– que dos superficies iguales, y con ellas, dos cuerpos también iguales, que tengan por bases tales superficies, pueden disminuir continua, uniforme y simultáneamente, dejando restos siempre iguales entre sí, para llegar por fin, al término de sus igualdades perpetuas, a que uno de los sólidos y una de las superficies se reduzcan a una línea muy larga, mientras que el otro sólido y la otra superficie se reduzcan a un solo punto.⁵⁹

Las objeciones de Galileo atacaban el reverso de la teoría de indivisibles, su cara oculta; mientras las que fueran señaladas por su discípulo mostraban el anverso de la misma: las transgresiones a la geometría euclídea.

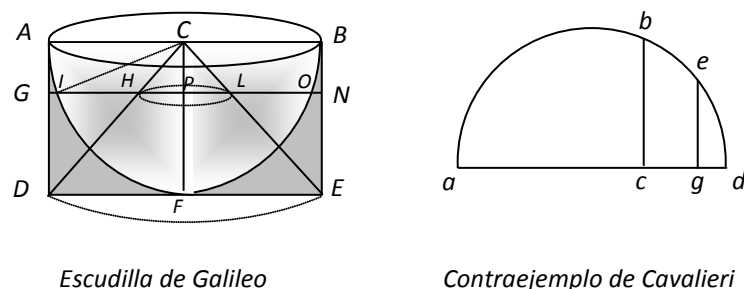


Figura 7

A este razonamiento de Galileo, Cavalieri interpuso⁶⁰ el suyo propio, no exento de razón y extremadamente agudo: Tomando un semicírculo como el de la *Figura 7* (derecha), observamos que, al trazar cuerdas cualesquiera, *bc*, *eg*, etcétera, los cuadrados levantados sobre ellas poseen una superficie equivalente a la de los rectángulos respectivos *ac.cd*, *ag.gd*, etcétera. Por último, el cuadrado sobre *d* será lo mismo que el rectángulo *ad.d*; o bien, ¿cabría afirmar que la línea *ad* es igual al punto *d*, tal como defiende Galileo? Cavalieri lo niega alegando que son los espacios engendrados los que se comparan y, por tanto, *el nulo espacio en d es igual al nulo espacio sobre ad*. Es decir, los últimos vestigios que nos quedan tras un proceso de reducción continua deberán ser nada en el género que disminuye, aunque difieran en otro género. En este caso, trabajamos con superficies y, por ello, las porciones últimas poseen un área nula, lo cual las hace iguales en ese sentido.

Sin embargo, Galileo respondería a Cavalieri⁶¹ aludiendo a la *Proposición XXIII* del libro II de la *Geometría*, donde se permite que los segmentos degeneren en puntos: ¿caso el último resto de una línea es un punto? Cavalieri, respaldado por la *Definición I*, se apresuró a excluir del concepto *omnes* a los extremos de los mismos, pues consideraba que el movimiento que origina *todas las líneas o todas las superficies* tenía un instante primero y otro final, en los cuales no existía tal movimiento, sino el reposo.⁶² Así pues, poco importaba que los fragmentos iniciales o los vestigios procedentes del movimiento de los planos fueran de naturaleza diferente o heterogéneos, si prescindía de ellos. Lograba entonces un mayor grado de homogeneidad entre los elementos manejados.

⁵⁹ “Paradoja de la escudilla”, *Discorsi, Opere VIII*, pp. 73-74. Versión en castellano a cargo de Carlos Solís: *Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias*, Editora Nacional, 1976, p-102. Según parece, esta objeción fue previamente expuesta por Galileo a Cavalieri, vía epistolar, pero no la conservamos.

⁶⁰ Carta dirigida a Galileo el 2 de octubre de 1634. En *Geometria degli indivisibili*, p. 754.

⁶¹ Hemos perdido casi todas las cartas de Galileo dirigidas a Cavalieri. Nos basamos en la respuesta de este el 19 de diciembre de 1634.

⁶² Carta de Cavalieri a Galileo del 19 de diciembre de 1634; *Geometria degli indivisibili*, “Lettere”, p. 758.

Las tesis de Cavalieri y su método geométrico no convencieron nunca al anciano Galileo, quien a pesar de auspiciar una teoría que defiende la descomposición del continuo en una multitud de indivisibles *non quante*, se atuvo al uso tradicional de proporciones cuando formalizó las construcciones acerca del movimiento⁶³.

