Correção 2ª fase Unicamp 2020

Matemática

Professor Marçal

05) Dois tipos de exames para a detecção de certo vírus foram aplicados em um grupo de 80 pacientes, dos quais, com certeza, 60 são portadores desse vírus e 20 não são. Os resultados dos exames estão organizados nas tabelas abaixo.

EXAME 1	PORTADOR	NÃO PORTADOR	TOTAL
RESULTADO POSITIVO	42	06	48
RESULTADO NEGATIVO	18	14	32

EXAME 2	PORTADOR	NÃO PORTADOR	TOTAL
RESULTADO POSITIVO	56	07	63
RESULTADO NEGATIVO	04	13	17

Note que em cada exame ocorrem tanto falsos positivos (pacientes não portadores do vírus com resultado positivo no exame) quanto falsos negativos (pacientes portadores do vírus com resultado negativo no exame).

a) Calcule a porcentagem de pacientes portadores do vírus no grupo em estudo.

b) Considerando os resultados positivos em cada exame, qual dos dois exames tem a menor porcentagem de falsos positivos? Justifique sua resposta.

Comentários:

a) Calcule a porcentagem de pacientes portadores do vírus no grupo em estudo.

Como são 60 portadores do vírus em um grupo de 80 pacientes, temos:

$$\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\%$$

b) Considerando os resultados positivos em cada exame, qual dos dois exames tem a menor porcentagem de falsos positivos? Justifique sua resposta.

O número de falsos positivos para o exame 1 é:

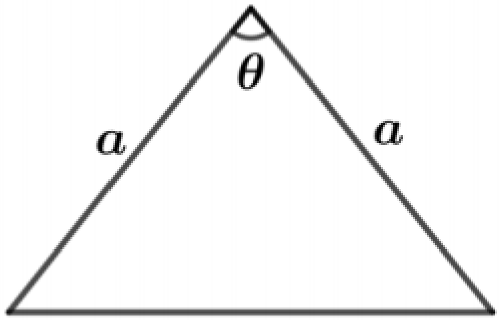
$$\frac{6}{48} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$$

O número de falsos positivos para o exame 2 é:

$$\frac{7}{63} = \frac{1}{9} = 11,\bar{1}\%$$

Dessa forma, o exame 2 apresenta a menor porcentagem de falsos positivos.

06) A figura abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de comprimento $a = 5\ cm$ e um dos ângulos internos igual a θ, em que $cos\ \theta = 3/5$.



a) Calcule a área desse triângulo.

b) Determine o comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Comentários:

$$\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\mathrm{sen}^2(x) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\mathrm{sen}^2(x) + \frac{9}{25} = 1$$

$$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{16}{25}$$

$$sen(x) = \frac{4}{5}$$

a) Calcule a área desse triângulo.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen(\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5}$$

$$A = 10\ cm^2$$

b) Determine o comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$$

$$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$x^2 = 50 - 30$$

$$x = \sqrt{20}$$

$$x = 2\sqrt{5}\ cm$$

$$\frac{x}{sen(\theta)} = 2 \cdot R$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{\frac{4}{5}} = 2 \cdot R$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{4}\,cm = R$$

7) Seja a matriz de ordem 2×3, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Seja C a matriz de ordem 3×2, cujos elementos são dados por $c_{ij} = (-1)^{i+j}$, para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2$. Determine o produto AC.

b) Determine a solução do sistema linear $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, nas variáveis reais x, y, e z, em que (x, y, z) é uma progressão aritmética.

Comentários:

a) Seja C a matriz de ordem 3×2, cujos elementos são dados por $c_{ij} = (-1)^{i+j}$, para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2$. Determine o produto AC.

$$c_{11} = (-1)^{1+1} = 1$$
$$c_{12} = (-1)^{1+2} = -1$$
$$c_{21} = (-1)^{2+1} = -1$$
$$c_{22} = (-1)^{2+2} = 1$$
$$c_{31} = (-1)^{3+1} = 1$$
$$c_{32} = (-1)^{3+2} = -1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 - 1 + 1 & -1 + 1 - 1 \\ 1 - 2 + 3 & -1 + 2 - 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Determine a solução do sistema linear $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, nas variáveis reais x, y, e z, em que (x, y, z) é uma progressão aritmética.

