



**IME 2019/2020**

*Física*

Professor Toni Burgatto

# Sumário

1 - Considerações iniciais .....	3
2 - Lista de questões .....	4
3 - Gabarito das questões sem comentários .....	13
4 - Questões resolvidas e comentadas .....	14
QUESTÃO 01 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	14
QUESTÃO 02 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	16
QUESTÃO 03 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	18
QUESTÃO 04 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	23
QUESTÃO 05 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	27
QUESTÃO 06 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	31
QUESTÃO 07 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	33
QUESTÃO 08 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	35
QUESTÃO 09 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	39
QUESTÃO 10 - (2019/2020/IME 2ª FASE).....	42



## 1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Olá, aluno. Seja bem-vindo!

Fazemos parte do **Estratégia Vestibulares**! Somos parte de uma equipe composta por 15 professores de todo o país, reunida com o objetivo de ajudar estudantes como você, que buscam êxito no vestibular IME!

Diante de tantas opções de cursos preparatórios para vestibulares no mercado, o que faz do nosso material uma boa opção? Primeiramente, fazemos parte do **Estratégia Concursos**, que desde 2011 se tornou referência pela qualidade de seus cursos preparatórios para concursos públicos, o que garantiu milhares de aprovados.

Para a elaboração de nosso material, partimos da mesma fórmula de sucesso adotada no ramo de concursos, da qual podemos destacar os seguintes pontos:

- ✓ **Aulas exclusivas e voltadas para o seu edital.** O nosso curso é cuidadosamente customizado para o vestibular da sua instituição.
- ✓ **Valorizar o aluno.** Como o nosso objetivo é garantir a sua aprovação em uma das melhores instituições de ensino do país, acreditamos que são necessárias metodologias diversas de aprendizado para que isso seja possível.
- ✓ **Valorizar o professor.** Somos uma equipe composta por integrantes com vasta experiência em ensino e pesquisa, totalmente voltada para a produção de um curso completo e atualizado.

Além disso, o Estratégia Vestibulares se dedicou a preparar um **material completo e atualizado**. Não se trata de disponibilizar pequenos resumos ou esquemas, mas verdadeiros livros digitais para orientar seus estudos.

Um dos diferenciais do Estratégia Vestibulares é a disponibilização de comentários de cada uma das questões, a fim de que não reste nenhuma dúvida sobre o gabarito ou sobre o conteúdo.

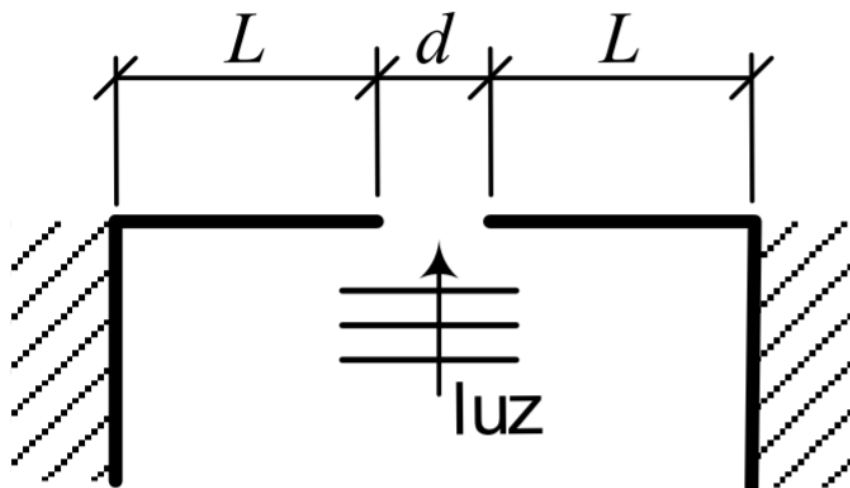
Para entender melhor do que estamos falando, disponibilizamos para você as **questões de Física da prova de 2ª fase IME 2019/2020**. Essa é uma pequena amostra do nosso curso, do qual você pode se informar melhor [clikando aqui](#).

Conte conosco em sua caminhada, e para ficar sabendo de todas as notícias relativas aos mais diversos vestibulares ocorrendo em nosso país, convidamos você a seguir as mídias sociais do Estratégia Vestibulares.



## 2 - LISTA DE QUESTÕES

### QUESTÃO 01 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



A figura mostra um sistema usado em um laboratório de física para demonstrar a difração de luz por uma fenda. A luz de um laser de comprimento de onda  $\lambda$  passa por uma fenda de largura  $d$ , formada pelo espaço entre as extremidades de duas barras de comprimento  $L$ . A outra extremidade de cada barra é mantida fixa. Depois de passar pela fenda, a luz incide em uma tela distante, na qual é observado um padrão de difração formado por regiões claras e escuras.

- Dado que na tela são observados exatamente 3 mínimos de intensidade luminosa em cada lado do máximo central de intensidade, determine o intervalo de valores da largura  $d$  da fenda que são compatíveis com essa observação.
- A temperatura do laboratório normalmente é mantida em  $24,0^\circ\text{C}$  por um aparelho de ar condicionado. Em um dia no qual o experimento foi realizado com o aparelho de ar condicionado desligado, observou-se na tela apenas 1 mínimo de intensidade luminosa em cada lado do máximo central de intensidade, o que foi atribuído à dilatação térmica das barras. Sabendo que o coeficiente de dilatação linear das barras é  $\alpha$ , determine o intervalo de temperaturas do laboratório, no dia em que o aparelho de ar condicionado foi desligado, que são compatíveis com essa observação.

Dados:

- comprimento de onda do laser:  $\lambda = 532\text{ nm}$ ;
- comprimento de cada barra a  $24,0^\circ\text{C}$ :  $L = 50\text{ cm}$ ;
- coeficiente de dilatação linear de cada barra:  $\alpha = 10^{-7}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

### QUESTÃO 02 - (2019/2020/IME 2ª FASE)

Um produtor rural constata que suas despesas mensais de eletricidade estão altas e decide contratar um pesquisador para que ele especifique formas alternativas de acionamento simultâneo de duas bombas empregadas para irrigação de suas lavouras. O pesquisador constata que, na fazenda, existe uma máquina refrigeradora que opera em um ciclo



termodinâmico, bem como outro dispositivo que atua como um ciclo motor e propõe a solução descrita a seguir:

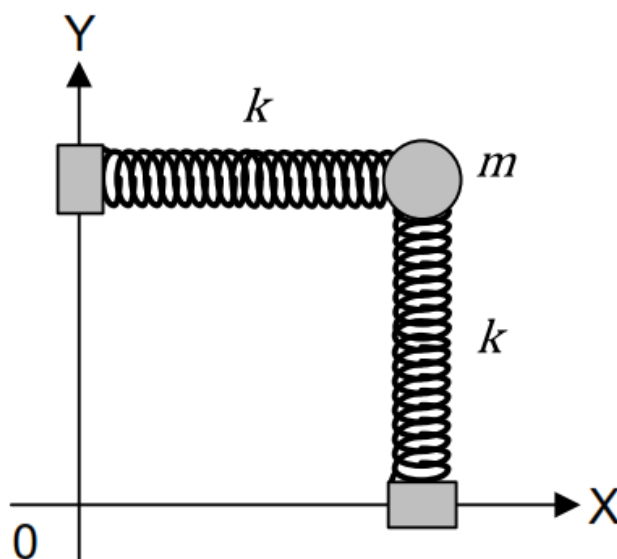
***“A potência disponibilizada pelo ciclo motor deverá ser integralmente utilizada para o acionamento da máquina refrigeradora e a energia rejeitada para o ambiente de ambos os dispositivos – de acordo com os seus cálculos – é mais do que suficiente para o acionamento simultâneo das duas bombas.”***

De acordo com os dados abaixo, determine se a solução encaminhada pelo pesquisador é viável, com base em uma análise termodinâmica da proposição.

**Dados:**

- temperatura do ambiente:  $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- temperatura no interior da máquina refrigeradora:  $-\frac{19}{3}\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- temperatura da fonte térmica referente ao ciclo motor:  $927\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- potência de cada bomba empregada na irrigação: 5 HP;
- estimativa da taxa de energia recebida pelo motor térmico:  $80\text{ kJ/min}$ ;
- $1\text{ HP} = \frac{3}{4}\text{ kW}$ .

**QUESTÃO 03 - (2019/2020/IME 2ª FASE)**



Uma partícula, inicialmente em repouso sobre o plano horizontal XY, está presa a duas molas idênticas, cada uma solidária em sua outra extremidade a um cursor que pode movimentar-se sobre seu respectivo eixo, como mostrado na figura. As molas são rígidas o suficiente para se deflexionarem apenas nas direções ortogonais de seus respectivos eixos aos quais estão presas. No instante  $t = 0$ , a partícula é puxada para o ponto de coordenadas  $\left(\frac{11}{10}L, \frac{12}{10}L\right)$  e é lançada com velocidade inicial  $\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\omega L, 0\right)$ .

Determine:



- a) as equações das componentes de posição, velocidade e aceleração da partícula nos eixos X e Y, em função do tempo;
- b) a área no interior da trajetória percorrida pela partícula durante o movimento.

Dados:

- massa da partícula:  $m$ ;
- constante elástica das molas:  $k$ ;
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;
- comprimento das molas não flexionadas:  $L$ .

Observações:

- o plano XY é totalmente liso;
- não há influência da gravidade no movimento da partícula;
- os cursores deslizam sem atrito pelos eixos;
- as coordenadas X e Y da partícula são sempre positivas.