Evangelista Torricelli (1608-1647) advirtió algunas incoherencias que inesperadamente surgían en la teoría de los indivisibles⁶⁴; una de ellas fue, sin duda, la que Cavalieri incluyó en su réplica a Güldin⁶⁵. Supongamos los triángulos ABD y ADC (Fig. 8), por los cuales hacemos discurrir un plano paralelo a la línea BC, tomada como *regula*; ese plano describe rectas cualesquiera, OP y MN, cuyas distancias respectivas a la base de ambos triángulos, OO_1 y PP_1 ; MM_1 y NN_1 , son iguales. Por tanto, podemos afirmar que en cada triángulo hay una cantidad idéntica de líneas: OO_1 , MM_1 , ..., y PP_1 , NN_1 , ..., iguales en longitud; concluyendo, erróneamente y contra evidencia, que $\square ABD = \square ADC$.

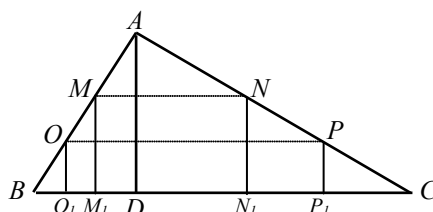


Figura 8, *Exercitationes Geometricæ Sex*, p. 238

Cavalieri (Fig. 8) repuso que el tránsito elegido no era el mismo en los dos triángulos, pues el lado AB está menos inclinado con respecto a la base, BC, que el otro lado, AC. Y, en definitiva, la densidad de las líneas no se corresponde en ambos triángulos: habría más líneas en AC que en AB. Pero Torricelli no quedó satisfecho con esta explicación: existían demasiados casos en los que aparecía este resultado paradójico; él mismo mostró 10 ejemplos para ilustrar su razonamiento⁶⁶. Consideró que, en los paralelogramos de superficies equivalentes, los residuos obtenidos después de hacer disminuir progresivamente sus áreas deberían ser diferentes. Lo vemos en la Figura 9: al aminorar continuamente las dos figuras, los paralelogramos que van quedando son siempre iguales; pero no así sus últimos restos, las líneas, las cuales tienen medidas diferentes. Ante la ambigüedad de esta situación, Torricelli creyó conveniente dotar a los indivisibles de magnitud variable:

Que todos los indivisibles sean iguales entre sí, esto es, los puntos a los puntos, las líneas en anchura a las líneas y las superficies en espesor a las superficies, es a mi juicio una opinión no sólo difícil de probar, sino también falsa.⁶⁷

Pues el lado, AD, del rectángulo (Fig. 9), al tener una longitud menor, será más grueso que el lado, AB, del otro cuadrilátero. Del mismo modo, todas las líneas en tránsito oblicuo del cuadrilátero, BC, son más delgadas que las que componen el rectángulo, AE, en tránsito recto.

⁶³ Ver De Gandt (1984), pp. 196-197.

⁶⁴ Expuestas en *De indivisibilium doctrina perperam usurpata*, obra no publicada en vida de Torricelli y que se encuentra en *Opere Scelte*, edición a cargo de Lanfranco Belloni, UTET 1975, pp. 494 y ss.

⁶⁵ Cavalieri la explica en *Exercitationes Geometricæ Sex* III, cap. XV, pp. 238-239, en la edición de 1647.

⁶⁶ Acerca de las paradojas observadas por Torricelli, ver F. De Gandt (1984): "Naissance et métamorphoses d'une théorie mathématique: la géométrie des indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli)", *Sciences et Techniques en perspective*, Univ. de Nantes, vol. IX, pp. 179-226. De Gandt (1987): *L'oeuvre de Torricelli: Science galiléenne et nouvelle géométrie*, Fac. des Lettres et Sciences Humaines de Nice, num. 32, serie I.

⁶⁷ *Opere Scelte*, p. 505.

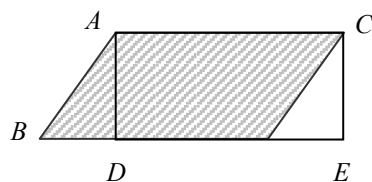


Figura 9

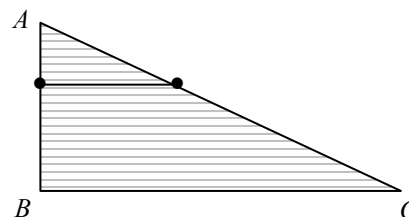


Figura 10

Este razonamiento posibilita el establecimiento de razones entre los diversos tipos de indivisibles. Puntos, líneas y planos tienen magnitud ahora; por tanto, no parece insólito afirmar que, dado un triángulo cualquiera, ABC (Fig. 10), “un punto de la línea AB es a un punto de la línea AC como toda la línea AB es a toda la línea AC”⁶⁸, ya que los puntos son homogéneos a las líneas y estas a las superficies. Pero Torricelli prescindió del espesor variable de sus indivisibles al tratar asuntos puramente geométricos. Notamos que al trazar líneas paralelas al lado BC señalamos tantos puntos en AB como en AC, y tantos como rectas; sin embargo, ambas líneas tienen distinta longitud. Torricelli da a entender aquí que las líneas dibujadas en el triángulo disminuyen su espesor de izquierda a derecha hasta acoplarse perfectamente con cada uno de los puntos en AC. Después añade:

