

Resolução ITA 2020 – 2^a Fase

Física

Autor:
Prof. Toni Burgatto

01 de janeiro, 2018

Sumário

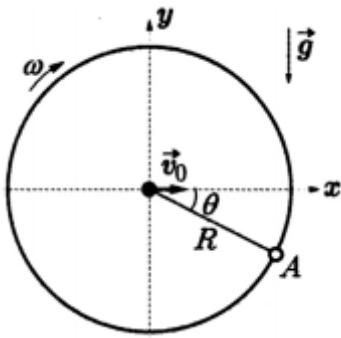
Exemplo de Título 1	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
<i>Exemplo de Título 2</i>	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
1. Título 2.....	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
2. Título 2.....	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
3. Título 2.....	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
3.1 Subtítulo	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
3.2 Subtítulo	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
3.3 Subtítulo	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
3.4 Tabelas.....	<i>Erro! Indicador não definido.</i>



1. (ITA – 2020)

Na figura, o anel de raio R gira com velocidade angular ω constante e dispõe de um alvo pontual A que cruza o eixo x no mesmo instante em que, do centro do anel, é disparado em sua direção um projétil puntiforme com velocidade \vec{v}_0 . Desconsiderando a resistência do ar,

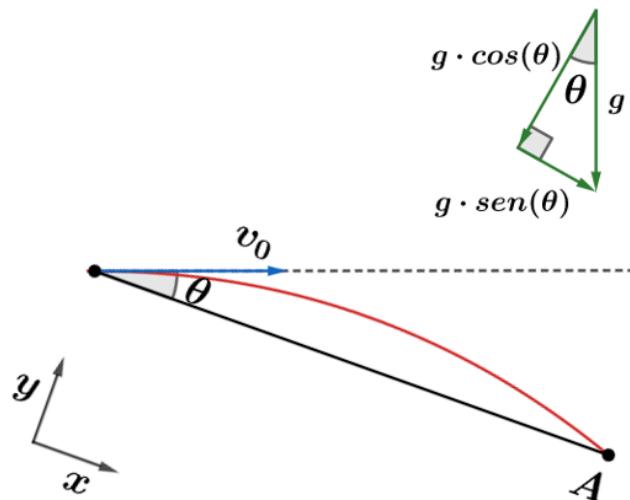
- determine o ângulo θ , em relação ao eixo x , em que o projétil acerta o alvo;
- determine o intervalo de tempo Δt dispendido pelo projétil para acertar o alvo;
- a velocidade angular ω é determinada apenas por θ e Δt ? Justifique.



Comentários:

a)

Vamos decompor a aceleração da gravidade na direção normal e tangencial ao segmento centro do anel a A :



O tempo de voo para o projétil atingir o ponto A é dado por:

$$t_{voo} = \frac{2v_0 y}{g_y}$$

$$t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \theta}{g \cdot \cos \theta}$$

Portanto, nesse intervalo de tempo, o projétil deslocou de R na direção x . Então:

$$R = v_{0x} \cdot t_{voo} + \frac{a_x}{2} \cdot t_{voo}^2$$



$$\begin{aligned}
 R &= v_0 \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \theta}{g \cdot \cos \theta} \right) + \frac{g \cdot \sin \theta}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \theta}{g \cdot \cos \theta} \right)^2 \\
 R &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \theta}{g} + \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
 R &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \theta}{g} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\
 R &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \theta}{g} \left(\frac{\overset{=1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta} \right) \\
 R &= \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \theta}{g \cdot \cos^2 \theta}
 \end{aligned}$$

$$R \cdot g \cdot (1 - \sin^2 \theta) = 2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \theta$$

$$R \cdot g \cdot \sin^2 \theta + 2v_0^2 \cdot \sin \theta - R \cdot g = 0$$

$$\sin \theta = \frac{-2v_0^2 \pm \sqrt{(2v_0^2)^2 - 4 \cdot (R \cdot g) \cdot (-R \cdot g)}}{2 \cdot (R \cdot g)}$$

Como é esperado um ângulo cujo seno seja positivo, temos que:

$$\sin \theta = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^4 + R^2 \cdot g^2}}{R \cdot g}$$

$$\boxed{\theta = \arcsin \left(\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R \cdot g} \right)^2 + 1} - \frac{v_0^2}{R \cdot g} \right)}$$

b)

Como utilizado no item a), já sabemos o tempo de voo, pois conhecemos o valor do ângulo θ , calculado em função dos parâmetros conhecidos (v_0 , R e g). Então:

$$\boxed{t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \theta}{g \cdot \cos \theta}}$$

c)

Não podemos determinar a velocidade angular apenas conhecendo θ e t_{voo} , pois não sabemos o número de voltas n que o anel realizou até ser atingido. Portanto, a velocidade angular pode ser dada por:

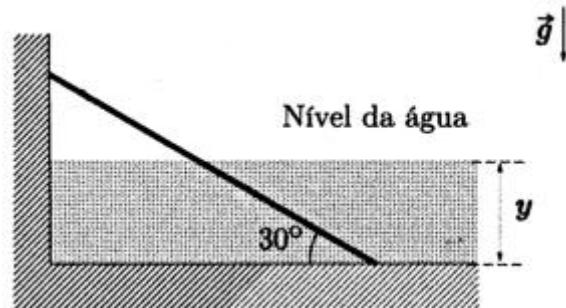
$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\theta + 2\pi \cdot n}{\Delta t}, n \in \mathbb{Z}_+$$