#### QUESTÃO 04 - (2019/2020/IME 2ª FASE)

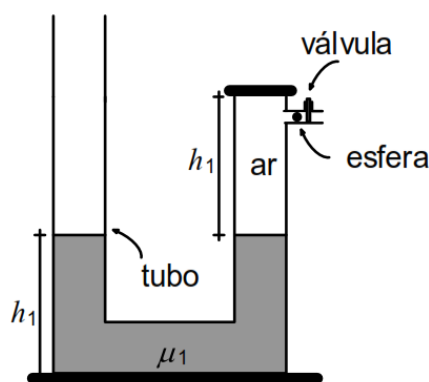


Figura 1

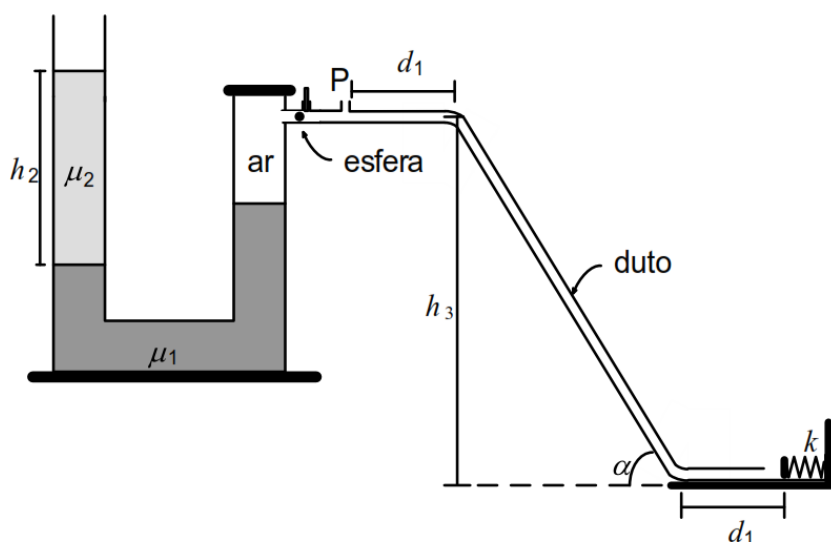


Figura 2

Um tubo rígido aberto nas extremidades, com seção reta de área constante, é preenchido com um fluido de massa específica  $\mu_1$  até alcançar a altura  $h_1$ . O tubo é lacrado em uma das extremidades, conforme ilustra a Figura 1, imediatamente acima de uma válvula, que se encontra fechada, de modo que a coluna de ar também tenha altura  $h_1$  e esteja com a mesma pressão atmosférica externa. A haste da válvula mantém presa uma esfera que se ajusta bem ao duto de saída, com seção reta  $S_d$  circular. Um segundo fluido, de massa específica  $\mu_2 < \mu_1$ , é lentamente colocado na extremidade aberta até formar uma coluna de altura  $h_2$ , conforme mostra a Figura 2. Em determinado instante, a válvula é subitamente aberta, liberando a esfera, que é impulsionada pelo ar comprimido por um breve intervalo de tempo  $\Delta t$ , até atingir



o ponto P. A esfera percorre o trajeto dentro do duto até alcançar uma mola, de constante elástica  $k$ , que se deforma  $\Delta x$ . Com relação à situação apresentada, determine:

a) a pressão da coluna confinada de ar, em  $N/m^2$ , supondo a temperatura constante, após a inserção do segundo fluido e antes da abertura da válvula.

b) a força de atrito média a partir do ponto P, em N, que age na esfera em sua trajetória até alcançar a mola.

**Observações:**

- considere constante a pressão que impulsiona a esfera durante seu movimento até o ponto P;
- após o ponto P, o interior do duto encontra-se à pressão atmosférica;
- não há força de atrito durante a compressão da mola;
- não há atrito no movimento da esfera entre a válvula e o ponto P.

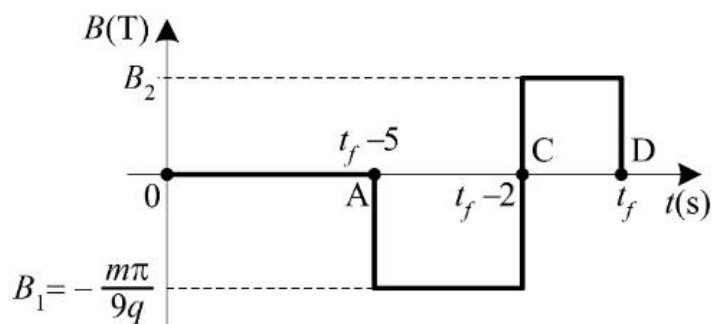
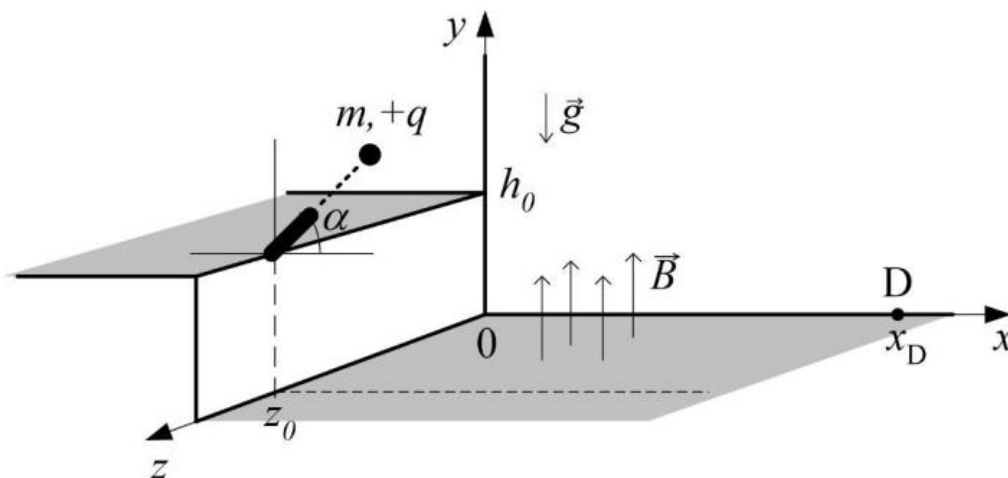
**Dados:**

- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;
- alturas:  $h_1 = 1 \text{ m}$ ;  $h_2 = 1,75 \text{ m}$ ; e  $h_3 = 4 \text{ m}$ ;
- ângulo  $\alpha = 30^\circ$ ;
- área da seção reta do duto:  $S_d = 1 \text{ cm}^2$ ;
- constante elástica da mola:  $k = 2000 \text{ N/m}$ ;
- deformação máxima da mola:  $= 2,5 \text{ cm}$ ;
- distância  $d_1 = 1 \text{ m}$ ;
- intervalo de tempo que a esfera é impulsionada:  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ ;
- massa da esfera:  $m = 50 \text{ g}$ ;
- massas específicas:  $\mu_1 = 2500 \text{ kg/m}^3$ ; e  $\mu_2 = 2.000 \text{ kg/m}^3$ ;
- pressão atmosférica local:  $P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$ .





## QUESTÃO 05 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Uma partícula de massa  $m$  e carga elétrica positiva  $+q$  é lançada obliquamente com inclinação  $t = 0$ , no plano  $z = z_0$ , a uma velocidade inicial  $v_0$  a partir da altura  $y = h_0$ , conforme ilustra a figura. Em determinado instante de sua trajetória, a partícula é submetida a um campo magnético uniforme  $\vec{B} = (0, B, 0)$ , cuja intensidade varia ao longo do tempo de acordo com o gráfico. Sabendo que  $t_f$  representa o instante em que a partícula encerra seu movimento no ponto D de coordenadas  $(x_D, 0, 0)$ , ao atingir o plano  $xz$ ; que A e C designam as posições da partícula, respectivamente, em  $t = t_f - 5$  s e  $t = t_f - 2$  s; e que a resistência do ar pode ser desprezada, responda o que se pede:

a) faça um esboço do gráfico da altura  $y$  da partícula versus o tempo  $t$ , desde seu lançamento até alcançar o ponto D, explicitando a altura máxima alcançada, a do ponto A e a do ponto C, com os correspondentes tempos; e

b) determine as coordenadas  $x_C$  e  $z_C$  do ponto C.

### Dados:

- plano de lançamento da partícula  $z = z_0 = 225\sqrt{3}/\pi$  m;
- aceleração da gravidade:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;
- velocidade inicial:  $v_0 = 100$  m/s;
- ângulo de lançamento da partícula:  $\alpha = 30^\circ$ ;
- altura inicial da partícula:  $h_0 = 280$  m.





### QUESTÃO 06 - (2019/2020/IME 2ª FASE)

Um feixe de luz monocromática de seção reta de área  $A$  vindo de um meio com índice de refração  $n_1 = 2$  incide na superfície de separação entre dois meios. O ângulo de incidência é igual a  $\theta_1 = 45^\circ$  em relação à normal de separação com o outro meio, cujo índice de refração é  $n_2$ . O feixe incidente separa-se em feixe refletido e feixe transmitido (refratado). Calcule o valor numérico do índice de refração  $n_2$ .

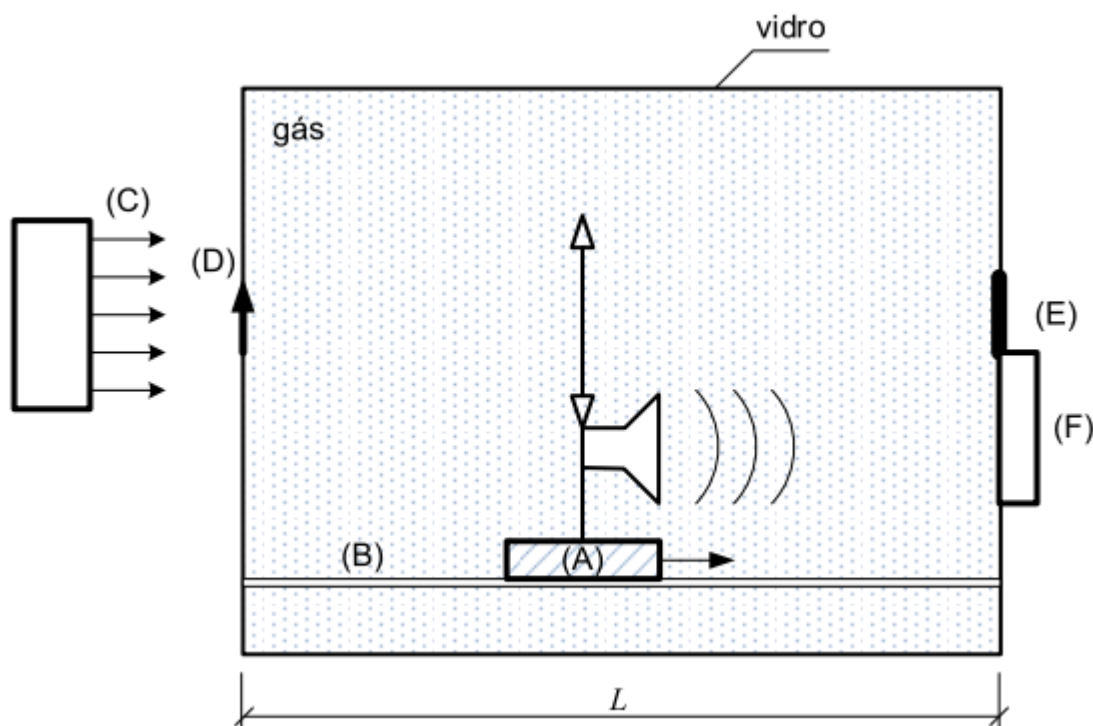
Dados:

- as intensidades dos feixes incidente, refletido e transmitido são iguais a  $I_i = 1$ ;  $I_r = 1/3$  e  $I_t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , respectivamente.