Un solo punto de la línea AB está a un único punto de la línea AC como el agregado de todos los puntos es al agregado de todos los puntos, es decir, como la línea AB es a la AC.⁶⁹

El espesor de los indivisibles elimina la posible incompatibilidad con la teoría eudoxiana de razones; pero al mismo tiempo descubre un universo lleno de incógnitas: ¿Qué medida habían de tener esos indivisibles? ¿Serían, a su vez, divisibles? ¿Hasta qué límite? Torricelli no aclaró nada de esto; debemos suponer que esos indivisibles poseían una magnitud mínima, aunque racionalmente su división fuera todavía practicable. El que puntos, líneas y superficies fueran más o menos gruesos permitía operar con ellos; es decir, sumarlos para conseguir magnitudes de rango superior. El problema surgía si los considerábamos en una cantidad infinita, pues hubieran traspasado el límite de la finitud. Pero si afirmamos que son *todos los que hay y ninguno más*, logramos resolver esta cuestión, al menos de momento.

Torricelli incluye en su investigación acerca de *La cuadratura de la parábola*⁷⁰ definiciones de carácter mecánico, como son las condiciones de equilibrio y la ubicación del centro de gravedad. En la primera parte de este tratado, el autor aplica el método exhaustivo, pero respaldado en las nociones mecánicas introducidas como lemas y justificadas a la manera de los teoremas. Sus demostraciones no coinciden con las de Arquímedes, salvo la *Proposición 5*, en la cual esgrime el método de aproximación y de doble reducción al absurdo, partiendo de una parábola a la que se han inscrito sucesivos triángulos. Este teorema cuenta además con la presencia del *principio ut-unum*: “como uno es a uno, así todos son a todos.” Asimismo, Torricelli se asegura de que los paralelogramos inscritos y circunscritos a la curva cumplan el *Axioma de continuidad*, tal como hizo el sabio de Siracusa en su *Cuadratura de la parábola*. Y en la segunda parte de la obra, argumenta desde una hipótesis indivisibilista⁷¹ sin recurrir a ningún tipo de fundamentación⁷² o análisis introductorio de esos indivisibles; sino transformando el *principio ut-unum* en una suma de infinitos indivisibles (*Lema XVIII*):

⁶⁸ *Ibid.*

⁶⁹ *Ibid.*, p. 506. Ver G. Cellini, “Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri”, *Periodico di Matematiche* (1966), serie IV, vol. XLIV n. 1, pp. 1-22. Hace una lectura cinemática de Cavalieri, relacionándolo a Arquímedes (p. 5); rechaza la interpretación de conjunto (p. 11).

⁷⁰ *De dimensione parabolae, Opera Geometrica*, Firenze, 1644. Aquí manejamos la *Opere Scelte*, a cura di Lanfranco Belloni, UTET, 1975.

⁷¹ *Ibid.*, pp. 381 y ss.

⁷² Belloni, en su Introducción (p. 14) subraya que Torricelli no investigó acerca de los primeros principios, pues era más amigo de destacar la elegancia y practicidad de sus procedimientos.

Si una primera magnitud está a una segunda como una tercera está a una cuarta, esto cuantas veces se quiera; y siendo todas las primeras y también todas las terceras, iguales entre sí [respectivamente]. Decimos que todas las primeras juntas, están a todas las segundas, como todas las terceras están a todas las cuartas.

Análogamente, este lema facilita el paso de una dimensión a la inmediata superior: la suma de las líneas será una superficie y la adición de planos nos proporcionará un sólido. Pero no nos garantiza que *una figura sea idéntica a la suma de sus indivisibles*, al menos en la forma en que Cavalieri concebía esos indivisibles. Torricelli no fue muy explícito a la hora de aclarar estos misterios; él siempre apelaba a la intuición del lector.