Gabarito: a) $\theta = \arcsen \left(\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R \cdot g} \right)^2 + 1} - \frac{v_0^2}{R \cdot g} \right)$ b) $t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sen \theta}{g \cdot \cos \theta}$ c) $\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\theta + 2\pi \cdot n}{\Delta t}, n \in \mathbb{Z}_+$

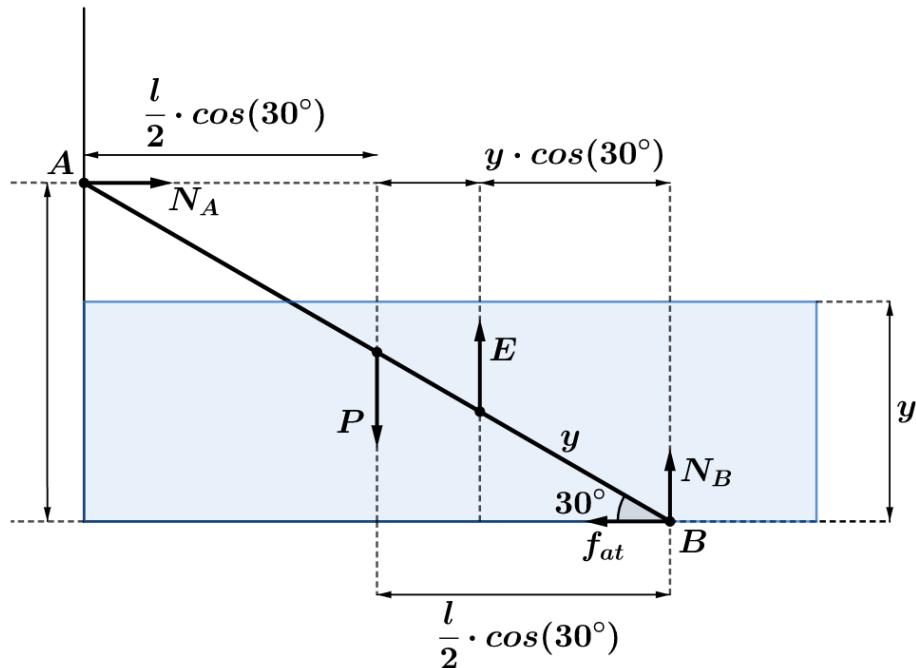
2. (ITA – 2020)

Uma prancha retangular de espessura uniforme, 5,0 m de comprimento, 1,5 g/cm³ de densidade e 10 kg de massa homogeneamente distribuída, é parcialmente submersa na piscina ilustrada na figura, em cuja parede (lisa) se apoia, formando um ângulo de 30° com o piso horizontal, cujo coeficiente de atrito com a prancha é 0,6 $\sqrt{3}$. Determine para quais alturas y do nível de água a prancha permanece em equilíbrio estático nessa posição.



Comentários:

Representando as forças que agem na barra, temos:



A área da secção transversal da prancha é dada por:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 1,5 \cdot 10^3 = \frac{10}{A \cdot 5} \Rightarrow A = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Logo, o empuxo é expresso por:



$$E = \rho_{Liq} \cdot V_{submerso} \cdot g$$

$$E = 10^3 \cdot (A \cdot 2y) \cdot 10$$

$$E = 10^3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 2y \right) \cdot 10$$

$$E = \frac{80}{3} \cdot y N$$

Pelo equilíbrio das forças na vertical, temos:

$$N_B + E = P$$

$$N_B = 100 - \frac{80}{3} \cdot y$$

Pelo equilíbrio rotacional no ponto B , temos:

$$\vec{\tau}_B = \vec{0}$$

$$N_A \cdot 2,5 + E \cdot \frac{y\sqrt{3}}{2} = P \cdot \frac{2,5\sqrt{3}}{2}$$

$$f_{at} \cdot 2,5 + \left(\frac{80}{3} \cdot y \right) \cdot \frac{y\sqrt{3}}{2} = 100 \cdot \frac{2,5\sqrt{3}}{2}$$

$$f_{at} = 50\sqrt{3} - \frac{16\sqrt{3}}{3}y^2$$

Mas, $f_{at} \leq \mu \cdot N_B$, então:

$$50\sqrt{3} - \frac{16\sqrt{3}}{3}y^2 \leq 0,6\sqrt{3} \cdot \left(100 - \frac{80}{3}y \right)$$

$$8y^2 - 24y + 15 \geq 0$$

Portanto:

$$y \geq \frac{6 + \sqrt{6}}{4} \text{ ou } y \leq \frac{6 - \sqrt{6}}{4}$$

Mas como y como quando $y = 0$, pois ainda é possível o equilíbrio do sistema mesmo sem a presença de água, temos:

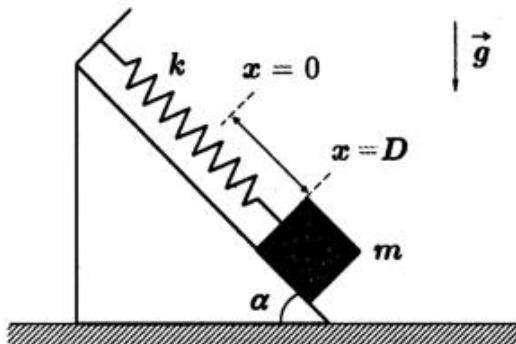
$$0 \leq y \leq \frac{6 - \sqrt{6}}{4} \text{ m ou } y \geq \frac{6 + \sqrt{6}}{4}$$