Observação:

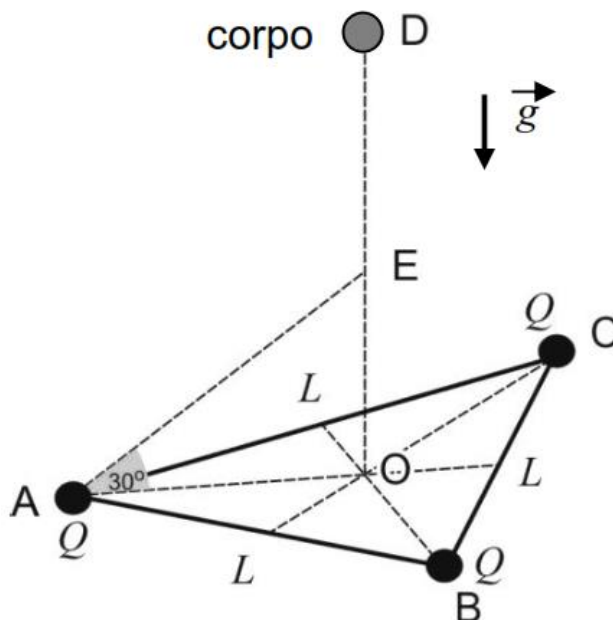
- despreze a energia absorvida.

### QUESTÃO 07 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Um recipiente de vidro contendo gás tem uma lente convergente e uma fonte sonora presas a um suporte (A) que desliza no trilho (B) a velocidade constante. Um feixe laser (C), que ilumina o objeto (D), forma imagens reais nítidas por duas vezes em (E), separadas por uma diferença de tempo  $\Delta t$ , sendo que, entre a formação dessas duas imagens, chegam  $n$  bips (pulsos sonoros de mesma duração) no detector (F) e  $n - 1$  bips são emitidos pela fonte sonora. Considerando que o comprimento do recipiente é  $L$  e a distância focal da lente é  $f$ , determine a velocidade do som no gás.

### QUESTÃO 08 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



A figura apresenta três esferas de cargas positivas  $Q$  fixas nos vértices de um triângulo equilátero  $ABC$  de centro  $O$  e localizado no plano horizontal. Um corpo de massa  $m$ , posicionado no ponto  $D$  em  $t = 0$ , tem a ele grudadas milhares de micropartículas de cargas positivas e massas desprezíveis. O corpo sofre uma queda vertical até o ponto  $O$ . No intervalo  $0 \leq t \leq 5/3 \text{ s}$ , diversas micropartículas vão se soltando gradativamente do corpo, de modo que sua velocidade permanece constante. O restante das micropartículas desprende-se totalmente em  $t = 5/3 \text{ s}$ , exatamente no ponto  $E$ , no qual o ângulo entre os segmentos  $AO$  e  $AE$  é de  $30^\circ$ . O corpo continua em movimento até atingir o plano  $ABC$  no ponto  $O$  em  $t = 8/3 \text{ s}$ . Determine:

- a velocidade do corpo no intervalo  $0 \leq t \leq 5/3 \text{ s}$ ;
- a altura inicial do corpo (comprimento  $DO$ ) em  $t = 0$ ;
- a carga do corpo imediatamente antes do instante  $t = 5/3 \text{ s}$ , quando o restante das micropartículas se desprende;
- a carga inicial do corpo em  $t = 0$ .

#### Observações:

- considere a massa do corpo constante;
- despreze as dimensões do corpo;
- ao se desprenderem, as cargas das micropartículas não influenciam no movimento do corpo.

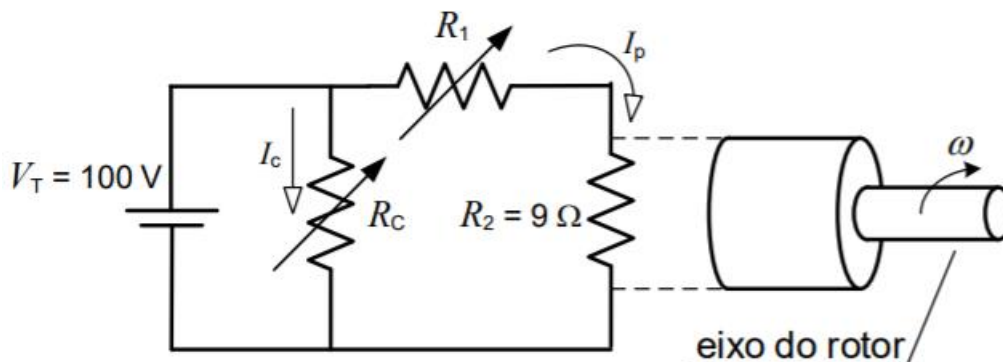
#### Dados:

- massa do corpo:  $m = 2,7 \text{ kg}$ ;
- cargas fixas nos vértices do triângulo:  $Q = 10^{-4} \text{ C}$ ;



- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;
- constante dielétrica do meio:  $k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ ;
- comprimentos dos lados do triângulo:  $L = 24 \text{ m}$ .

**QUESTÃO 09 - (2019/2020/IME 2ª FASE)**

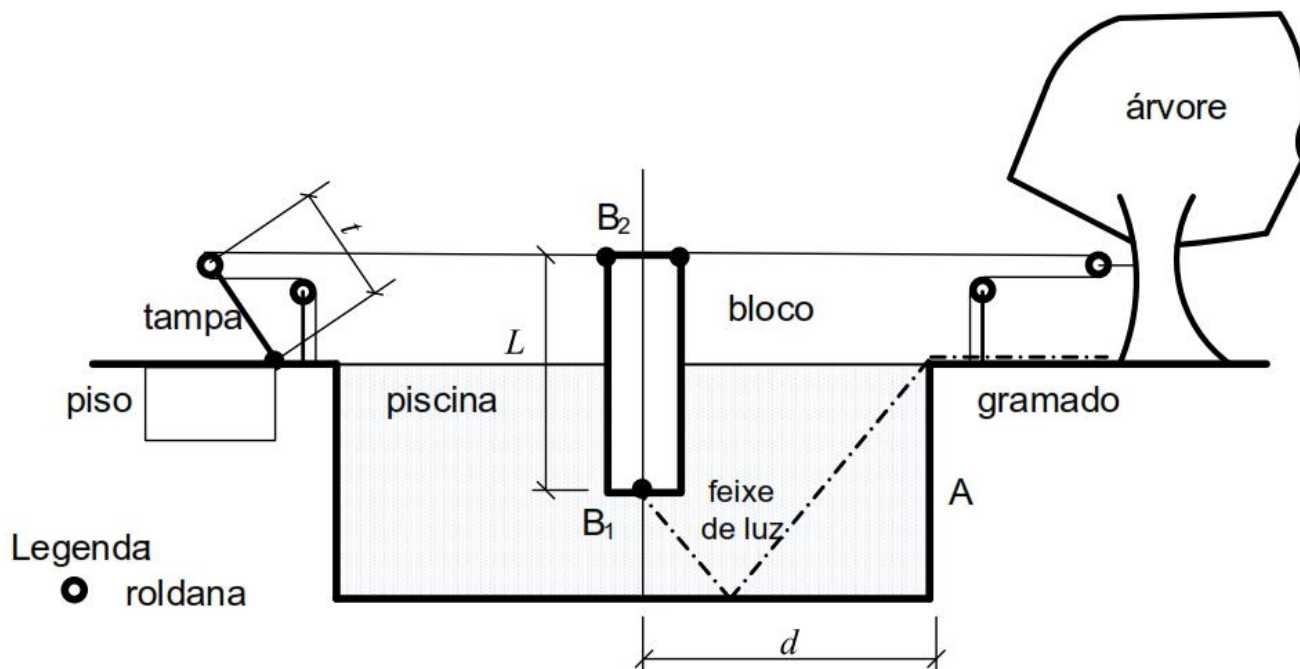


A figura mostra o diagrama esquemático de um conversor eletromecânico que transforma a energia elétrica de entrada, fornecida pela fonte  $V_T$ , em energia mecânica na saída, utilizada para acionar o eixo do rotor. Nesse conversor, toda a potência dissipada no resistor  $R_2$  é transformada em potência mecânica empregada para acionar o eixo. Sabendo que a velocidade angular do eixo é 1800 rpm, pede-se:

- o torque no eixo do conversor, considerando que os reostatos  $R_1$  e  $R_C$  estão ajustados em  $1 \Omega$  e em  $50 \Omega$ , respectivamente;
- a nova velocidade de rotação do eixo, em rpm, se o reostato  $R_1$  for ajustado para  $2 \Omega$  e  $R_C$  continuar ajustado em  $50 \Omega$ , sabendo que o torque no eixo do motor é proporcional ao produto das correntes  $I_c$  e  $I_p$ ;
- o que deve ser feito para que o torque desenvolvido pelo eixo, com  $R_1$  ajustado em  $2 \Omega$ , volte a ser o mesmo das condições de funcionamento do item (a).
- o rendimento do sistema para as mesmas condições de funcionamento do item (c).



## QUESTÃO 10 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Um profissional de iluminação deseja projetar um sistema de feixe de luz capaz de iluminar o fundo reflexível de uma piscina e o gramado posicionado logo após o lado A. Sua ideia é submergir parcialmente um bloco maciço em formato de paralelepípedo reto, com uma fonte luminosa presa em sua base submersa  $B_1$ , que emite um feixe de luz que percorre a trajetória mostrada na figura. O bloco é fixado por dois cabos horizontais presos a sua base não submersa  $B_2$  e ortogonais ao lado A da piscina, sendo um deles amarrado, por meio de roldanas, na tampa articulada do compartimento onde é guardado o material de limpeza da piscina e o outro, na árvore. Considere que a piscina esteja completamente cheia com água e que a tração aplicada nos cabos seja metade do seu valor máximo para ruptura, especificado pelo fabricante. Calcule:

- a altura  $L$  do bloco;
- a distância  $d$  em que o bloco deve ser posicionado, em relação ao lado A da piscina.