El Escolio al *Lema XXVII* añade que “sea cualquier número de magnitudes, finito o infinito, si cada una es mayor que la que le sucede, decimos entonces que la primera de ellas es igual al agregado de todas las diferencias tomadas junto a la última.” *Ésta – añade – o no existirá o será un punto*. Es decir, cualquier progresión geométrica decreciente contiene un último término que coincide con cero o con el punto en que se unen las rectas convergentes.⁷³

Como antes indicábamos, la crítica de Güldin⁷⁴ se centró en cinco aspectos de la Geometría de los indivisibles que, a su modo de ver, vulneraban la lógica interna de los *Elementos*:

- Originalidad del método
- Conceptos *omnes*
- Congruencia
- Operaciones con infinitos
- Uso de la técnica de superposición de figuras

Güldin censuró a Cavalieri pensando que el método de indivisibles se hallaba expuesto con anterioridad en la *Nova stereometria doliorum* (1615) de Johannes Kepler; en realidad, veremos que ambos son bien distintos. El fraile jesuita insinuó también que la obra de Cavalieri hallaba su inspiración más directa en el *Tractatus de recti et curvi proportionibus* (1630), cuya autoría se debió a Bartolomeo Sovero (1577-1629); pero Cavalieri ya se había defendido de esta posible acusación en una carta dirigida a Muzzio Oddi, recalcando que, a pesar de las semejanzas, él ya había compuesto su método de indivisibles en 1628⁷⁵.

En el *Teorema II*⁷⁶ de la *Nova stereometria doliorum*, Kepler propone una nueva demostración de la conocida proposición arquimediana de la medida del círculo⁷⁷; su propósito no es otro que determinar la razón entre la superficie de un círculo y el cuadrado de su diámetro, afirmando que esta se aproxima a 11:14. Dibuja un círculo cualquiera con centro en A y radio AB, y afirma que en su circunferencia existen tantas partes como queramos, incluso *infinitas* si las hacemos lo suficientemente pequeñas.

⁷³ Aún no sabemos si ese punto posee magnitud.

⁷⁴ En palabras de Güldin: “... no hacemos nuestra investigación para confundir o destruir al autor, del cual tenemos gran opinión...”; *Exercitatio Tertia*, cap. XIII, p. 225. *Centrobaryca*, sección XXXVIII.

⁷⁵ Carta del 22 de junio de 1632. Cavalieri escribió a Federico Borromeo (17 de diciembre de 1627), anunciándole que había conseguido perfeccionar una obra de geometría en la que, aun continuando la materia de Euclides, es nueva respecto a las cosas que demuestra y respecto al método. Cf. G. Barocelli, *Carteggio*, op. cit.

⁷⁶ *Nouvelle stéréométrie des tonneaux*, ed. de Jean Peyroux, Blanchard, París, 1993. Esta edición es la traducción al francés de la obra de Kepler recogida por Frisch; pensamos que para nuestro propósito es suficiente emplear esta versión.

⁷⁷ Cavalieri dio por buena la demostración de Arquímedes y no propuso una distinta basada en su método de indivisibles. Según apunta Lombardo-Radice (nota, p. 286), el judío de origen español, Abraham de Savasorda, ideó un argumento basado en indivisibles para confirmar el problema arquimediano.

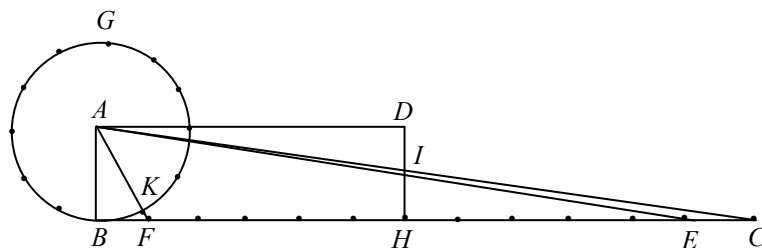


Figura 11, *Nouvelle stéréométrie des tonneaux* p. 16

Construimos un triángulo cuyos lados, AB y BC , corresponden, respectivamente, al radio y a la longitud de la circunferencia. Después, hallamos tantas partes en su base, BC , como porciones hay en la circunferencia, todas ellas iguales, y describimos triángulos desde el punto A hasta cada una de esas partes señaladas en el círculo y en el triángulo, intentando que el primer triángulo, ABF , coincida en ambas figuras, pues su lado, AF , corta los puntos K y F de la circunferencia y del triángulo. Kepler sostiene, a continuación que, así como hay una cantidad infinita de triángulos en el círculo, también lo hay en el triángulo ABC . Demuestra primero que los triángulos trazados en la figura ABC son todos iguales porque tienen la misma base, BF , EC , etcétera, y poseen todos idéntica altura: AB . Pero, entonces, cada uno de estos triángulos es igual al triángulo ABF y al resto de sectores del círculo, y en la misma cantidad; luego las áreas del círculo y del triángulo, ABC , son equivalentes también. Lo más interesante de esta argumentación reside en la identificación entre el sector ABK y el triángulo ABF . El razonamiento de Kepler se apoya en la circunstancia de hacer ambos tan pequeños que su diferencia sea casi nula o nula. Sin embargo, no leemos ninguna justificación formal al respecto: debemos confiar en nuestra intuición. Además, surge el hecho de que la cantidad de esos triángulos es infinita.