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Como (x, y, z) é uma progressão aritmética, temos:

$$\frac{x+z}{2} = y$$

$$x + z = 2y$$

$$x - 2y + z = 0$$

Assim, nosso sistema passa a ser:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(-1) \\ + & \\ & + \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

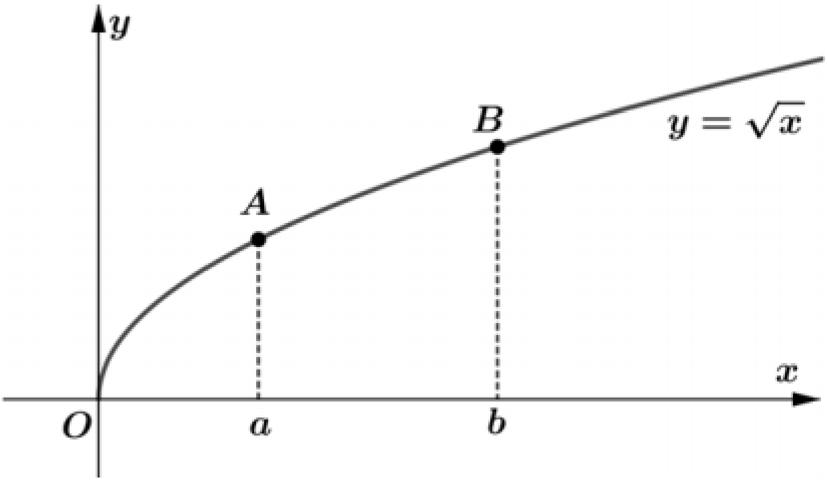
Voltando para nosso sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 0 \\ -3y = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 2z = 0 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ z = -1 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ z = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução para o sistema solicitado é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

8) A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$, em que os pontos A e B têm abscissas $x_A = a > 0$ e $x_B = b > 0$, e O é a origem do sistema de coordenadas.



a) Prove que os pontos A, B e $C = \left(-\sqrt{ab}, 0\right)$ são colineares.

b) Para $b = 3$, determine o valor de a para o qual a distância da origem ao ponto A é igual à distância do ponto A ao ponto B.

Comentários:

a) Prove que os pontos A, B e $C = \left(-\sqrt{ab}, 0\right)$ são colineares.

Os pontos em questão são

$$A = \left(a, \sqrt{a}\right)$$

$$B = \left(b, \sqrt{b}\right)$$

$$C = \left(-\sqrt{ab}, 0\right)$$

Para serem colineares, a seguinte equação deve ser verdadeira:

$$\begin{vmatrix} a & \sqrt{a} & 1 \\ b & \sqrt{b} & 1 \\ -\sqrt{ab} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a\sqrt{b} + \sqrt{a} \cdot \left(-\sqrt{ab}\right) - \left(-\sqrt{ab}\right) \cdot \sqrt{b} - b\sqrt{a} = 0$$

$$a\sqrt{b} - a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - b\sqrt{a} = 0$$

$$0 = 0$$

Assim, os três pontos, A, B e C estão alinhados.

b) Para $b = 3$, determine o valor de a para o qual a distância da origem ao ponto A é igual à distância do ponto A ao ponto B.

Para $b = 3$, temos os pontos:

$$O = (0,0)$$

$$A = \left(a, \sqrt{a}\right)$$

$$B = \left(3, \sqrt{3}\right)$$

Pelo enunciado, devemos ter:

$$d_{OA} = d_{AB}$$

$$\sqrt{(a-0)^2 + \left(\sqrt{a}-0\right)^2} = \sqrt{(3-a)^2 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{a}\right)^2}$$

$$(a-0)^2 + \left(\sqrt{a}-0\right)^2 = (3-a)^2 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{a}\right)^2$$

$$a^2 + a = 9 - 6a + a^2 + 3 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{a} + a$$