Dados:

- profundidade da piscina: 3 m;
- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água da piscina:  $5/3$ ;
- massa específica da água:  $1 \text{ g/cm}^3$ ;
- massa específica do material do bloco:  $0,5 \text{ g/cm}^3$ ;
- comprimento  $t$  da tampa: 1 m;
- massa da tampa: 8 kg;
- tração máxima até a ruptura nos cabos: 30 N;
- aceleração da gravidade:  $10 \text{ m/s}^2$ .



Observações:

- despreze o atrito e as dimensões das quatro roldanas;
- considere a árvore uma estrutura rígida;
- as roldanas estão fixas.

### 3 - GABARITO DAS QUESTÕES SEM COMENTÁRIOS



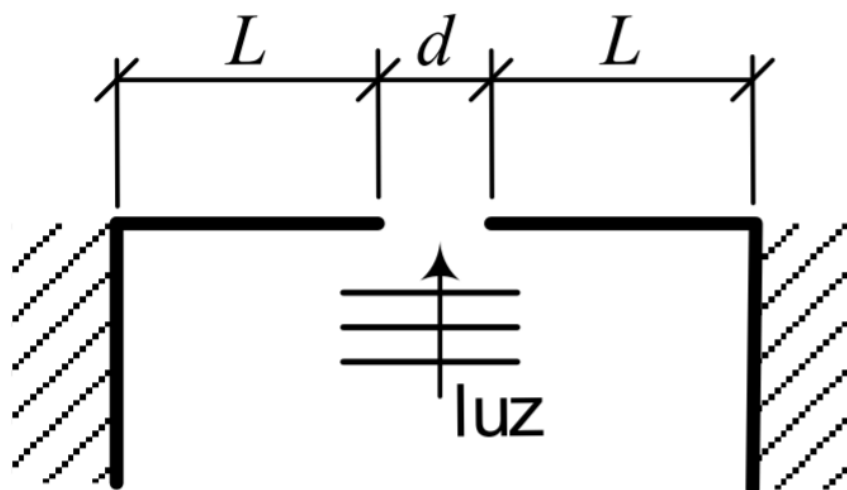
## GABARITO

1. a) $1596 \text{ nm} < d < 2128 \text{ nm}$ b) $29,32^\circ\text{C} < \theta_{\text{lab}} < 39,96^\circ\text{C}$	2. A máquina é viável.
3. Vide comentários.	4. a) $P_{\text{arf}} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ b) $f_{\text{at}_m} = 0,2 \text{ N}$
5. a) Vide figura. b) $x_c = 450\sqrt{3} + \frac{675}{\pi}$ e $z_c = 0$ .	6. $n_2 = \sqrt{3}$
7. $v = \frac{n\sqrt{L^2 - 4fL}}{\Delta t}$	8. Gabarito: a) $3 \text{ m/s}$ ; b) $13 \text{ m}$ ; c) $5,12 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ; d) $5,27 \cdot 10^{-3} \text{ C}$
9. a) $\tau = \frac{15}{\pi} \text{ N} \cdot \text{m}$ b) $\omega' = \frac{600\pi}{11} \text{ rad/s}$ c) $R_c \approx 45,45 \Omega$ d) $\eta \approx 66\%$	10. a) $1,6 \text{ m}$ b) $3,9 \text{ m}$



## 4 - QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS

### QUESTÃO 01 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



A figura mostra um sistema usado em um laboratório de física para demonstrar a difração de luz por uma fenda. A luz de um laser de comprimento de onda  $\lambda$  passa por uma fenda de largura  $d$ , formada pelo espaço entre as extremidades de duas barras de comprimento  $L$ . A outra extremidade de cada barra é mantida fixa. Depois de passar pela fenda, a luz incide em uma tela distante, na qual é observado um padrão de difração formado por regiões claras e escuras.

- c) Dado que na tela são observados exatamente 3 mínimos de intensidade luminosa em cada lado do máximo central de intensidade, determine o intervalo de valores da largura  $d$  da fenda que são compatíveis com essa observação.
- d) A temperatura do laboratório normalmente é mantida em  $24,0^\circ\text{C}$  por um aparelho de ar condicionado. Em um dia no qual o experimento foi realizado com o aparelho de ar condicionado desligado, observou-se na tela apenas 1 mínimo de intensidade luminosa em cada lado do máximo central de intensidade, o que foi atribuído à dilatação térmica das barras. Sabendo que o coeficiente de dilatação linear das barras é  $\alpha$ , determine o intervalo de temperaturas do laboratório, no dia em que o aparelho de ar condicionado foi desligado, que são compatíveis com essa observação.

#### Dados:

- comprimento de onda do laser:  $\lambda = 532\text{ nm}$ ;
- comprimento de cada barra a  $24,0^\circ\text{C}$ :  $L = 50\text{ cm}$ ;
- coeficiente de dilatação linear de cada barra:  $\alpha = 10^{-7}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### Comentários

- a) Para a situação com 3 mínimos de intensidade luminosa, temos:

$$\Delta x = k \cdot \lambda$$

Com  $k$  inteiro para interferência destrutiva. Além, disso:

$$a \cdot \sin(\theta) = k \cdot \lambda$$

Juntando as expressões, temos:



$$d \cdot \frac{x}{D} = k \cdot \lambda \Rightarrow x = \frac{k \cdot \lambda \cdot D}{d}$$

Como temos três mínimos de intensidade, devemos ter as seguintes condições de contorno do problema:

- Para  $k = 4$ :

$$\frac{4 \cdot \lambda}{d} > 1 \Rightarrow d < 4 \cdot \lambda$$

- E para  $k = 3$ :

$$\frac{3 \cdot \lambda}{d} < 1 \Rightarrow d > 3 \cdot \lambda$$

Isso nos leva a concluir que:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \lambda < d < 4 \cdot \lambda \\ 3 \cdot 532 < d < 4 \cdot 532 \\ 1596 \text{ nm} < d < 2128 \text{ nm} \end{aligned}$$

b) A temperatura padrão da sala é de  $24,0^\circ\text{C}$ , ou  $297 \text{ K}$ . Para apenas um mínimo, temos:

$$1 \cdot \lambda < d_2 < 2 \cdot \lambda \Rightarrow \Delta L = d_1 - d_2$$

O que nos permite concluir que:

$$1 \cdot \lambda < d_1 - d_2 < 3 \cdot \lambda$$

E a variação máxima que cada barra sofre vale  $3 \cdot \lambda$ . Usando a expressão da dilatação térmica para uma dimensão:

$$3 \cdot \lambda = \Delta L_{\text{máx}} = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

Isolando a variação de temperatura nessa expressão:

$$\Delta \theta = \frac{k \cdot \lambda}{L_0 \cdot \alpha}$$

Se o mínimo valor do tamanho da fenda no item anterior é maior que o máximo valor da fenda no estado deste item, temos que a fenda terá seu tamanho diminuído em função do aquecimento das barras.

Devemos adotar que as duas barras sofreram um aumento do seu comprimento em função do desligamento do ar condicionado. Além disso, as condições de contorno explicam essa situação. Com isso, temos que as variações de temperatura serão:

$$\begin{cases} \Delta \theta_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot \lambda}{2 \cdot L_0 \cdot \alpha} = \frac{3 \cdot 532 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7}} = 15,96 \text{ K} \\ \Delta \theta_{\text{mín}} = \frac{1 \cdot \lambda}{2 \cdot L_0 \cdot \alpha} = \frac{1 \cdot 532 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-7}} = 5,32 \text{ K} \end{cases}$$

O que nos leva a uma faixa de temperatura de:

$$\begin{cases} \theta_{\text{mín}} = \theta + \Delta \theta_{\text{mín}} = 24 + 5,32 = 29,32^\circ\text{C} \\ \theta_{\text{máx}} = \theta + \Delta \theta_{\text{máx}} = 24 + 15,96 = 39,96^\circ\text{C} \end{cases}$$





**Gabarito: a)  $1596 \text{ nm} < d < 2128 \text{ nm}$  b)  $29,32^\circ\text{C} < \theta_{\text{lab}} < 39,96^\circ\text{C}$ .**

## QUESTÃO 02 - (2019/2020/IME 2ª FASE)

Um produtor rural constata que suas despesas mensais de eletricidade estão altas e decide contratar um pesquisador para que ele especifique formas alternativas de acionamento simultâneo de duas bombas empregadas para irrigação de suas lavouras. O pesquisador constata que, na fazenda, existe uma máquina refrigeradora que opera em um ciclo termodinâmico, bem como outro dispositivo que atua como um ciclo motor e propõe a solução descrita a seguir:

***“A potência disponibilizada pelo ciclo motor deverá ser integralmente utilizada para o acionamento da máquina refrigeradora e a energia rejeitada para o ambiente de ambos os dispositivos – de acordo com os seus cálculos – é mais do que suficiente para o acionamento simultâneo das duas bombas.”***

De acordo com os dados abaixo, determine se a solução encaminhada pelo pesquisador é viável, com base em uma análise termodinâmica da proposição.

### Dados:

- temperatura do ambiente:  $27^\circ\text{C}$ ;
- temperatura no interior da máquina refrigeradora:  $-\frac{19}{3}^\circ\text{C}$ ;
- temperatura da fonte térmica referente ao ciclo motor:  $927^\circ\text{C}$ ;
- potência de cada bomba empregada na irrigação: 5 HP;
- estimativa da taxa de energia recebida pelo motor térmico:  $80 \text{ kJ/min}$ ;
- $1 \text{ HP} = \frac{3}{4} \text{ kW}$ .