Advertimos en seguida que los discursos desarrollados por Kepler y después por Cavalieri no tienen nada que ver. El primero no afirma que los sectores circulares sean indivisibles, pues son susceptibles de disminuir a nuestra conveniencia; asimismo, poseen extensión o magnitud. Kepler desprecia el posible error que aparece en su explicación y haciéndolo, abre la puerta al futuro cálculo infinitesimal. Creemos que su pensamiento no se encuentra tan vinculado al canon euclídeo como el de Cavalieri, al menos cuando éste intentaba por todos los medios salvar la *Definición V.4* de los *Elementos*. La única semejanza entre los dos modelos de cuadratura se basa en la idea de utilizar en ellos una cantidad infinita (Kepler) o indeterminada, quizá infinita (Cavalieri), de elementos de magnitud mínima (Kepler) o nula (Cavalieri); aunque el astrónomo ni menciona la posibilidad de que éstos no sean homogéneos al resto de la superficie a medir. La búsqueda del rigor geométrico, propio de la mentalidad platónica de Galileo (no olvidemos sus alusiones al respecto) influyó directamente en el conjunto de sus discípulos. Kepler camina por otros senderos, concediendo en ocasiones como ésta primacía a la capacidad intuitiva sobre el formalismo, con la mirada puesta en el resultado práctico y no en las objeciones de índole epistemológica que pudieran surgir.

El juicio de Guldin recayó asimismo sobre el concepto *omnes* y el modo en que se obtienen los agregados de las líneas y de las superficies. Según él, el movimiento de un plano al deslizarse perpendicular u oblicuamente por una superficie no origina una sucesión de líneas, pues la línea secante describe una superficie única y no una multitud de segmentos paralelos equidistantes entre sí⁷⁸. En lenguaje vulgar, diríamos que el plano arrastra a esa línea de un extremo a otro de la figura. Guldin no se atreve a contradecir a Euclides ni a Aristóteles: una multitud de líneas, por muy grande que sea, nunca compondrá ni la más pequeña de las superficies.

Para Cavalieri, en cambio, cada línea se engendra en un instante sucesivo de tiempo, el marcado por el movimiento. Esta aclaración revelaba una concepción atomista del continuo, muy próxima a la galileana.

⁷⁸ *Exercitatio Tertia*, cap.VII, p. 198. Sección XVIII de *Centrobaryca*.

La noción de *congruencia*, tal como fue planteada en el libro II de la *Geometria indivisibilibus*, tampoco satisfizo a Guldin, para quien es posible verificar la congruencia entre figuras, pero no la postulada para los agregados de las líneas y de los planos, según se ha justificado antes. Cavalieri recurre a una definición genética para refutar este argumento: Dadas dos figuras superpuestas e iguales, el mismo plano describirá en ambas las mismas líneas. La respuesta de Cavalieri es correcta, pero como Guldin rechazó la posibilidad de que en una superficie hubiera un conjunto de líneas contiguas, la equivalencia entre estas y otras semejantes a ellas resultaría inadmisible.

Razones entre infinitos. El único infinito que Guldin reconoce es el denominado por Aristóteles potencial, o *sincategoremático*, según definimos en otro lugar. Imposible entonces hallar razones y proporciones entre esos infinitos⁷⁹. Cavalieri, en su deseo de rebatir al geómetra suizo, distinguirá dos tipos de infinito: el *infinito en sentido absoluto*, ilimitado en todas sus partes, de aquel detenido por el contorno de las figuras mismas, o *infinito relativo*. Es inadmisble establecer razones entre infinitos absolutos del mismo modo que no se puede operar con ellos. Sin embargo, cuando el infinito que consideramos es relativo (*secundum quid*) a una superficie finita, como nuestras magnitudes *omnes*, limitadas en todos sus lados, sí es lícito realizar cálculos aritméticos con ellas.