Gabarito: $0 \leq y \leq \frac{6-\sqrt{6}}{4} m$ ou $y \geq \frac{6+\sqrt{6}}{4}$

3. (ITA – 2020)

Uma mola de constante elástica k é presa a um bloco de massa m sobre um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal, onde interage entre superfícies um atrito de coeficiente μ . Com o bloco deslocado forçadamente para baixo, a mola é distendida até um comprimento $x = D$ da sua posição $x = 0$, quando livre em seu comprimento natural. A partir do repouso, o bloco é então liberado e se inicia um movimento oscilatório. Pedem-se:



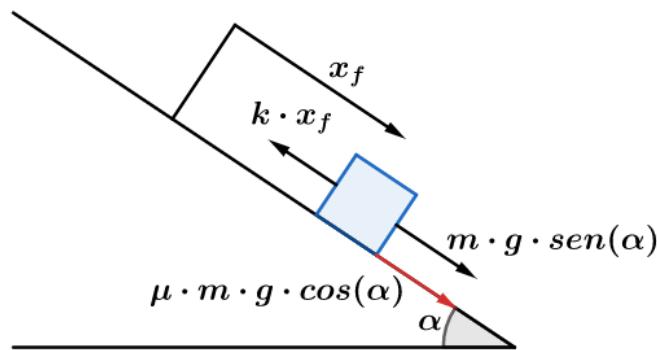
- as possíveis posições finais x_f de parada do bloco após cessar o movimento oscilatório, em função das grandezas intervenientes.
- o gráfico da quantidade de movimento p do bloco em função da coordenada x , considerando o intervalo de tempo compreendido entre o início do movimento e o instante de sua primeira parada.

Comentários:

a)

Considerando que $\mu_{cinético} = \mu_{estático} = \mu$, após cessar o movimento oscilatório, as possíveis posições de parada ocorrem quando há equilíbrio de forças. Assim, temos algumas possíveis posições de equilíbrio:

1) posição de parada em que há tendência de o bloco subir:



Para a condição de subida, temos:

$$F_{elás} > m \cdot g \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \Rightarrow k \cdot x_f > m \cdot g \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$



$$x_f > \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k}$$

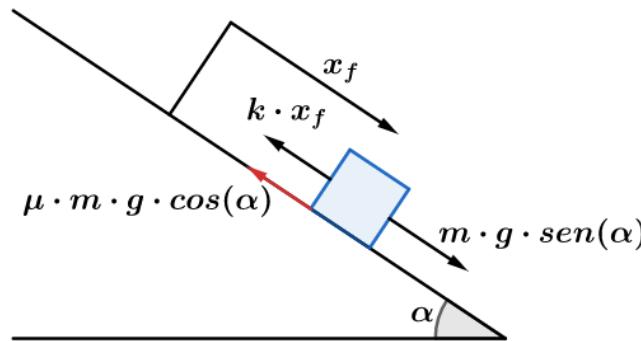
Para o equilíbrio de forças, vem:

$$k \cdot x_f - m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = f_{at} \leq \mu \cdot N$$

$$k \cdot x_f - m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \leq \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

$$x_f \leq \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k}$$

2) posição de parada em que há tendência de o bloco descer:



Para a condição de descida, temos:

$$k \cdot x_f < m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$x_f < \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k}$$

Pelo equilíbrio de forças, temos:

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - k \cdot x_f = f_{at} \leq \mu \cdot N$$

$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - k \cdot x_f \leq \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

$$x_f \geq \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}{k}$$

3) posição sem tendência de movimento:

$$k \cdot x_f = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$x_f = \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k}$$

Dante desses possíveis valores, temos o seguinte intervalo:



$$\frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}{k} \leq x_f \leq \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k}$$

b)

Considerando como nível de referência na posição $x = D$, temos que:

$$E_1 = E_{elás} = \frac{k \cdot D^2}{2}$$

Tomando agora uma posição genérica x , temos:

$$E_2 = E_{pg} + E_{cín} + E_{elás} = m \cdot g \cdot (D - x) \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2}$$

Pelo teorema do trabalho e energia, temos:

$$E_2 - E_1 = \tau_{fnc}$$

$$m \cdot g \cdot (D - x) \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot \left(\frac{p}{m}\right)^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} - \frac{k \cdot D^2}{2} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) (D - x)$$

$$p = \pm \sqrt{-k \cdot m \cdot x^2 - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + k \cdot D^2 \cdot m}$$

Note que ao soltar o corpo da posição D , a quantidade de movimento do corpo está no sentido contrário a orientação adotada. Portanto:

$$p = -\sqrt{-k \cdot m \cdot x^2 - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + k \cdot D^2 \cdot m}$$

Podemos determinar os dois pontos de parada, isto é, quantidade de movimento nulo:

$$-k \cdot m \cdot x^2 - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + k \cdot D^2 \cdot m = 0$$

$$k \cdot m \cdot (D^2 - x^2) - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = 0$$

$$k \cdot m \cdot (D - x) \cdot (D + x) - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = 0$$

$$(D - x) \cdot [k \cdot m \cdot (D + x) - 2m^2 \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha))] = 0$$

$$x = D \text{ ou } x = \frac{2m \cdot g}{k} [\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] - D$$