### Comentários

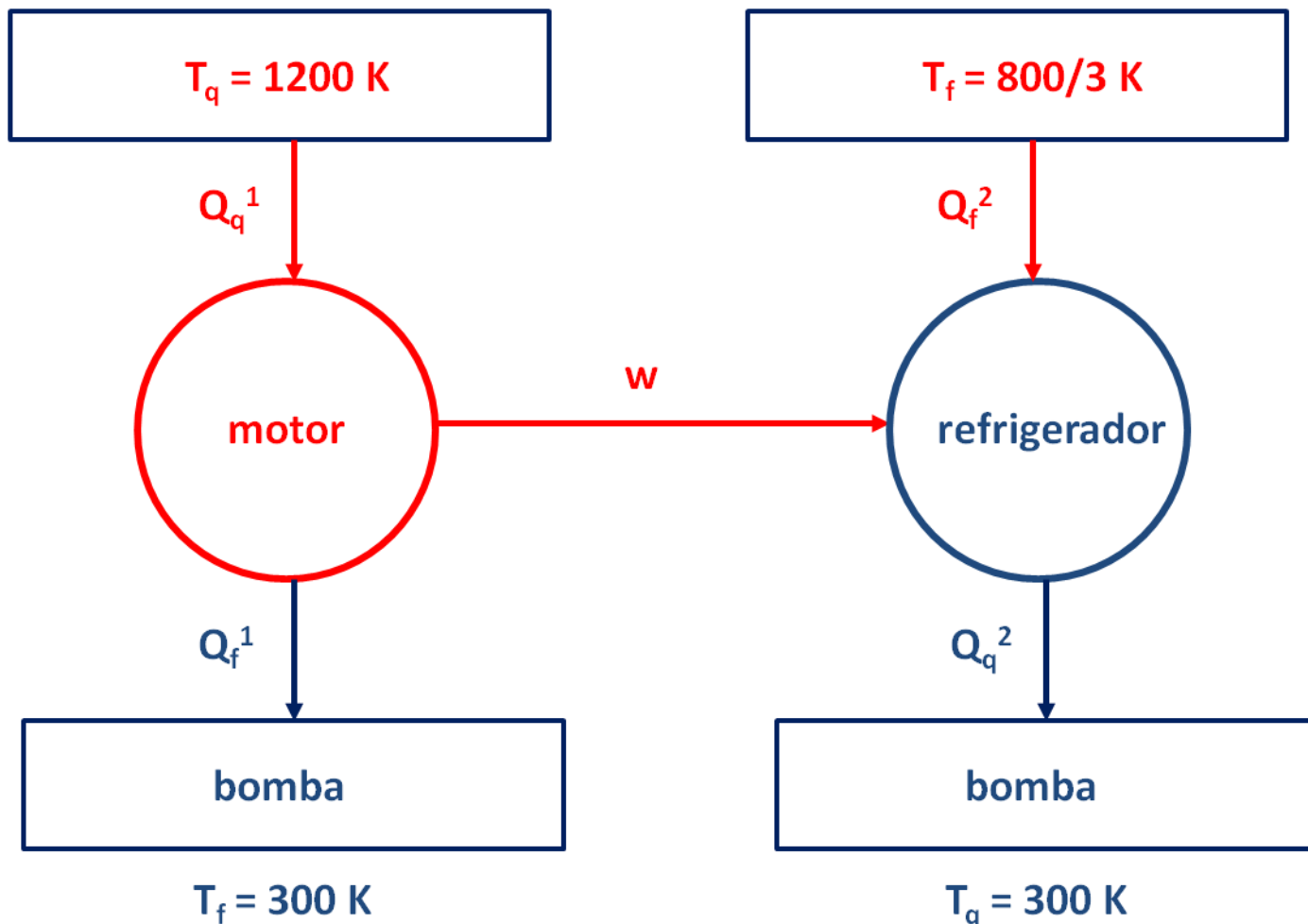
Primeiramente vamos converter as informações do enunciado nas unidades apropriadas:

<b>Temperatura do ambiente</b>	$27^\circ\text{C}$	300 K
<b>Temperatura no interior da máquina refrigeradora</b>	$-19/3^\circ\text{C}$	$800/3 \text{ K}$
<b>Temperatura da fonte térmica referente ao ciclo motor</b>	$927^\circ\text{C}$	1200 K
<b>Potência das duas bombas</b>	2.5 HP	7,5 kW
<b>Estimativa da taxa de entrega recebida pelo motor térmico</b>	$80 \text{ kJ/min}$	$4/3 \text{ kW}$

Vamos montar um esquema do sistema motor-refrigerador. Como o sistema está em contato com a lavoura, é de se esperar que a temperatura das bombas seja a própria temperatura ambiente.

Nesse esquema, chamamos o motor de máquina térmica 1 e o refrigerador de máquina térmica 2.





Pelo esquema, a energia entregue às bombas é:

$$E = Q_f^1 + Q_q^2$$

O melhor rendimento acontece quando tanto o motor como a máquina refrigeradora trabalham com o rendimento da máquina de Carnot. Portanto, precisamos calcular a energia que seria entregue às bombas no Ciclo de Carnot e comparar com o que foi entregue no projeto real.

Nessa situação, o trabalho entregue pelo motor é, em função, do calor fornecido pela fonte quente.

$$\frac{w}{Q_q^1} = 1 - \frac{T_f^1}{T_q^1} = 1 - \frac{300}{1200} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore w = \frac{3}{4} Q_q^1$$

Pela Lei de Conservação de Energia, o calor rejeitado para a fonte fria do motor é:

$$Q_f^1 = Q_q^1 - w = Q_q^1 - \frac{3}{4} Q_q^1 = \frac{1}{4} Q_q^1$$

$$Q_f^1 = \frac{1}{4} Q_q^1$$

A eficiência do gerador é dada por:



$$\eta = \frac{Q_f^2}{w} = \frac{T_f^2}{T_q^2 - T_f^2} = \frac{800/3}{300 - 800/3} = \frac{800}{900 - 800} = \frac{800}{100} = 8$$

$$\therefore Q_f^2 = 8w$$

Como sabemos a relação entre o trabalho no ciclo e o calor entregue pela fonte quente do motor, podemos escrever:

$$Q_f^2 = 8w = 8 \cdot \frac{3}{4} Q_q^1 = 6 Q_1^1$$

Portanto, a energia entregue às bombas é:

$$E = Q_f^1 + Q_q^2 = Q_1^1 + 6Q_1^1 = 7Q_1^1$$

Pelo enunciado, a estimativa da potência entregue pela fonte quente do motor é igual a 4/3 kW, após convertidas as unidades. Como temos energia na equação acima, devemos dividir pelo tempo:

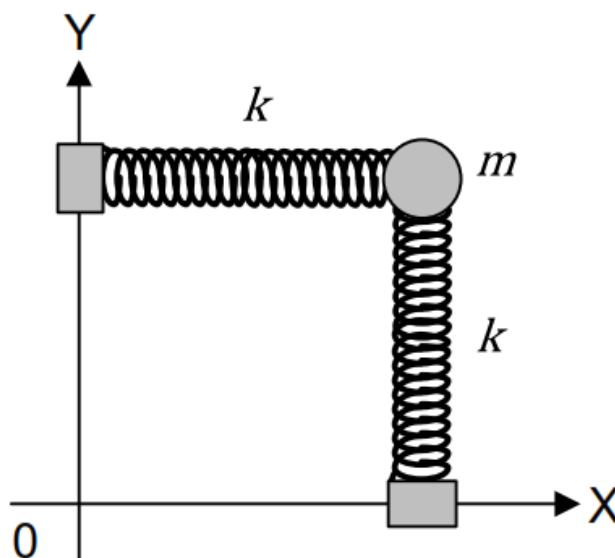
$$\frac{E}{\Delta t} = \frac{7Q_1^1}{\Delta t}$$

$$P_{Carnot} = 7 \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{3} \text{ kW} \cong 9,33 \text{ kW} > 7,5 \text{ kW}$$

Logo, a máquina é viável, tendo em vista que a potência calculada considerando o Ciclo de Carnot foi superior ao projeto apresentado.

**Gabarito: A máquina é viável.**

### QUESTÃO 03 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Uma partícula, inicialmente em repouso sobre o plano horizontal XY, está presa a duas molas idênticas, cada uma solidária em sua outra extremidade a um cursor que pode movimentar-se sobre seu respectivo eixo, como mostrado na figura. As molas são rígidas o suficiente para se deflexionarem apenas nas direções ortogonais de seus respectivos eixos aos quais estão

presas. No instante  $t = 0$ , a partícula é puxada para o ponto de coordenadas  $\left(\frac{11}{10}L, \frac{12}{10}L\right)$  e é lançada com velocidade inicial  $\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\omega L, 0\right)$ .

Determine:

- as equações das componentes de posição, velocidade e aceleração da partícula nos eixos X e Y, em função do tempo;
- a área no interior da trajetória percorrida pela partícula durante o movimento.

Dados:

- massa da partícula:  $m$ ;
- constante elástica das molas:  $k$ ;
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;
- comprimento das molas não flexionadas:  $L$ .

Observações:

- o plano XY é totalmente liso;
- não há influência da gravidade no movimento da partícula;
- os cursores deslizam sem atrito pelos eixos;
- as coordenadas X e Y da partícula são sempre positivas.

### Comentários

Conforme afirmado no enunciado, as molas tem resistência apenas na direção de seu comprimento. Portanto, consideram-se os MHS como independentes, isto é, tem-se um MHS massa-mola na direção  $x$  e outro MHS massa-mola na direção  $y$ . Por simplicidade, adota-se um referencial auxiliar com centro no ponto de equilíbrio do sistema. Como cada sistema massa-mola tem equilíbrio onde a mola tiver deformação nula, chega-se que o ponto de equilíbrio do conjunto será  $(L, L)$ . Adotando este ponto como origem do sistema de coordenadas auxiliar:

$$x_{\text{auxiliar}} = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_1)$$

$$y_{\text{auxiliar}} = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_2)$$

Notar que como as constantes  $k$  das molas são iguais, as velocidades angulares ( $\omega$ ) também serão. Agora, calcula-se  $A_1$  e  $A_2$  pela conservação da energia mecânica entre a situação inicial e as extremidades do movimento, isto é, onde a velocidade for nula e a deformação da mola for a amplitude.