Esta explicación no resuelve el problema planteado de congruencia de infinitos. Guldin rechazaba la posibilidad de un *infinito actual* o de un *infinito potencial actualizado* al estilo del que había concebido Galileo⁸⁰; luego desde su punto de vista —“el continuo es divisible al infinito, pero no consta de infinitas partes en acto, sino sólo en potencia”⁸¹—la superposición de líneas inextensas o de planos sin espesor parece insostenible. El infinito de las colecciones de Cavalieri es discreto y numerable, como el conjunto de los números naturales y el de los racionales, entre los cuales se puede establecer una correspondencia biunívoca; y también es actual o *categoremático*; es decir, completo. Pero no es la cantidad (cardinal) de líneas la que se multiplica, añade o resta, sino su tamaño o longitud, pues esas líneas están como adheridas a la figura y cuando esta aumenta o disminuye también lo hacen ellas.

Guldin rechaza el método de superposición de figuras desarrollado en el Libro VII de la *Geometria indivisibilibus*: “En la proposición primera - escribe - el autor [...] se esfuerza en demostrar esas cosas por superposición, tanto en las figuras planas como en las sólidas; pero, en realidad, no demuestra nada”.⁸² Y añade: ¿Quién será el juez que determine la certeza de esa superposición, la mano, el ojo o el intelecto? En verdad, Guldin argumenta con perspicacia; esta vez sin invocar los nombres de Euclides ni de Aristóteles. Como ya indicamos en su momento, el *Teorema I* del Libro VII solamente enuncia la condición de igualdad y analogía, indispensable para formular el resto de las proposiciones; con ello, Cavalieri restringe el contexto de situaciones ajustables a esa condición, pero nada más. Guldin analiza el significado de este teorema y advierte que, aunque las líneas de dos figuras fueran congruentes, ¿cómo demostrar que las superficies internas delimitadas por ellas también son congruentes si nada se dice de sus respectivos contornos? Sin embargo, la idea de Cavalieri, implícitamente, procede de un planteamiento más empírico que *intelectivo*: los extremos de las líneas y de los planos dibujan el perfil de cada figura. Esto supone la ausencia de espacios intermedios: todos los indivisibles serían contiguos, estarían en contacto y, además, completarían las figuras;

Cavalieri utilizó una retórica que, a nuestro modo de ver, no le ofrecía ninguna salida aceptable:

- Si los indivisibles no son contiguos ni agotan la superficie a medir porque se suceden los huecos entre ellos, la razón está del lado de Guldin.
- Si admitimos la congruencia de los indivisibles en las figuras igualmente análogas, no añadimos nada a nuestro conocimiento.

⁷⁹ *Ibid.*, cap. VIII, p. 201. Sección XXII en *Centrobaryca*.

⁸⁰ Véase Manuel Sellés, “La teoría de indivisibles de Galileo y su geometrización del movimiento”, *Congreso Internacional de Tenerife*, 2001.

⁸¹ *Exercitatio Tertia*, cap. VIII, p. 204. *Centrobaryca*, sección XXIV.

⁸² *Ibid.*, sección XXX. *Exercitatio Tertia*, cap. X, p. 209. Traducción no literal.

El procedimiento de superposición de figuras fue aceptado por Güldin en la forma expresada por Euclides en *Elementos* I, 4⁸³, pues se dirigía directamente al intelecto.⁸⁴ Análogamente, la técnica de *eparmózein* que desarrolla Arquímedes en la *Proposición XX* de *Sobre conoides y esferoides*⁸⁵ no le parece mal del todo al geómetra suizo: “en efecto, Arquímedes asume otra figura que la dada, en todo igual y semejante [a la primera], y cortada en todo y por todo del mismo modo, y las superposiciones [que él hace] se hacen siempre de magnitudes iguales, de modo que no se pueda dudar de la congruencia.”⁸⁶ Aunque indica la repugnancia de Commandino a incluirla en su comentario a las obras de Arquímedes y la omisión de Rivalta⁸⁷, por considerarla indigna de Arquímedes. Nuevamente asoma esa pertinaz repulsa hacia todo lo que sugiera la más mínima intervención de medios y técnicas empíricas en el dominio de la geometría euclídea. Cavalieri, como era de esperar, se apresura a justificar ese método, aludiendo al comentario aprobatorio que el mismo Commandino realizó de la *proposición euclídea antes mencionada*⁸⁸: “Este método de demostración que se hace por medio de superposiciones de figuras, además de ser aprobado por Proclo, expertísimo en ciencias matemáticas, es también de la máxima utilidad para los matemáticos. Arquímedes, en efecto, lo adoptará no tanto en el caso de las figuras planas como en el libro sobre el centro de gravedad de los planos, también en el caso de las figuras sólidas y en el libro sobre conoides y sobre esferoides.” Con lo cual, contradice a Güldin y enlaza directamente con la metodología arquimediana.