Podemos desenvolver a equação de p para determinar a curva descrita por $p(x)$:

$$p = -\sqrt{-k \cdot m \cdot x^2 - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + k \cdot D^2 \cdot m}$$



$$p^2 = -k \cdot m \cdot x^2 - 2m^2 \cdot g \cdot (D - x) \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) + k \cdot D^2 \cdot m$$

$$p^2 + k \cdot m \cdot x^2 - 2m^2 \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \cdot x + 2m^2 \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \cdot D - k \cdot D^2 \cdot m = 0$$

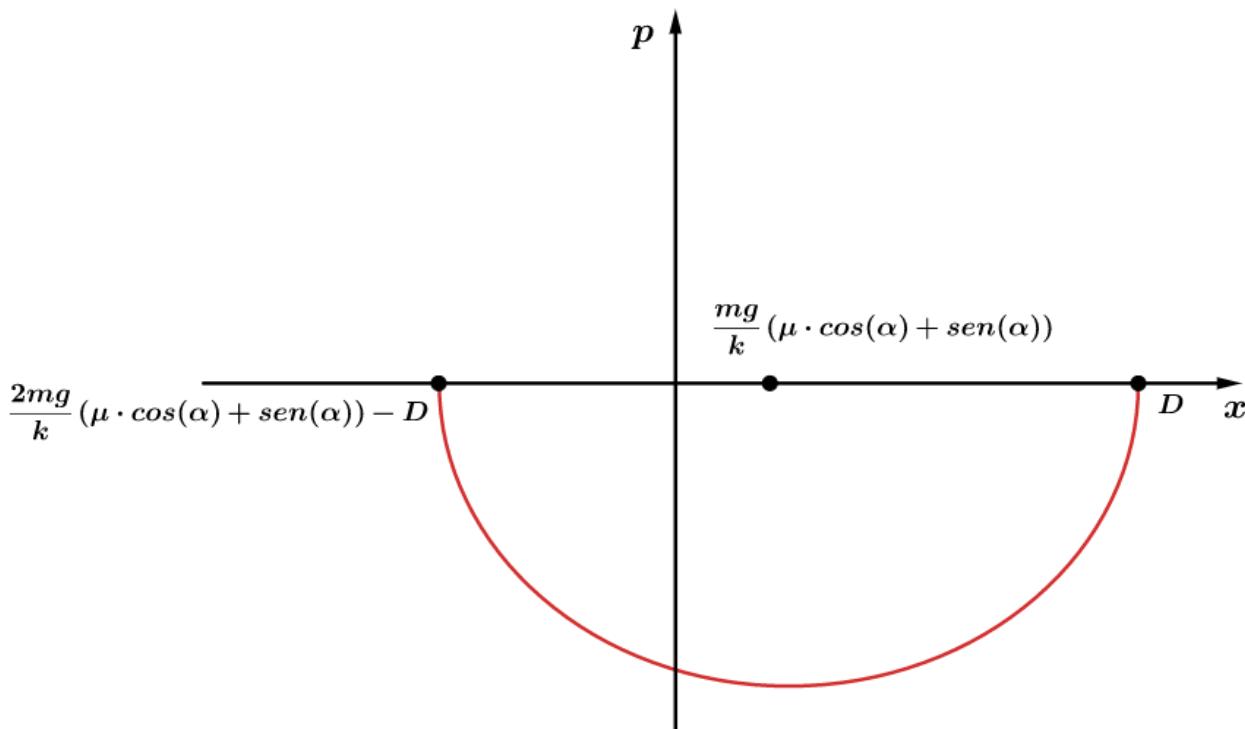
Completando quadrados, temos:

$$p^2 + \left(\sqrt{k \cdot m} \cdot x - \frac{m^{\frac{3}{2}} \cdot g}{\sqrt{k}} \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \right)^2 = \underbrace{\frac{m^3 \cdot g^2}{k} (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + k \cdot D^2 \cdot m}_{cte}$$

$$p^2 + (k \cdot m) \cdot \left(x - \frac{\frac{m^{\frac{3}{2}} \cdot g}{\sqrt{k}} \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha))}{\sqrt{k \cdot m}} \right)^2 = \underbrace{\frac{m^3 \cdot g^2}{k} (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + k \cdot D^2 \cdot m}_{cte}$$

$$\frac{p^2}{cte} + \frac{\left(x - \frac{m \cdot g}{k} \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \right)^2}{\frac{cte}{k \cdot m}} = 1$$

Equação característica de uma elipse, mas para o nosso caso, até a parada do corpo, temos apenas uma semi-elipse com centro em $\left(\frac{m \cdot g}{k} \cdot (\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)); 0\right)$. Graficamente:



Gabarito: a) $\frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}{k} \leq x_f \leq \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k}$ b) ver gráfico

4. (ITA – 2020)