Para a direção  $x$ :

$$\frac{k \cdot A_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_{0x}^2}{2} + \frac{k \cdot x_0^2}{2} = \frac{m \cdot 3 \cdot \omega^2 \cdot L^2}{2 \cdot 100} + \frac{k \cdot L^2}{2 \cdot 100}$$

Mas:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Substituindo:

$$A_1^2 = \frac{4 \cdot L^2}{100} \rightarrow A_1 = \frac{L}{5}$$

Para a direção y:

$$\frac{k \cdot A_2^2}{2} = \frac{k \cdot y_0^2}{2} \rightarrow A_2 = y_0 \rightarrow A_2 = \frac{L}{5}$$

Logo:

$$\begin{cases} x_{auxiliar} = \frac{L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_1) \\ y_{auxiliar} = \frac{L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_2) \end{cases}$$

Para determinar  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , basta utilizarmos as condições iniciais. Isto é:

$$\text{Para } t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{L}{10} \text{ e } v_x = \omega \cdot L \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} \\ y = \frac{L}{5} \end{cases}$$

Substituindo  $t = 0$ :

$$\begin{cases} x = \frac{L}{5} \cdot \cos(\phi_1) = \frac{L}{10} \\ y = \frac{L}{5} \cdot \cos(\phi_2) = \frac{L}{5} \end{cases}$$

De onde, tira-se que:

$$\begin{aligned} \cos \phi_1 &= \frac{1}{2} \rightarrow \phi_1 = \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos \phi_2 &= 1 \rightarrow \phi_2 = 0 \end{aligned}$$

Para determinar o sinal de  $\phi_1$ , pode-se deduzir sem a análise da derivada (função velocidade). Para isso, usa-se a informação do enunciado, que para o instante  $t = 0$ , a velocidade é positiva. Se a velocidade é positiva, no instante seguinte, a posição  $x$  deve aumentar. Como  $\omega \cdot t$  é crescente, o valor inicial deve ser negativo. Caso prefira-se analisar a função velocidade:

$$x' = -\omega \cdot \frac{L}{5} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_1)$$

Para  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\omega \cdot L}{5} \cdot \text{sen}(\phi_1) = \frac{\omega \cdot L \cdot \sqrt{3}}{10} \\ \text{sen}(\phi_1) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$$\phi_1 = -\frac{\pi}{3}$$

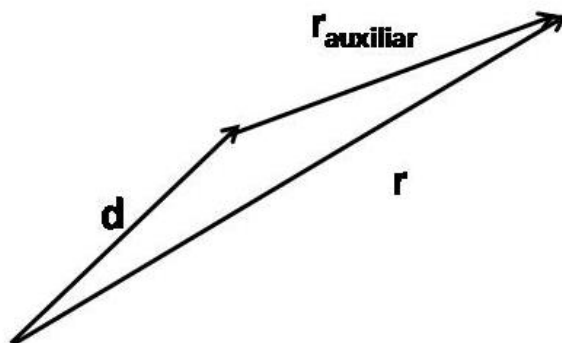
Portanto, as equações horárias ficam definidas para o nosso sistema de referencial centrado no ponto de equilíbrio. Como já se sabe a posição do ponto de equilíbrio, volta-se para o sistema  $xOy$  somando  $L$  em cada equação horária já obtida.

Isto é:

$$x = x_{auxiliar} + L$$

$$y = y_{auxiliar} + L$$

Ou, visualmente:



Assim:

$$x = L + \frac{L}{5} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = L + \frac{L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Derivando-se em relação ao tempo obtém-se as funções horárias das velocidades:

$$v_x = -\frac{\omega \cdot L}{5} \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v_y = -\frac{\omega \cdot L}{5} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

E, derivando-se novamente em relação ao tempo:

$$a_x = -\frac{\omega^2 \cdot L}{5} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a_y = -\frac{\omega^2 \cdot L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

c) Das equações horárias do movimento, obtidas anteriormente:

$$\frac{5 \cdot (x - L)}{L} = \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{5 \cdot (x - L)}{L} = \frac{\cos(\omega \cdot t)}{2} + \frac{\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \sqrt{3}}{2}$$

E:



$$\frac{5 \cdot (y - L)}{L} = \cos(\omega \cdot t)$$

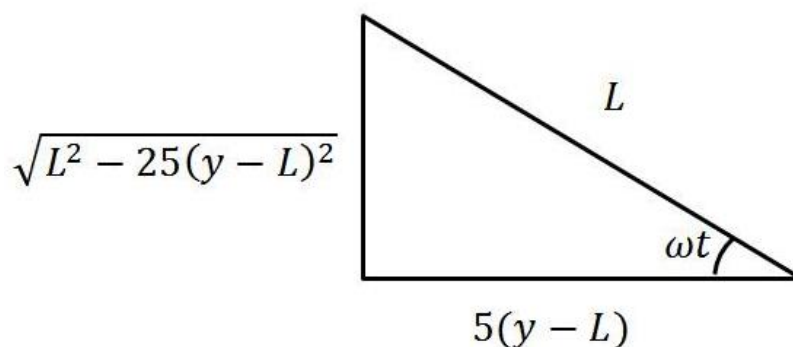
$$\frac{x - L}{y - L} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}(\omega \cdot t)$$

$$\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(\omega \cdot t) = 2 \cdot \frac{(x - L)}{(y - L)} - 1$$

Da equação horária de  $y$ , também pode-se tirar que:

$$L \cdot \cos(\omega \cdot t) = 5 \cdot (y - L)$$

Ou seja, tem-se o seguinte triângulo retângulo:



Logo:

$$\operatorname{tg}(\omega \cdot t) = \frac{\sqrt{L^2 - 25 \cdot (y - L)^2}}{5 \cdot (y - L)}$$

Com ambas as expressões para  $\operatorname{tg}(\omega \cdot t)$ :

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{L^2 - 25 \cdot (y - L)^2}}{y - L} = \frac{2 \cdot (x - L) - (y - L)}{(y - L)}$$

Organizando:

$$x^2 - x \cdot y + y^2 - x \cdot L - y \cdot L + \frac{97 \cdot L^2}{100} = 0$$

Centralizando a cônica em  $(L, L)$ :

$$F' = L^2 - L^2 + L^2 - L^2 - L^2 + \frac{97 \cdot L^2}{100} = -\frac{3 \cdot L^2}{100}$$

Rotacionando para eliminar os termos lineares:

$$\begin{cases} A' + C' = 2 \\ A' - C' = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{\frac{2 \cdot L^2}{100}} + \frac{y^2}{\frac{6 \cdot L^2}{100}} = 1$$

Logo, comparando com a fórmula de uma elipse centralizada e paralela aos eixos:





$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tem-se que:

$$a = \frac{\sqrt{6} \cdot L}{10} \text{ e } b = \frac{\sqrt{2} \cdot L}{10}$$

Sabendo que a área de uma elipse é dada por  $\pi \cdot a \cdot b$ :

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot L^2}{50}$$

**Gabarito: Vide comentários.**

#### QUESTÃO 04 - (2019/2020/IME 2ª FASE)

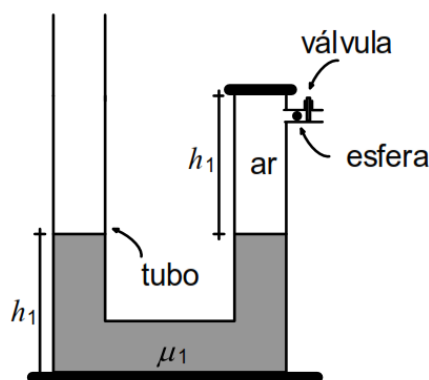


Figura 1

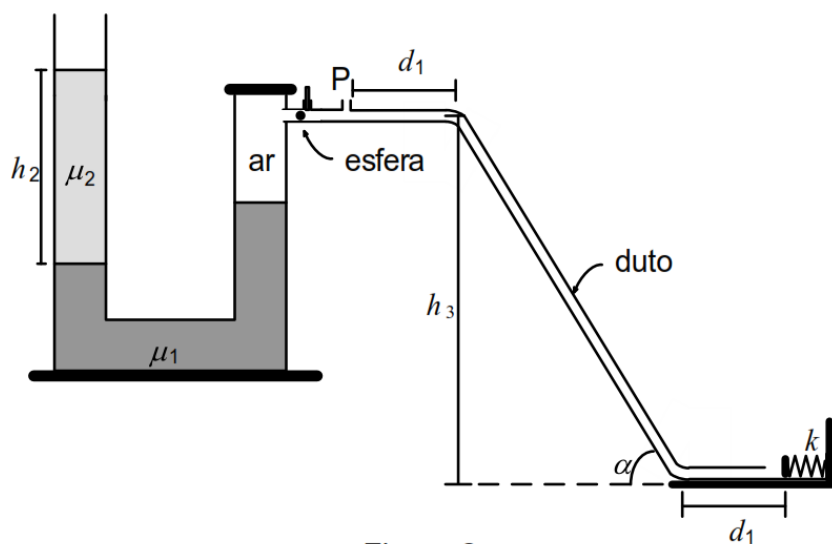


Figura 2

Um tubo rígido aberto nas extremidades, com seção reta de área constante, é preenchido com um fluido de massa específica  $\mu_1$  até alcançar a altura  $h_1$ . O tubo é lacrado em uma das extremidades, conforme ilustra a Figura 1, imediatamente acima de uma válvula, que se encontra fechada, de modo que a coluna de ar também tenha altura  $h_1$  e esteja com a mesma pressão atmosférica externa. A haste da válvula mantém presa uma esfera que se ajusta bem ao duto de saída, com seção reta  $S_d$  circular. Um segundo fluido, de massa específica  $\mu_2 < \mu_1$ , é lentamente colocado na extremidade aberta até formar uma coluna de altura  $h_2$ , conforme mostra a Figura 2. Em determinado instante, a válvula é subitamente aberta, liberando a esfera, que é impulsionada pelo ar comprimido por um breve intervalo de tempo  $\Delta t$ , até atingir o ponto P. A esfera percorre o trajeto dentro do duto até alcançar uma mola, de constante elástica  $k$ , que se deforma  $\Delta x$ . Com relação à situação apresentada, determine:

- a) a pressão da coluna confinada de ar, em  $N/m^2$ , supondo a temperatura constante, após a inserção do segundo fluido e antes da abertura da válvula.
- b) a força de atrito média a partir do ponto P, em N, que age na esfera em sua trajetória até alcançar a mola.

