Estratégia Vestibulares

Correção da prova

Fuvest 2020
Segunda fase

Professor Marçal

Sumário

M01

A figura apresenta uma parte de uma tabela na qual cada linha e cada coluna seguem de acordo com o padrão representado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	⋯
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	⋯
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	⋯
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	⋯
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Com relação a essa tabela de números:

a) Escolha um quadrado 3 x 3 e, exibindo a soma de seus 9 números, verifique que o resultado é múltiplo de 9.

b) Um quadrado com 16 números tem por soma de todos esses números o valor de 1.056 (mil e cinquenta e seis). Descubra o menor número desse quadrado.

c) A soma de todos os números de um quadrado n x n, com menor número igual a 4, é de 108.000 (cento e oito mil). Qual é o valor de n?

Comentários

a) Escolha um quadrado 3 x 3 e, exibindo a soma de seus 9 números, verifique que o resultado é múltiplo de 9.

Iniciando a contagem em qualquer posição, temos um quadrado de $3x3$ genérico da forma:

$$\begin{array}{ccc} x & x+1 & x+2 \\ x+7 & x+8 & x+9 \\ x+14 & x+15 & x+16 \end{array}$$

$$Soma = 9x + 1 + 2 + 7 + 8 + 9 + 14 + 15 + 16$$

$$Soma = 9x + 72$$

$$Soma = 9 \cdot (x + 8)$$

Dessa forma, a soma sempre será um múltiplo de nove.

b) Um quadrado com 16 números tem por soma de todos esses números o valor de 1.056 (mil e cinquenta e seis). Descubra o menor número desse quadrado.

De maneira similar ao anterior, temos:

$$\begin{array}{cccc} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+7 & x+8 & x+9 & x+10 \\ x+14 & x+15 & x+16 & x+17 \\ x+21 & x+22 & x+23 & x+24 \end{array}$$

$$16x + 192 = 1056$$

$$16x = 864$$

$$x = 54$$

c) A soma de todos os números de um quadrado n x n, com menor número igual a 4, é de 108.000 (cento e oito mil). Qual é o valor de n?

O quadrado em questão é do tipo:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 4+n-1 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & \cdots & 11+n-1 \\ 18 & 19 & 20 & 21 & \cdots & 18+n-1 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & \cdots & 25+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 4+1 & 4+2 & 4+3 & \cdots & 4+n-1 \\ 4+7 & 4+8 & 4+9 & 4+10 & \cdots & 4+7+n-1 \\ 4+14 & 4+15 & 4+16 & 4+17 & \cdots & 4+14+n-1 \\ 4+21 & 4+22 & 4+23 & 4+24 & \cdots & 4+21+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$$4n^2 + \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 7 & 7+1 & 7+2 & 7+3 & \cdots & 7+n-1 \\ 7\cdot 2 & 7\cdot 2+1 & 7\cdot 2+2 & 7\cdot 2+3 & \cdots & 7\cdot 2+n-1 \\ 7\cdot 3 & 7\cdot 3+1 & 7\cdot 3+2 & 7\cdot 3+3 & \cdots & 7\cdot 3+n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

$$4n^2 + (0+1+2+3+\cdots+n-1)\cdot n + \big(0+7+7\cdot 1+7\cdot 2+7\cdot 3+\cdots+7\cdot(n-1)\big)\cdot n = 108000$$

$$4n^2 + (0+1+2+3+\cdots+n-1)\cdot n + 7\cdot(0+1+2+3+\cdots+n-1)\cdot n = 108000$$

$$4n^2 + 8\cdot(0+1+2+3+\cdots+n-1)\cdot n = 108000$$

$$4n^2 + 8\cdot(n-1)\cdot\frac{n}{2}\cdot n = 108000$$

$$4n^2 + 4n^3 - 4n^2 = 108000$$

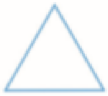
$$4n^3 = 108000$$

$$n^3 = 27000$$

$$n = 30$$

M02

O Floco de Neve de Koch (ou Estrela de Koch) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

Passo 0: começa-se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.	**Passo 1:** divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.	**Passo 2:** repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior.
		

Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda:

a) Qual é o número de lados da figura no Passo 3?

b) Qual é o perímetro da figura no Passo 5?

c) A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6.000.000.000.000 (seis trilhões)?

Comentários

a) Qual é o número de lados da figura no Passo 3?

$$N(p) = 3 \cdot (4)^p$$

$$N(3) = 3 \cdot (4)^3$$

$$N(3) = 3 \cdot 2^6$$

$$N(3) = 192$$

b) Qual é o perímetro da figura no Passo 5?

$$P(p) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^p$$

$$P(5) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5$$

$$P(5) = 3 \cdot \frac{2^{10}}{3^5}$$

$$P(5) = \frac{2^{10}}{3^4}$$

c) A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6.000.000.000.000 (seis trilhões)?

$$N(p) = 3 \cdot (4)^p$$

$$3 \cdot (4)^p > 6 \cdot 10^{12}$$

$$(4)^p > 2 \cdot 10^{12}$$

$$2^{2p} > 2 \cdot 10^{12}$$

$$2^{2p-1} > 10^{12}$$

$$\log 2^{2p-1} > \log 10^{12}$$

$$(2p-1) \cdot \log 2 > 12 \cdot \log 10$$

$$(2p-1) \cdot 0{,}301 > 12 \cdot 1$$

$$2p - 1 > \frac{12}{0{,}301}$$

$$2p > \frac{12}{0{,}301} + 1$$

$$p > \frac{6}{0{,}301} + \frac{1}{2}$$

$$p > \frac{6}{0{,}301} + \frac{1}{2}$$

$$p > 20{,}43 \ldots$$

$$p > 21$$

A partir do 21° passo.

M03

Um jogo educativo possui 16 peças nos formatos: círculo, triângulo, quadrado e estrela, e cada formato é apresentado em 4 cores: amarelo, branco, laranja e verde. Dois jogadores distribuem entre si quantidades iguais dessas peças, de forma aleatória.

O conjunto de 8 peças que cada jogador recebe é chamado de coleção.

a) Quantas são as possíveis coleções que um jogador pode receber?

b) Qual é a probabilidade de que os dois jogadores recebam a mesma quantidade de peças amarelas?

c) A regra do jogo estabelece pontuações para as peças, da seguinte forma: círculo = 1 ponto, triângulo = 2 pontos, quadrado = 3 pontos e estrela = 4 pontos. Quantas são as possíveis coleções que valem 26 pontos ou mais?

Comentários

a) Quantas são as possíveis coleções que um jogador pode receber?

$$C_{16,8} = \binom{16}{8} = \frac{16!}{8! \cdot 8!}$$

$$C_{16,8} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{16,8} = 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$$

$$C_{16,8} = 12870$$

b) Qual é a probabilidade de que os dois jogadores recebam a mesma quantidade de peças amarelas?

$$P = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{16}{8}}$$

$$P = \frac{924 \cdot 6}{12870}$$

$$P = \frac{28}{65}$$

c) A regra do jogo estabelece pontuações para as peças, da seguinte forma: círculo = 1 ponto, triângulo = 2 pontos, quadrado = 3 pontos e estrela = 4 pontos. Quantas são as possíveis coleções que valem 26 pontos ou mais?