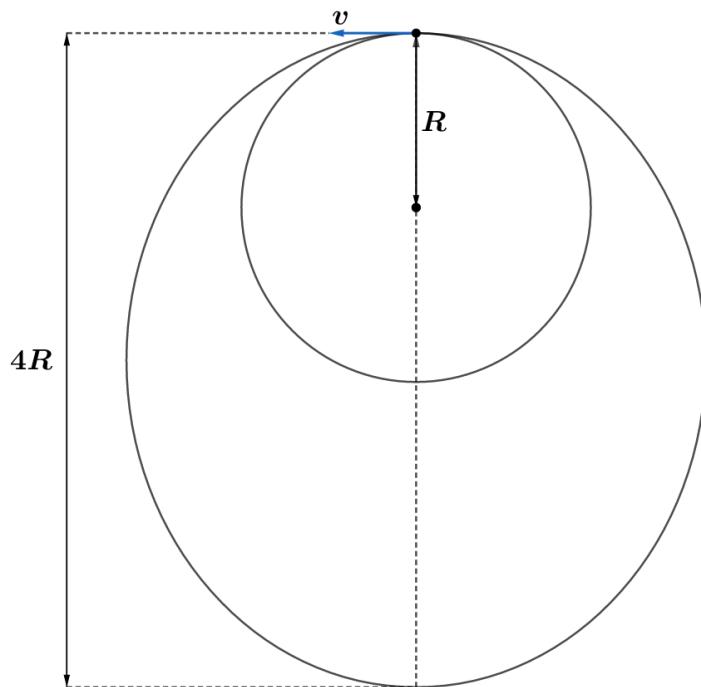
Um planeta esférico de massa M e raio R gira com velocidade angular constante ao redor de seu eixo norte-sul. De um ponto de sua linha equatorial é lançado um satélite artificial de massa $m \ll M$ sob ação de seus propulsores, que realizam um trabalho W . Em consequência, o satélite passa a descrever uma órbita elíptica em torno do planeta, com semieixo maior $2R$. Calcule:

- A excentricidade máxima da órbita do satélite para que este complete uma volta ao redor do planeta.
- O período de rotação do planeta, levando em conta as grandezas intervenientes, inclusive a constante universal da gravitação G .

Comentários:

a)

Como o satélite descreve uma órbita elíptica ao redor do planeta, sabemos que o planeta estará em um dos focos da órbita elíptica e para que o satélite consiga dar uma volta completa, a única órbita permitida (com vista de topo) é dada por:



Logo, podemos escrever o periastro como sendo:

$$r = a \cdot (1 + e \cdot \cos \theta)$$

$$r_p = a \cdot (1 - e)$$

$$R = 2R \cdot (1 - e)$$



$$\frac{1}{2} = 1 - e$$

$$e = \frac{1}{2}$$

b)

Admitindo que, no início, o satélite está com a velocidade tangencial do planeta no equador, vem:

$$E_{mec}^{inicial} + W = E_{mec}^{final}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} + W = -\frac{G \cdot M \cdot m}{4R}$$

$$\frac{(\omega \cdot R)^2}{2} = \frac{3 \cdot G \cdot M}{4R} - \frac{W}{m}$$

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{T} \cdot R\right)^2}{2} = \frac{3 \cdot G \cdot M}{4R} - \frac{W}{m}$$

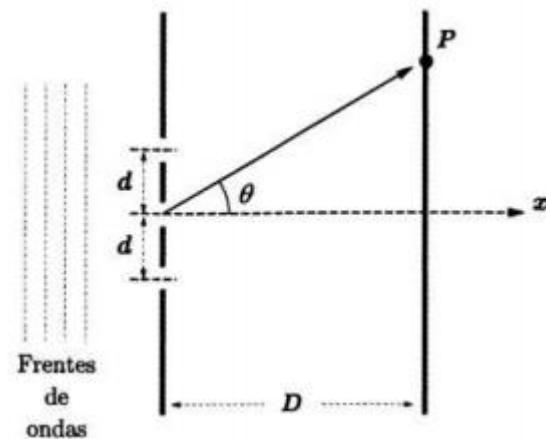
$$T = \sqrt{\frac{8\pi^2 \cdot R^3}{3 \cdot G \cdot M - 4 \cdot \frac{W}{m} \cdot R}}$$

Gabarito: a) 0,5 b) $T = \sqrt{\frac{8\pi^2 \cdot R^3}{3 \cdot G \cdot M - 4 \cdot \frac{W}{m} \cdot R}}$

5. (ITA – 2020)

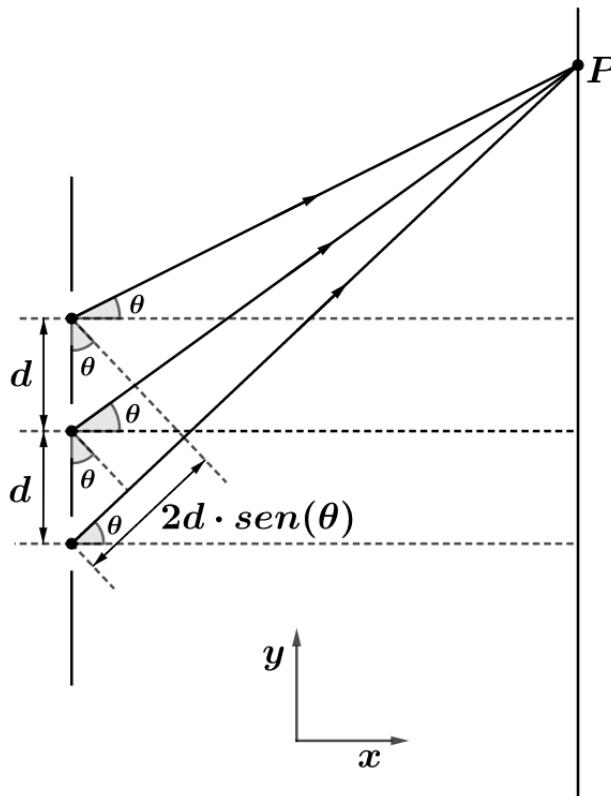
Frentes de ondas planas de luz, de comprimento de onda λ , incidem num conjunto de três fendas, com a do centro situando-se a uma distância d das demais, conforme ilustra a figura. A uma distância $D \gg d$, um anteparo registra o padrão de interferência gerado pela difração da onda devido às fendas. Calcule:

- (a) A razão entre a intensidade da franja clara central e a das franjas claras vizinhas.
- (b) Os ângulos θ_n para os quais ocorrem franjas escuras.