**Observações:**



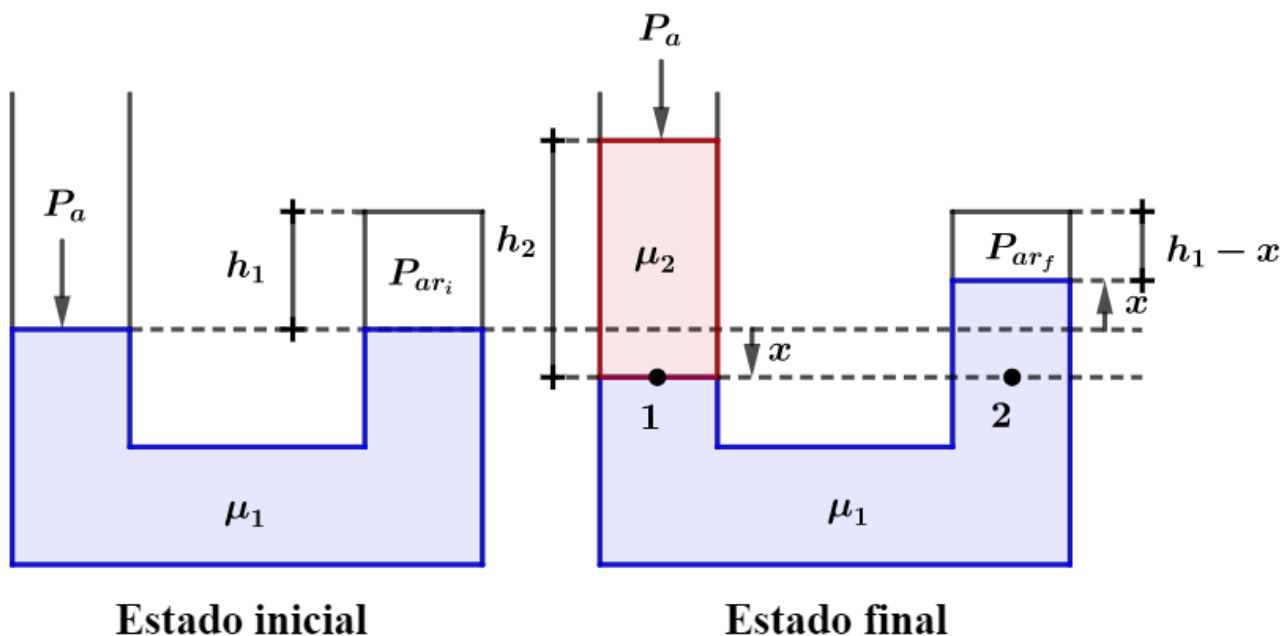
- considere constante a pressão que impulsiona a esfera durante seu movimento até o ponto P;
- após o ponto P, o interior do duto encontra-se à pressão atmosférica;
- não há força de atrito durante a compressão da mola;
- não há atrito no movimento da esfera entre a válvula e o ponto P.

#### Dados:

- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;
- alturas:  $h_1 = 1 \text{ m}$ ;  $h_2 = 1,75 \text{ m}$ ; e  $h_3 = 4 \text{ m}$ ;
- ângulo  $\alpha = 30^\circ$ ;
- área da seção reta do duto:  $S_d = 1 \text{ cm}^2$ ;
- constante elástica da mola:  $k = 2000 \text{ N/m}$ ;
- deformação máxima da mola:  $= 2,5 \text{ cm}$ ;
- distância  $d_1 = 1 \text{ m}$ ;
- intervalo de tempo que a esfera é impulsionada:  $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ ;
- massa da esfera:  $m = 50 \text{ g}$ ;
- massas específicas:  $\mu_1 = 2500 \text{ kg/m}^3$ ; e  $\mu_2 = 2.000 \text{ kg/m}^3$ ;
- pressão atmosférica local:  $P_a = 10^5 \text{ N/m}^2$ .

#### Comentários:

a) Vamos representar a situação inicial e a situação final do problema:



Note que ao inserir o fluido de massa específica  $\mu_2$ , o fluido de massa específica  $\mu_1$  desce  $x$  na coluna à esquerda e sobe  $x$  na coluna à direita. Observando o estado final, temos que a pressão na região 1 e na região 2 devem ser iguais, logo:

$$P_a + \mu_2 g h_2 = P_{ar_f} + 2\mu_1 g x \quad (eq. I)$$

Analisemos a pressão do ar. Sabemos do enunciado que a temperatura se manteve constante, logo, temos uma transformação isotérmica.

$$P_i V_i = P_f V_f$$

Da situação inicial, temos:

$$P_a = P_{ar_i}$$

Após a transformação isotérmica:

$$P_{ar_i} \underbrace{(A h_1)}_{V_i} = P_{ar_f} \underbrace{(A(h_1 - x))}_{V_f}$$

$$P_a h_1 = P_{ar_f} (h_1 - x)$$

$$P_{ar_f} = \frac{P_a h_1}{h_1 - x} \quad (eq. II)$$

Usando a *eq. II* na *eq. I*, temos:

$$P_a + \mu_2 g h_2 = \frac{P_a h_1}{h_1 - x} + 2\mu_1 g x$$

Substituindo os valores das variáveis, obtemos:

$$10^5 + 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1,75 = \frac{10^5}{1 - x} + 2 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot x$$

$$10^5 + 3,5 \cdot 10^4 = \frac{10^5}{1 - x} + 5 \cdot 10^4 x$$

$$13,5 = \frac{10}{1 - x} + 5x$$

$$13,5 - 13,5x = 10 + 5x - 5x^2$$

$$5x^2 - 18,5x + 3,5 = 0$$

$$10x^2 - 37x + 7 = 0$$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4 \cdot 10 \cdot 7}}{20} = \frac{37 \pm 33}{20}$$

$$x_1 = 3,5 \text{ m ou } x_2 = 0,2 \text{ m}$$

Como  $h_1 = 1 \text{ m}$ , temos que  $x_1 = 3,5 \text{ m}$  não convém, logo,  $x = 0,2 \text{ m}$ .

Portanto, a pressão pedida é dada por:

$$P_{ar_f} = \frac{P_a h_1}{h_1 - x} = \frac{10^5}{1 - 0,2} = \frac{10^5}{0,8}$$



$$\therefore \boxed{P_{arf} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}$$

b) Pelo teorema das forças não conservativas, temos:

$$|\tau_{fat}| = |E_f - E_i|$$

A energia inicial é dada por:

$$E_i = mgh_3 + \frac{mv^2}{2}$$

A energia final é dada por:

$$E_f = \frac{kx^2}{2}$$

Então, devemos determinar qual o valor da velocidade  $v$  quando a esfera chega em  $P$ . Para isso, podemos utilizar o Teorema do Impulso, observando que a força impulsiva é devido a diferença de pressão  $\Delta P = P_{arf} - P_{ari} = 0,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Portanto:

$$I = \Delta Q \Rightarrow F \cdot \Delta t = m \cdot v \Rightarrow \Delta P \cdot S \cdot \Delta t = m \cdot v$$

$$v = \frac{\Delta P \cdot S \cdot \Delta t}{m}$$

Substituindo os valores conforme o enunciado, chegamos que  $v = 5 \text{ m/s}$ . Assim, podemos determinar o módulo do trabalho da força de atrito:

$$|\tau_{fat}| = \left| \frac{kx^2}{2} - \left( mgh_3 + \frac{mv^2}{2} \right) \right|$$

$$|\tau_{fat}| = \left| \frac{2000 \cdot (2,5 \cdot 10^{-2})^2}{2} - \left( 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 5^2}{2} \right) \right|$$

$$|\tau_{fat}| = |0,625 - (2 + 0,625)| = 2 \text{ J}$$

Ele pede o módulo da força de atrito média. O trabalho de uma força média pode ser calculado pelo produto da força pelo deslocamento. Portanto:

$$f_{atm} \cdot \Delta s = 2$$

Note que  $\Delta s = 2d_1 + \frac{h_3}{\sin(30^\circ)} = 2(d_1 + h_3)$ , substituindo na equação logo acima, vem:

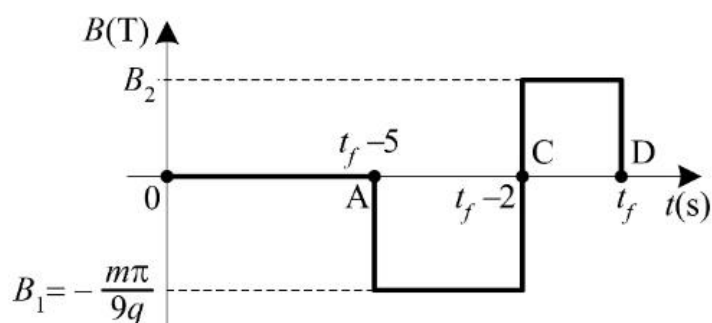
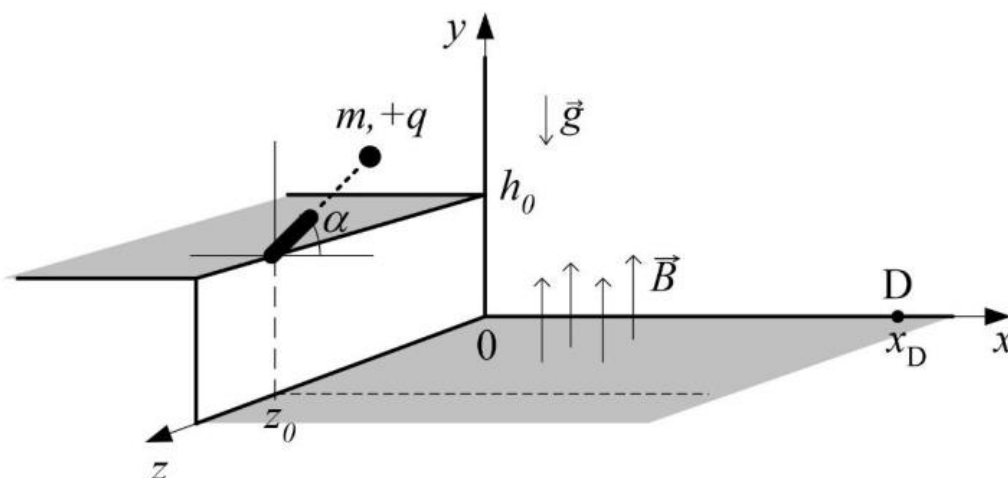
$$f_{atm} \cdot 2 \cdot (1 + 4) = 2$$

$$\boxed{f_{atm} = 0,2 \text{ N}}$$

**Gabarito: a)**  $P_{arf} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  **b)**  $f_{atm} = 0,2 \text{ N}$



## QUESTÃO 05 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Uma partícula de massa  $m$  e carga elétrica positiva  $+q$  é lançada obliquamente com inclinação  $t = 0$ , no plano  $z = z_0$ , a uma velocidade inicial  $v_0$  a partir da altura  $y = h_0$ , conforme ilustra a figura. Em determinado instante de sua trajetória, a partícula é submetida a um campo magnético uniforme  $\vec{B} = (0, B, 0)$ , cuja intensidade varia ao longo do tempo de acordo com o gráfico. Sabendo que  $t_f$  representa o instante em que a partícula encerra seu movimento no ponto D de coordenadas  $(x_D, 0, 0)$ , ao atingir o plano  $xz$ ; que A e C designam as posições da partícula, respectivamente, em  $t = t_f - 5$  s e  $t = t_f - 2$  s; e que a resistência do ar pode ser desprezada, responda o que se pede:

- faça um esboço do gráfico da altura  $y$  da partícula versus o tempo  $t$ , desde seu lançamento até alcançar o ponto D, explicitando a altura máxima alcançada, a do ponto A e a do ponto C, com os correspondentes tempos; e
- determine as coordenadas  $x_C$  e  $z_C$  do ponto C.