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 \geq 26$$

As coleções possíveis são:

$$28\ pontos$$

$$4\ estrelas + 4\ quadrados$$

$$C_{4,4} \cdot C_{4,4}$$

$$1 \cdot 1$$

$$1$$

$$27\ pontos$$

$$4\ estrelas + 3\ quadrados + 1\ triângulo$$

$$C_{4,4} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,1}$$

$$1 \cdot 4 \cdot 4$$
$$16$$

$$26\ pontos$$
$$4\ estrelas + 3\ quadrados + 1\ círculo$$
$$C_{4,4} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,1}$$
$$1 \cdot 4 \cdot 4$$
$$16$$

$$26\ pontos$$
$$4\ estrelas + 2\ quadrados + 2\ triângulos$$
$$C_{4,4} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2}$$
$$1 \cdot 6 \cdot 6$$
$$36$$

$$26\ pontos$$
$$3\ estrelas + 4\ quadrados + 1\ triângulos$$
$$C_{4,3} \cdot C_{4,4} \cdot C_{4,1}$$
$$4 \cdot 1 \cdot 4$$
$$16$$

$$N = 1 + 16 + 16 + 36 + 16$$
$$N = 85$$

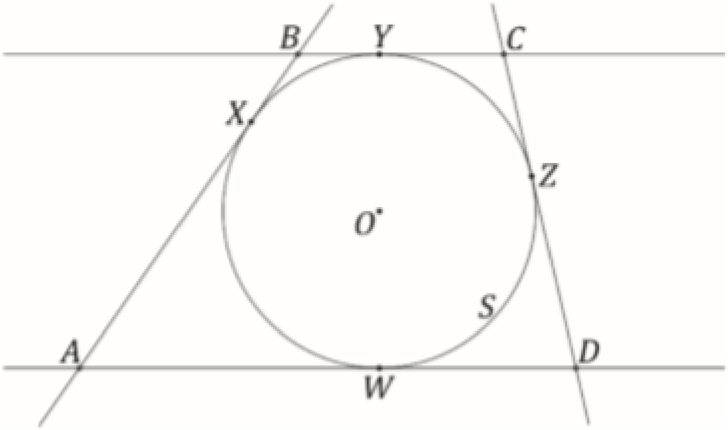
M04

São dados:

• uma circunferência S de centro 0 e raio 5;

• quatro pontos X, Y, Z e W em 5 de tal forma que as retas tangentes a S nesses pontos formam um trapézio $ABCD$, como na figura;

• $sen\ (B\hat{A}W) = \frac{3}{5}$ e $CD = 15$.



Determine

a) a medida de $\overline{AB}$;

b) a medida de $\overline{AW}$ e $\overline{AX}$;

c) a área da região delimitada pelo trapézio $ABCD$.

Comentários

a) a medida de $\overline{AB}$;

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$sen\alpha = \frac{co}{hip} = \frac{2R}{AB}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2R}{AB}$$

$$AB = \frac{50}{3}$$

b) a medida de $\overline{AW}$ e $\overline{AX}$;

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{AW}$$

$$AW = \frac{R}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$tg(\alpha) = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{4} = \frac{3}{4}$$

$$tg(2x) = \frac{2 \cdot tg(x)}{1 - tg^2(x)}$$

$$tg(\alpha) = \frac{2 \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$3 \cdot \left(1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 4 \cdot 2 \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$3 - 3 \cdot tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4 \cdot 2 \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$3 \cdot tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 8 \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 3 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 64 + 36 = 100$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} == \begin{cases} tg'\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3} \\ tg''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-8-10}{6} = \cancel{-3}\,(Não\ há\ tangente\ negativa) \end{cases}$$

$$AW = \frac{R}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$AW = \frac{5}{\frac{1}{3}}$$

$$AW = 15$$

$$AX = 15$$

c) a área da região delimitada pelo trapézio $ABCD$.