Comentários:

Esquematicamente, temos:



Como $d \ll D$, consideramos os ângulos entre os raios de onda difratados e a horizontal iguais a θ . Após a difração, podemos considerar um sistema formado por 3 fontes com diferentes fases e mesmo λ . A onda emitida por cada uma tem equação do tipo:

$$A_1 = A \cdot \sin(\omega \cdot t), A_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot t - \Delta\phi), A_3 = A \cdot \sin(\omega \cdot t - 2 \cdot \Delta\phi)$$

Em que:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$$

A onda resultante é dada pela superposição das ondas:

$$A_{res} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_{res} = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + A \cdot \sin(\omega \cdot t - \Delta\phi) + A \cdot \sin(\omega \cdot t - 2 \cdot \Delta\phi)$$

$$A_{res} = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}\right) \left[1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}\right) \right]$$

Para o primeiro máximo, temos:



$$\frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$$A_{res_1} = A \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}\right)$$

E o máximo central é dado por:

$$A_{res} = 3 \cdot A \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}\right)$$

Como a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude, temos que:

$$\frac{I_1}{I_{máx}} = \left(\frac{A_{res_1}}{A_{máx}}\right)^2$$

$$\frac{I_1}{I_{máx}} = \left(\frac{A}{3A}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

b)

Os mínimos ocorrem quando:

$$1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{3d} + \frac{\lambda k}{d}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{3d} + \frac{\lambda k}{d}\right), k \in \mathbb{Z}$$

Além disso:

$$\frac{2\pi \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\theta) = \frac{2\lambda}{3d} + \frac{\lambda k}{d}, k \in \mathbb{Z}$$

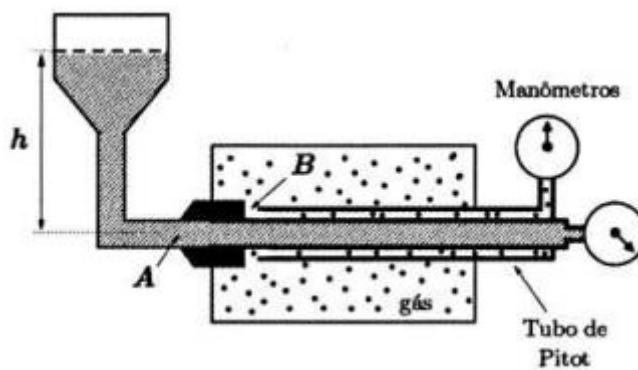
$$\theta = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{3d} + \frac{\lambda k}{d}\right), k \in \mathbb{Z}$$



Gabarito: a) 1/9 b) $\theta = \arcsen\left(\frac{\lambda}{3d} + \frac{\lambda k}{d}\right), k \in \mathbb{Z}$ ou $\theta = \arcsen\left(\frac{2\lambda}{3d} + \frac{\lambda k}{d}\right), k \in \mathbb{Z}$

6. (ITA – 2020)

Considere um dispositivo desenvolvido para simular condições de voo em que operam tubos de Pitot para a medição da velocidade de aeronaves. A pressão de estagnação P_A dá-se na entrada A do Pitot, onde se acopla um tubo contendo água cuja superfície livre encontra-se a $h = 60\text{ cm}$ de altura no interior de um recipiente fechado sujeito a um vácuo parcial de $9,0 \cdot 10^4\text{ Pa}$. Por sua vez, a pressão estática P_B dá-se na entrada B do corpo do tubo de Pitot, imerso numa câmara fechada contendo mols de gás ideal a $T = 27^\circ\text{C}$ que ocupa um volume total de 125 l . Sendo $\rho = 1,2\text{ kg/m}^3$ a densidade do ar atmosférico, calcule, em km/h , o valor a ser registrado por um velocímetro de aeronave que se baseia na leitura dos manômetros acoplados ao sistema ilustrado abaixo.



Comentários:

O gás em B possui pressão igual a:

$$P_B \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$P_B \cdot 125 \cdot 10^{-3} = \frac{75}{16} \cdot 8 \cdot (273 + 27)$$

$$P_B = 90 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Por outro lado, a pressão de entrada em A é de:

$$P_A = 9 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0,6$$

$$P_A = 96 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

Pela equação de Bernoulli, temos:

$$P_A = P_B + \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

$$96 \cdot 10^3 = 90 \cdot 10^3 + 10^3 \cdot \frac{v^2}{2}$$



$$v = 100 \text{ m/s}$$

$$v = 360 \text{ km/h}$$

Gabarito: 360 km/h

7. (ITA – 2020)

De uma altura de 52,5 m é solto um frasco indeformável contendo um gás monoatômico formado de partículas com massa de $4,20 \cdot 10^{-24} \text{ g}$, e de calor específico a volume constante igual a $1,25 \text{ cal/g°C}$. Ao atingir o solo, a energia cinética do sistema é dissipada na forma de calor no próprio gás. Para uma temperatura inicial do gás de 16°C , determine a variação da velocidade quadrática média das partículas do gás devida à queda. Se necessário, use a aproximação binomial $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $|x| \ll 1$. Desconsidere a massa do frasco.