$$0 = 12 - 6a - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{a}$$

$$0 = -6a - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{a} + 12$$

$$\sqrt{a} = x$$

$$0 = -6x^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot x + 12$$

$$\Delta = \left(-2\cdot\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot(-6)\cdot 12 = 12 + 288 = 300$$

$$x = \frac{-\left(-2\cdot\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{300}}{2\cdot(-6)} \begin{cases} x' = \dfrac{2\sqrt{3}+10\sqrt{3}}{-12} = \dfrac{12\sqrt{3}}{-12} = -\sqrt{3} \\ x'' = \dfrac{2\sqrt{3}-10\sqrt{3}}{-12} = \dfrac{-8\sqrt{3}}{-12} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt{a} = x$$

$$\sqrt{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$a = \frac{4\cdot 3}{9}$$

$$a = \frac{4}{3}$$

9) Seja a função $f(x) = \frac{2+senx}{2+cosx}$, definida para todo número real x.

a) Mostre que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Seja θ um número real tal que $f(\theta) = 2$. Determine os possíveis valores para $sen\,\theta$.

Comentários:

a) Mostre que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2+sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2+cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2+sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2+cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2+sen(\pi)}{2+cos(\pi)}\cdot\frac{2+sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{2+1}{2+0}+\frac{2+(-1)}{2+0}=\frac{2+0}{2+(-1)}\cdot\frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{1}\cdot 1$$

$$\frac{4}{2}=2$$

$$2=2$$

Assim, pode-se afirmar que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f(\pi)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Seja θ um número real tal que $f(\theta)=2$. Determine os possíveis valores para $sen\ \theta$.

$$f(\theta)=\frac{2+sen\theta}{2+cos\theta}=2$$

$$2+sen\theta=4+2\cdot cos\theta$$

$$sen\theta-2=2\cdot cos\theta$$

$$sen^2\theta-4sen\theta+4=4\cdot\cos^2\theta$$

$$sen^2\theta-4sen\theta+4=4\cdot(1-sen^2\theta)$$

$$sen^2\theta-4sen\theta+4=4-4\cdot sen^2\theta$$

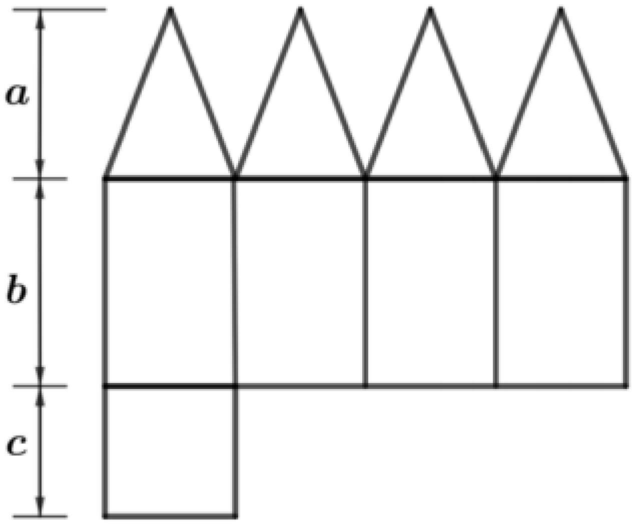
$$5\cdot sen^2\theta-4sen\theta=0$$

$$sen\theta\cdot(5\cdot sen\theta-4)=0$$

$$sen\theta=0\quad ou\quad 5\cdot sen\theta-4=0$$

$$sen\theta=0\quad ou\quad sen\theta=\frac{4}{5}$$

10) A figura abaixo exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.