$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$S = \frac{(AD + BC) \cdot 2R}{2}$$

$$S = (AB + CD) \cdot R$$

$$S = \left(\frac{50}{3} + 15\right) \cdot 5$$

$$S = \frac{475}{3}$$

M05

É dada a função $f: [0; \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen^4 x + \cos^4 x$, para todo $x \in [0; \pi]$.

a) Apresente três valores $x \in [0; \pi]$ para os quais $f(x) = 1$.

b) Determine os valores $x \in [0; \pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.

c) Determine os valores $x \in [0; \pi]$ para os quais $\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{3}{8} \cdot sen(2x) \geq \frac{5}{8}$

Comentários

a) Apresente três valores $x \in [0; \pi]$ para os quais $f(x) = 1$.

$$f(x) = 1$$

$$sen^4 x + \cos^4 x = 1$$

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(sen^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2$$

$$sen^4 x + 2 \cdot sen^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

$$f(x) + 2 \cdot sen^2 x \cdot \cos^2 x = 1$$

$$f(x) + 2 \cdot sen\, x \cdot \cos x \cdot sen\, x \cdot \cos x = 1$$

$$f(x) + sen\, 2x \cdot \frac{sen\, 2x}{2} = 1$$

$$f(x) + \frac{sen^2\, 2x}{2} = 1$$

$$1 + \frac{sen^2\, 2x}{2} = 1$$

$$\frac{sen^2\, 2x}{2} = 0$$

$$sen^2\, 2x = 0$$

$$sen\, 2x = 0$$

$$2x = k \cdot \pi$$

$$x = \frac{k \cdot \pi}{2}$$

$$x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi$$

b) Determine os valores $x \in [0; \pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.

$$f(x) = \frac{5}{8}$$

$$f(x) + \frac{sen^2\, 2x}{2} = 1$$

$$\frac{5}{8} + \frac{sen^2\, 2x}{2} = 1$$

$$\frac{sen^2\, 2x}{2} = \frac{3}{8}$$

$$sen^2\, 2x = \frac{3}{4}$$

$$sen\, 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

c) Determine os valores $x \in [0;\pi]$ para os quais $\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{3}{8} \cdot sen(2x) \geq \frac{5}{8}$

$$f(x) + \frac{sen^2\, 2x}{2} = 1$$

$$f(x) = 1 - \frac{sen^2\, 2x}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot f(x) + \frac{3}{8} \cdot sen(2x) \geq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{sen^2\, 2x}{2}\right) + \frac{3}{8} \cdot sen(2x) \geq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{sen^2\, 2x}{4} + \frac{3}{8} \cdot sen(2x) \geq \frac{5}{8}$$

$$4 - 2 \cdot sen^2\, 2x + 3 \cdot sen(2x) \geq 5$$

$$-4 + 2 \cdot sen^2\, 2x - 3 \cdot sen(2x) \leq -5$$

$$2 \cdot sen^2\, 2x - 3 \cdot sen(2x) + 1 \leq 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$sen(2x) = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} == \begin{cases} sen'(2x) = \dfrac{3+1}{4} = 1 \\ sen''(2x) = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq sen\,(2x) \leq 1$$

$$\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$$

M06

Resolva os três itens abaixo:

a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição $Re(z) = Im(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) da folha de respostas o conjunto resultante após essa transformação.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\frac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.

c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z, i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.

Comentários

a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição $Re(z) = Im(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) da folha de respostas o conjunto resultante após essa transformação.