Comentários:

Como mencionado no enunciado, ao atingir o solo, a energia cinética do sistema é dissipada na forma de calor no próprio gás, mas essa energia cinética é advinda da energia potencial gravitacional inicial do corpo, que estava a 52,5 m do solo. Portanto:

$$m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta T = \frac{g \cdot h}{c}$$

$$\Delta T = \frac{10 \cdot 52,5}{4,2 \cdot 1,25 \cdot 10^3} = 0,100^\circ\text{C}$$

Da teoria, sabemos que a velocidade quadrática média é dada por:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}}$$

Portanto, a variação da velocidade rms é expressa por:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot (T + \Delta T)}{m}} - \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}}$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}} \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}} - 1 \right)$$



Como Δt é pequeno e o termo $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$, então vamos utilizar a aproximação binomial:

$$\sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T}} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta T}{T}$$

Logo:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta T}{T} - 1\right)$$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B}{m \cdot T}} \cdot \frac{\Delta T}{2}$$

Substituindo valores, lembrando que alguns dados estão fornecidos na capa da prova, vem:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23}}{4,2 \cdot 10^{-27} \cdot 289}} \cdot \frac{0,100}{2}$$

$$\boxed{\Delta v = 0,294 \text{ m/s}}$$

Gabarito: $\Delta v = 0,294 \text{ m/s}$

8. (ITA – 2020)

Um capacitor 1 de placas paralelas está submetido a uma d.d.p. $V_1 = 12 \text{ V}$, e um capacitor 2, idêntico ao primeiro, a uma d.d.p. V_2 . Um elétron em repouso parte do ponto P , atravessa um orifício no primeiro capacitor e adentra o segundo através de outro orifício, a 60° em relação à placa, conforme indica a figura. Desconsiderando a ação da gravidade, determine a d.d.p. V_2 para que o elétron tangencie a placa superior do capacitor 2.

Comentários:

Pelo teorema da energia cinética, podemos determinar a velocidade do corpo ao sair da região definida pelo capacitor 1:

$$\tau_{fel} = \Delta E_C$$

$$q \cdot V_1 = \frac{m \cdot v_e^2}{2} - 0$$



$$q \cdot V_1 = \frac{m \cdot v_e^2}{2} \quad (\text{eq. 1})$$

Como ele considera desprezível a ação da gravidade, então o corpo chega com v_e na nova região definida pelo capacitor 2, mas com o ângulo de 60° . Assim, podemos decompor a velocidade nas direções normal e tangencial as placas do capacitor 2. Note que na direção tangencial não há forças atuando, portanto, não há variação da velocidade nesta direção. Por outro lado, temos a ação de uma força elétrica freando o elétron, devido a orientação do campo, definida pela diferença de potencial aplicada nas placas.

Portanto, podemos novamente aplicar o teorema da energia cinética:

$$\tau_{Fel} = \Delta E_C$$

$$-q \cdot V_2 = \frac{m \cdot v_{y_{final}}^2}{2} + \frac{m \cdot v_{x_{final}}^2}{2} - \left(\frac{m \cdot v_{y_{inicial}}^2}{2} + \frac{m \cdot v_{x_{inicial}}^2}{2} \right)$$

Com:

$$\frac{m \cdot v_{x_{final}}^2}{2} = \frac{m \cdot v_{x_{inicial}}^2}{2}$$

Então:

$$-q \cdot V_2 = \frac{m \cdot v_{y_{final}}^2}{2} - \frac{m \cdot v_{y_{inicial}}^2}{2}$$

Para que ele tangencie a placa superior do capacitor 2, temos que $v_{y_{final}} = 0$:

$$\begin{aligned} -q \cdot V_2 &= -\frac{m \cdot v_{y_{inicial}}^2}{2} \\ q \cdot V_2 &= \frac{m \cdot (v_e \cdot \sin^2(60^\circ))^2}{2} \\ q \cdot V_2 &= \frac{m \cdot v_e^2}{2} \cdot \sin^2(60^\circ) \end{aligned}$$

Pela equação 1, temos:

$$q \cdot V_2 = \underbrace{\frac{m \cdot v_e^2}{2}}_{q \cdot V_1} \cdot \sin^2(60^\circ)$$



$$q \cdot V_2 = q \cdot V_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$V_2 = \frac{3}{4} \overset{12\text{ V}}{\tilde{V}_1}$$

$$\boxed{V_2 = 9\text{ V}}$$

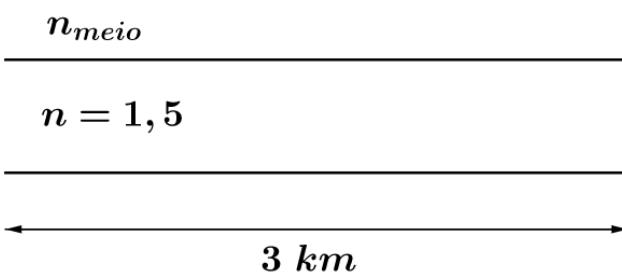
Gabarito: 9 V

9. (ITA – 2020)

Um sinal luminoso propaga-se no interior de uma fibra óptica retilínea de comprimento $L = 3,00\text{ km}$, feita de um material com índice de refração igual a 1,50. Considere que a luz no interior da fibra é guiada por meio de sucessivas reflexões internas totais. Sendo a velocidade da luz no vácuo igual a $3,00 \cdot 10^5\text{ km/s}$, calcule o tempo de propagação do sinal de ponta a ponta