El matemático británico John Wallis (1616-1703) leyó la *Opera Geometrica* del maestro de Faenza y, a partir de ésta, pudo conocer la obra de Cavalieri. Los indivisibles que introduce Wallis en su *Arithmetica infinitorum*⁸⁹ poseen magnitud, como los de Torricelli: “Las líneas tienen que ser comprendidas con anchura, y lo mismo los planos”.⁹⁰ Pero esa magnitud ha de ser infinitesimal: ni finita ni nula. Un infinitésimo, para Wallis, no es otra cosa que una parte de un infinito, tan pequeña como queramos, pero no finita. Expresada de modo algebraico: $1/\infty$. De este modo, una colección infinita de infinitésimos nos proporciona una magnitud finita (no infinita), pudiendo componer con ellos figuras planas y sólidos.⁹¹ Asimismo, al poseer magnitud, es posible establecer razones, pues cada uno de esos indivisibles es homogéneo a la magnitud total, aunque su medida sea inferior a toda magnitud finita. Aquí Wallis estaría manejando el *infinito actual*, el que negó Aristóteles: “aquel mayor que lo cual no hay nada”. Sin embargo, esta conclusión no es tan obvia si por todas las líneas entendemos la suma de las mismas y, además, si el número de términos integrantes de esa suma es infinito, en el sentido de Aristóteles. Nos estamos refiriendo a las series convergentes: $1/2 + 1/4 + 1/8 \dots + \dots$, que determinan el agregado de magnitudes progresivamente más pequeñas, hasta anularse.

Es muy probable que ni Cavalieri ni Torricelli pretendieran hacer una distinción entre ambos infinitos, lo cual no es sorprendente si pensamos que hasta entonces el único infinito concebible en matemáticas es el sincategoremático, aunque los teólogos se esforzaran en imaginar un absoluto trascendente con el que nombrar a Dios. Wallis sí describió esos infinitos y lo leemos en una carta dirigida a V. Léotaud el 17 de febrero de 1667⁹² donde, primeramente, comenta acerca del infinito potencial: “si por infinito entendemos lo que es indefinido, o tan grande como queramos; en este sentido, para los geómetras, una recta infinita es tan larga

⁸³ Donde se comprueba la igualdad de dos triángulos equiláteros.

⁸⁴ *Exercitatio Tertia*, cap. XI, pp. 213-214. *Centrobaryca* sección XXXII.

⁸⁵ Belloni aclara que esta proposición corresponde a la numeración de Rivalta. Cf. *Geometria degli indivisibili*, nota 40, p. 827.

⁸⁶ *Exercitatio Tertia*, *Ibid*.

⁸⁷ *Archimedis Opera quae extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata per Davidem Rivalentum a Flurantia*, Parisiis, apud. C. Morellum 1615.

⁸⁸ *Ibid.*; según Cavalieri, Commandino incluyó en su edición de los *Elementos* (1572) el comentario favorable de Proclo (en *Primum Euclidis Elementorum librum commentarii*) respecto al modo en que Euclides comprobó la igualdad de los triángulos equiláteros.

⁸⁹ En *Opera Mathematica*, 1693-1699, vol. I. Ver J.F. Scott, *The Mathematical Work of John Wallis*, Chelsea Publishing Co., New York, 1981.

⁹⁰ *Treatise of Algebra*, printed by John Playford, for Richard Davis, Univ. of Oxford, 1685, p. 285.

⁹¹ Piedad Yuste, “Modelos algebraicos de Wallis para componer sólidos de dimensión infinita y volumen determinado”, *Endoxa* 16, 2002, pp. 333-362.

⁹² El mismo Wallis transcribió esta carta para incluirla en la *Defense of the Angle of Contact*, p. 80.

como se quiera...”⁹³, y el cual se ajusta a la definición que ya conocemos: *dada una cosa, siempre hay otra mayor*. Pero más adelante nos dice:

Pero si, en efecto, por Infinito se entiende aquello que sea Absoluto Infinito en Acto, [...] entonces en ese sentido sería imaginado lo Infinitamente grande y también lo Infinitamente pequeño; pero digo que aquello debe ser concebido más que dado por hecho.⁹⁴

Así, Wallis delimita el marco especulativo de ese concepto: no importa si ese infinito posee una realidad trascendente o no; lo único que nos interesa es su *posibilidad lógica; conjeturar algo mayor o menor que lo cual no hay nada*.