$$z = a + b \cdot i$$

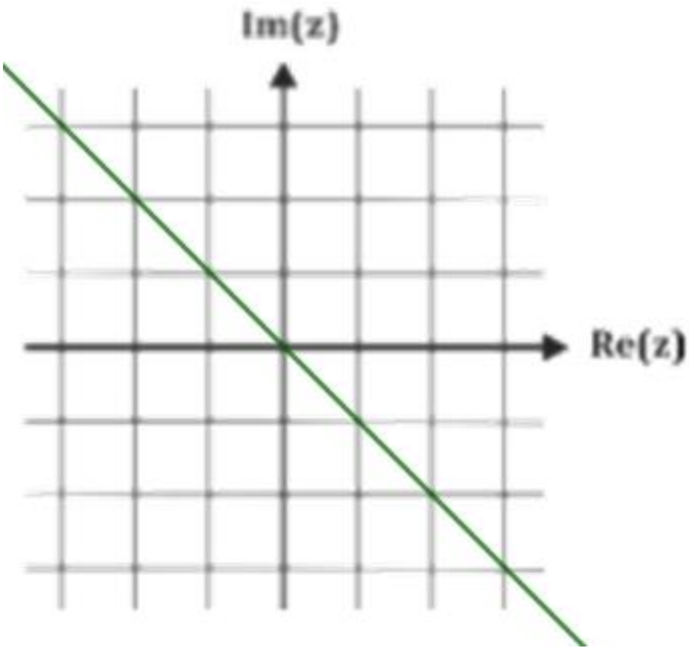
$$Re(z) = Im(z)$$

$$a = b$$

$$z = a + a \cdot i$$

$$\bar{z} = a - a \cdot i$$

$$\alpha = -45°$$



b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\frac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.

$$\frac{z-1}{z+1}$$

$$\frac{a + b \cdot i - 1}{a + b \cdot i + 1}$$

$$\frac{(a-1)+b\cdot i}{(a+1)+b\cdot i}\cdot\frac{(a+1)-b\cdot i}{(a+1)-b\cdot i}$$

$$\frac{a^2+b^2-1+2\cdot b\cdot i}{(a+1)^2+b^2}$$

$$\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}+\frac{2\cdot b\cdot i}{(a+1)^2+b^2}$$

$$\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}=0$$

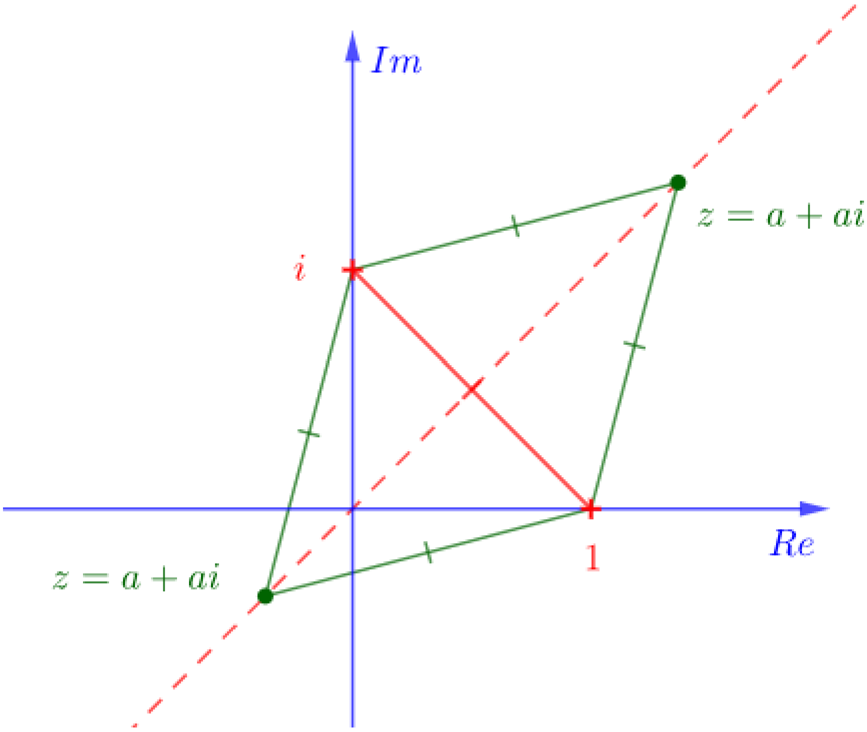
$$a^2+b^2-1=0$$

$$a^2+b^2=1$$

$$z\neq -1$$

Lugar Geométrico é uma circunferência com centro na origem, exceto o ponto $z=-1$.

c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z, i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.



$$d=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(1-x)^2+(0-x)^2}=\sqrt{2}$$

$$(1-x)^2+x^2=2$$

$$1-2x+x^2+x^2=2$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 4 + 8 = 12$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x' = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ x'' = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \; e \; \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$