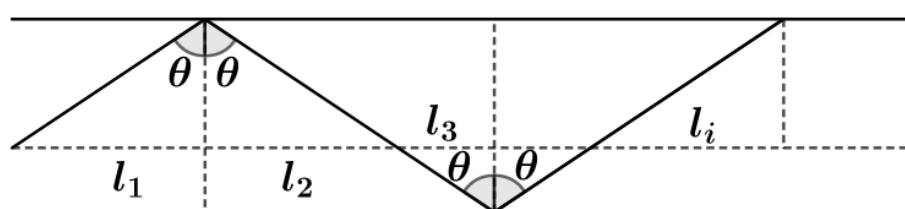
- (a) se a fibra estiver envolta de ar;
- (b) se o núcleo da fibra estiver envolvido por um revestimento feito de material com índice de refração de 1,45.

Comentários:



a)

Esquematicamente:



Em que:



$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_i = 3 \cdot 10^3 \text{ m}$$

Pela lei da reflexão total, temos:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{n_{meio}}{n_{fibra}}$$

Da geometria, a distância percorrida pelo raio é dada por:

$$d_i = \frac{l_i}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Portanto:

$$\underbrace{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_i}_{v_{luz} \cdot \Delta t} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_i}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Logo:

$$v_{luz} \cdot \Delta t = \frac{3 \cdot 10^3}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

A velocidade da luz na fibra é dada por:

$$v_{luz} = \frac{c}{n_{fibra}}$$

$$\frac{c}{n_{fibra}} \cdot \Delta t = \frac{3 \cdot 10^3}{\frac{n_{meio}}{n_{fibra}}}$$

$$\Delta t = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot n_{fibra}^2}{c \cdot n_{meio}}$$

a)

Para as condições deste item, temos:

$$\Delta t = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 10^8 \cdot 1}$$

$$\boxed{\Delta t = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ s}}$$

b)

Note que para um meio onde $n_{meio} = 1,45 < n_{fibra} = 1,5$ ainda temos reflexão total.

Portanto:



$$\Delta t = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 1,5^2}{3 \cdot 10^8 \cdot 1,45}$$

$$\boxed{\Delta t = 1,55 \cdot 10^{-5} \text{ s}}$$

Gabarito: a) $2,25 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ b) $1,55 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

10. (ITA – 2020)

Raios cósmicos interagem com átomos da atmosfera e produzem partículas instáveis X . Por meio de experimentos, constata-se que X decai em uma partícula Y e em um neutrino ν , conforme a equação de decaimento $X \rightarrow Y + \nu$. Considerando desprezível a massa de repouso do neutrino e X inicialmente em repouso, determine a velocidade da partícula Y em termos de c e das massas de X e de Y .

Comentários:

Pela conservação de energia, temos:

$$E_X = E_Y + E_\nu$$

E a conservação da quantidade de movimento é dada por:

$$0 = p_Y - p_\nu$$

$$p_Y = p_\nu$$

Da equação fundamental da dinâmica relativística, temos:

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4 \Rightarrow \begin{cases} E_X^2 = p_X^2 \cdot c^2 + m_X^2 \cdot c^4 \\ E_Y^2 = p_Y^2 \cdot c^2 + m_Y^2 \cdot c^4 \\ E_\nu^2 = p_\nu^2 \cdot c^2 + m_\nu^2 \cdot c^4 \end{cases}$$

Em que $p_X = 0$, já que X estava em repouso. A massa do neutrino é desprezível, isto é, $m_\nu = 0$. Portanto:

$$p_Y = p_\nu$$

$$E_Y^2 - m_Y^2 \cdot c^4 = E_\nu^2$$

$$E_\nu = \sqrt{E_Y^2 - m_Y^2 \cdot c^4}$$

Pela conservação da energia, vem:



$$E_Y + \sqrt{E_Y^2 - m_Y^2 \cdot c^4} = E_X = m_X \cdot c^2$$

$$E_Y = \frac{(m_X^2 + m_Y^2)c^2}{2m_X}$$

Mas, $E_Y^2 = p_Y^2 \cdot c^2 + m_Y^2 \cdot c^4$, temos:

$$p_Y^2 \cdot c^2 = \left(\frac{(m_X^2 + m_Y^2)c^2}{2m_X} \right)^2 - m_Y^2 \cdot c^4$$

$$p_Y^2 = \frac{(m_X^2 - m_Y^2)^2 c^2}{4m_X^2}$$

Como $p_Y = (m_Y \cdot \gamma) \cdot v_Y$, vem:

$$((m_Y \cdot \gamma) \cdot v_Y)^2 = \frac{(m_X^2 - m_Y^2)^2 c^2}{4m_X^2}$$

$$\left[\left(m_Y \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_Y^2}{c^2}}} \right) \cdot v_Y \right]^2 = \frac{(m_X^2 - m_Y^2)^2 \cdot c^2}{4m_X^2}$$

$$4 \cdot m_Y^2 \cdot m_X^2 = (m_X^2 - m_Y^2)^2 \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{v_Y^2}{c^2} \right)$$

$$v_Y = \left(\frac{m_X^2 - m_Y^2}{m_X^2 + m_Y^2} \right) \cdot c$$

Gabarito: $v_Y = \left(\frac{m_X^2 - m_Y^2}{m_X^2 + m_Y^2} \right) \cdot c$