Conclusiones

En este breve ensayo hemos intentado acercarnos a una de las polémicas más fructíferas surgidas en el seno de la Geometría y cuyo origen lo podemos encontrar en el descubrimiento de la inconmensurabilidad entre el diámetro y la longitud de la circunferencia, a partir de los cuales era difícil calcular el área del círculo. Los agrimensores de las culturas fluviales del Mediterráneo se contentaron con lograr resultados aproximados en este preciso tema, pues la Geometría en aquella época era más práctica que teórica y, desde luego, estaba muy alejada de la formalización euclídea. El debate en torno a la medida del círculo diríamos que comenzó cuando los matemáticos griegos se enfrentaron al dilema entre aceptar los presupuestos epistemológicos recibidos de la Filosofía y conseguir así una solución aproximada, o vulnerar aquellos logrando, en cambio, la medida exacta. En este sentido hemos visto las propuestas de Antifón e Hipócrates, más inclinados a continuar la primera vía, mientras Eudoxo y Euclides fueron deudores al máximo de los preceptos filosóficos, intentando evitar contradicciones o transgresiones en sus razonamientos; y para impedir la inexactitud o la intromisión de concepciones espurias a la Geometría, diseñaron un cuerpo conceptual en torno a la idea de razón y proporcionalidad. Podemos hallar en los *Elementos* una serie de definiciones, axiomas y postulados que sientan las bases de los posteriores desarrollos y análisis de cuadraturas y cubaturas. La metodología empleada por Euclides se apoya en el teorema de exhaución y en la proposición V.12, los cuales garantizan que las diversas figuras rectilíneas inscritas y circunscritas en una superficie o sólido curvo sean proporcionales a estos. En ningún momento hubo un paso al límite.

Arquímedes, como siglos después hiciera Cavalieri, quiso adecuar sus argumentos a la rigurosidad del formalismo euclídeo, pero también estaba deseoso de obtener resultados concretos; por tanto, echó mano de elementos ajenos a la Geometría, como las máquinas simples, intentando descubrir en ellas las relaciones existentes entre diversos cuerpos; con esta información trataría de organizar un argumento ajustado a los cánones euclídeos. Pero, para eso, necesitaba introducir en Geometría un axioma nuevo, el de *Continuidad*, que elimina la posibilidad de que las sucesivas diferencias entre magnitudes degeneren en puntos, líneas o planos sin espesor. Sus indivisibles son unidades de peso distribuidas en un sistema mecánico, por lo que las operaciones realizadas con ellas son perfectamente legítimas. Y si podemos establecer una relación de equivalencia entre todas las unidades que componen un sólido y este mismo, de igual manera podremos decir que todas las líneas que componen una figura equivalen a esa figura. Y en este viaje hacia la abstracción, esos objetos perderán su volumen y anchura, conservando únicamente las relaciones de proporcionalidad. La poco ortodoxa metodología arquimediiana quedó oscurecida por los triunfos obtenidos por su autor en la invención de procedimientos y construcción de razonamientos; hasta tal punto que no se supo de la existencia del *El Método* hasta principios del siglo XX, momento en que Heiberg logró rescatarlo del olvido. Sin embargo, siglos después, Cavalieri, un discípulo de Galileo, maravillado por los descubrimientos de Arquímedes, ideó

⁹³ *Ibid.*, “Si enim, per Infinitum, intelligatur Indefinitum, seu quantumlibet magnum; quo sensu, apud geometras, Recta Infinita hoc est, quantumlibet longa ...”

⁹⁴ “Si vero, per Infinitum, intelligatur id quod sit Absolute Infinitum Actu... Etiam hic concedo, quo jure qui, hoc sensu, imaginari velit Infinite-Magnum etiam Infinite-Parvum Imaginandum esse, sed, Imaginandum potius dico, quam Datum iri”.

un método nuevo para realizar cuadraturas y cubaturas sorprendentemente parecido al llevado a cabo por el sabio alejandrino, aunque en ningún momento trascendió el ámbito de la Geometría. Los indivisibles de Cavalieri no se ajustaban a las exigencias de la tradición euclídea, lo cual motivó un enfrentamiento dialéctico entre los seguidores de aquél y sus oponentes. Este debate no supuso una lucha entre posicionamientos contrarios sino un intercambio de explicaciones y objeciones; un ajuste en los procedimientos; una búsqueda de soluciones y, en definitiva, un avance de esta ciencia. Esta controversia continuó durante mucho más tiempo hasta llegar a recrudecerse en el conocido enfrentamiento entre Leibniz y Newton por la autoría del cálculo diferencial e integral.