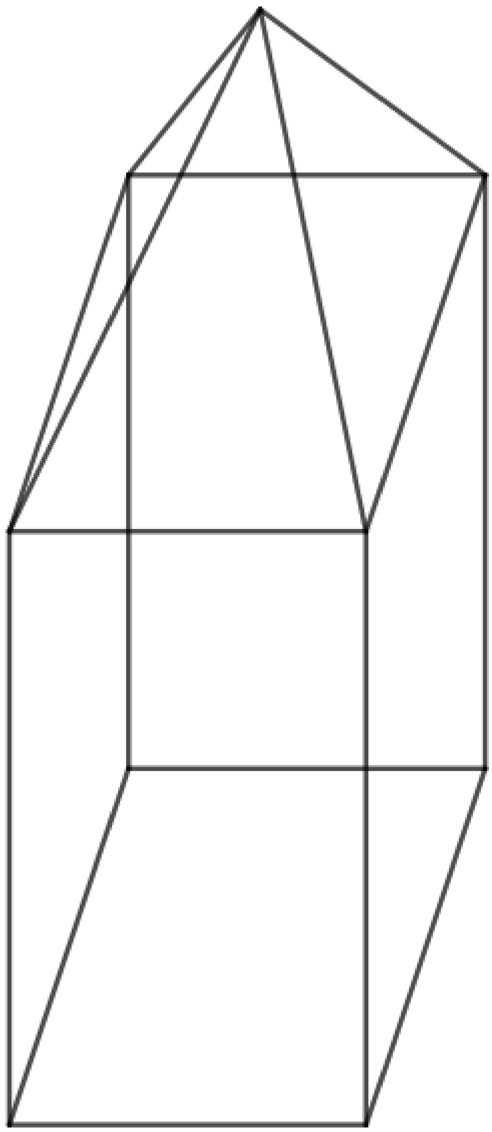
a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

b) Para $a = 13\ cm$, $b = 16\ cm$ e $c = 10\ cm$, calcule o volume desse poliedro.

Comentários:

a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

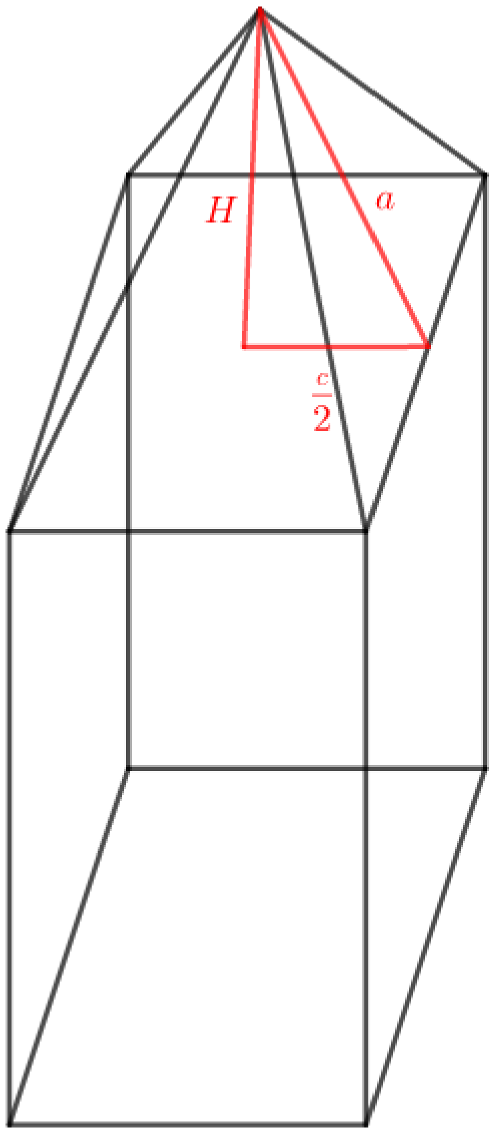
O poliedro tem o seguinte formato:



Assim, temos 16 arestas e 9 vértices.

b) Para $a = 13\ cm$, $b = 16\ cm$ e $c = 10\ cm$, calcule o volume desse poliedro.

Calculando a altura H da pirâmide de base quadrada da parte superior do poliedro.



$$a^2 = H^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$13^2 = H^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$169 - 25 = H^2$$

$$144 = H^2$$

$$12 = H$$

Assim, o volume V do poliedro é dado por:

$$V = c^2 \cdot b + \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot H$$

$$V = 10^2 \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12$$

$$V = 1600 + 400$$

$$V = 2000\ cm^3$$