### Dados:

- plano de lançamento da partícula  $z = z_0 = 225\sqrt{3}/\pi$  m;
- aceleração da gravidade:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;
- velocidade inicial:  $v_0 = 100$  m/s;
- ângulo de lançamento da partícula:  $\alpha = 30^\circ$ ;
- altura inicial da partícula:  $h_0 = 280$  m.



## Comentários

a) No eixo  $y$ , não há influência do campo magnético. Portanto, a partícula descreve simplesmente uma trajetória sob a ação da gravidade. A equação horária desse movimento é:

$$\begin{aligned}y &= h_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \\y &= 280 + 100 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2} \\y &= 280 + \frac{100 \cdot 1}{2} \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2} \\y &= 280 + 50 \cdot t - 5t^2\end{aligned}$$

A altura máxima é atingida no tempo:

$$t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen} 30^\circ}{g} = \frac{100 \cdot 0,5}{10} = 5$$

Portanto, a altura máxima é:

$$h_{\max} = 280 + 50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 280 + 250 - 125 = 405$$

O tempo de queda do movimento pode ser obtido como a solução da equação para  $y = 0$ :

$$\begin{aligned}0 &= 280 + 50 \cdot t_f - 5t_f^2 \\t_f^2 - 10t_f - 56 &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação em  $t_f$ , temos:

$$\begin{aligned}t_f &= \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 1 \cdot 56}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 224}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{324}}{2} \\t_f &= \frac{10 \pm 18}{2} = \frac{10 + 18}{2} = \frac{28}{2} = 14\end{aligned}$$

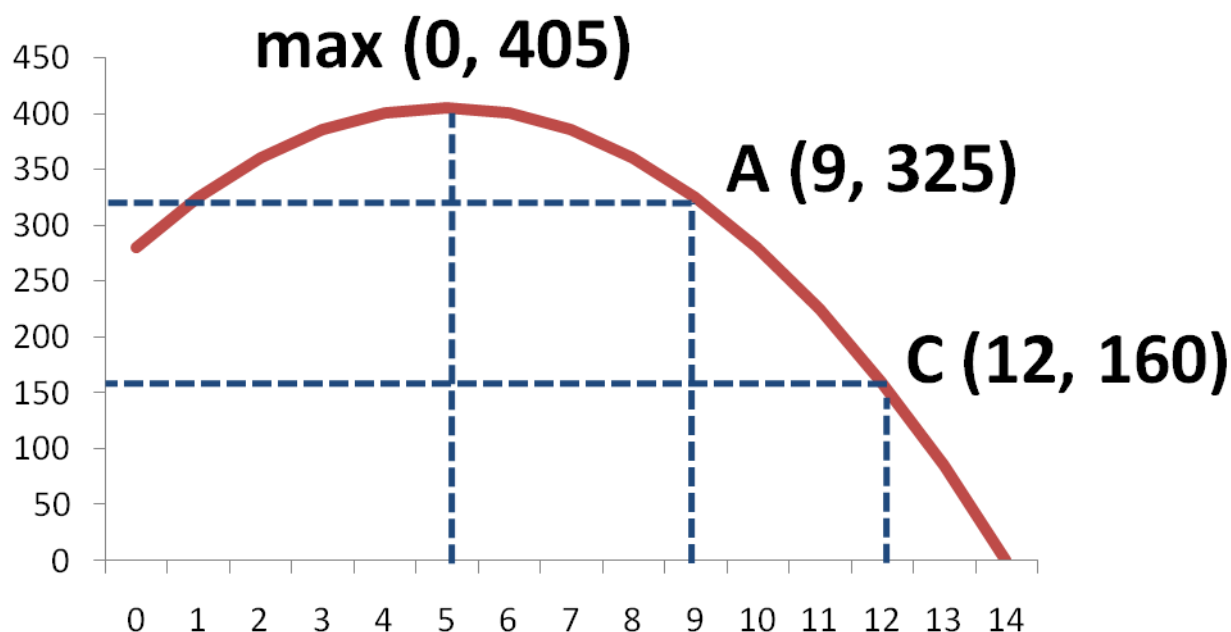
Agora, podemos usar a equação horária para calcular a altura nos pontos A e C.

$$y_A = 280 + 50 \cdot t_A - 5t_A^2 = 280 + 50 \cdot 9 - 5 \cdot 9^2 = 280 + 450 - 405 = 325$$

$$y_C = 280 + 50 \cdot t_C - 5t_C^2 = 280 + 50 \cdot 12 - 5 \cdot 12^2 = 280 + 600 - 720 = 160$$

Podemos, portanto, desenhar o gráfico correspondente ao movimento.



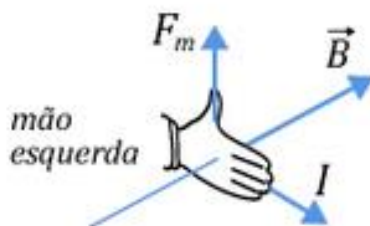


b) Primeiramente, vamos calcular as coordenadas do ponto A. Até o ponto A, o movimento no eixo x segue um movimento uniforme. A coordenada  $z_A$  foi fornecida pelo enunciado.

$$x_A = v_{ox} t = v_0 \cos 30^\circ t = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 = 450\sqrt{3}$$

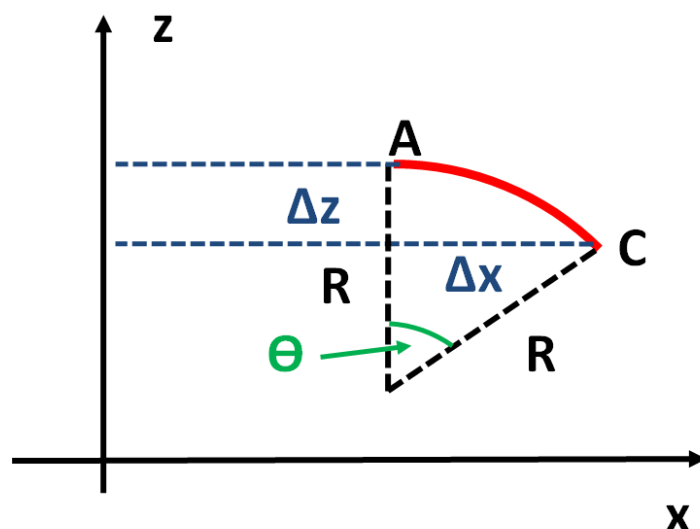
$$z_A = \frac{225\sqrt{3}}{\pi}$$

A partir do ponto A até o ponto C, a partícula de carga positiva ( $q > 0$ ) é submetida a um campo magnético no eixo y negativo. Como a sua velocidade no eixo x é positiva, temos que a força magnética se dará no eixo z negativo. Esse resultado pode ser obtido pela Regra da Mão Esquerda.



Para facilitar a visualização, podemos fazer uma projeção do movimento da partícula no plano **xz**. Em vermelho, mostramos a trajetória da partícula.





Com base na geometria da figura desenhada acima, podemos calcular os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $z$ .

$$\Delta x = R \cdot \sin \theta$$

$$R - \Delta z = R \cdot \cos \theta \therefore \Delta z = R(1 - \cos \theta)$$

Podemos calcular o raio da trajetória pela expressão conhecida do Eletromagnetismo.

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_x}{q \left( \frac{m\pi}{9q} \right)} = \frac{9v_x}{\pi}$$

$$R = \frac{9v_x}{\pi} = \frac{9 \cdot v_0 \cos 30^\circ}{\pi} = \frac{9 \cdot 100 \cdot \sqrt{3}/2}{\pi} = \frac{450\sqrt{3}}{\pi}$$

O ângulo de percurso pode ser calculado pela razão entre o tempo decorrido entre os pontos A e C e o período total do movimento.

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m}{q \left( \frac{m\pi}{9q} \right)} = 2 \cdot 9 = 18$$

$$\theta = \frac{t_c - t_A}{T} \cdot 360^\circ = \frac{12 - 9}{18} \cdot 360^\circ = \frac{3}{18} \cdot 360^\circ = 60^\circ$$

Agora, podemos calcular os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $z$ .

$$\Delta x = R \sin \theta = \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \cdot \sin 60^\circ = \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{675}{\pi}$$

$$\Delta z = R(1 - \cos \theta) = \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{450\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{225\sqrt{3}}{\pi}$$

Finalmente, podemos calcular as coordenadas pedidas do ponto C. Lembre-se que, pela figura, o deslocamento no eixo  $x$  é positivo, enquanto o deslocamento no eixo  $z$  é negativo.

$$x_C = x_A + \Delta x = 450\sqrt{3} + \frac{675}{\pi}$$

$$z_C = z_A - \Delta z = \frac{225\sqrt{3}}{\pi} - \frac{225\sqrt{3}}{\pi} = 0$$

**Gabarito: a) Vide figura. b)  $x_C = 450\sqrt{3} + \frac{675}{\pi}$  e  $z_C = 0$**

### QUESTÃO 06 - (2019/2020/IME 2ª FASE)

Um feixe de luz monocromática de seção reta de área  $A$  vindo de um meio com índice de refração  $n_1 = 2$  incide na superfície de separação entre dois meios. O ângulo de incidência é igual a  $\theta_1 = 45^\circ$  em relação à normal de separação com o outro meio, cujo índice de refração é  $n_2$ . O feixe incidente separa-se em feixe refletido e feixe transmitido (refratado). Calcule o valor numérico do índice de refração  $n_2$ .

Dados:

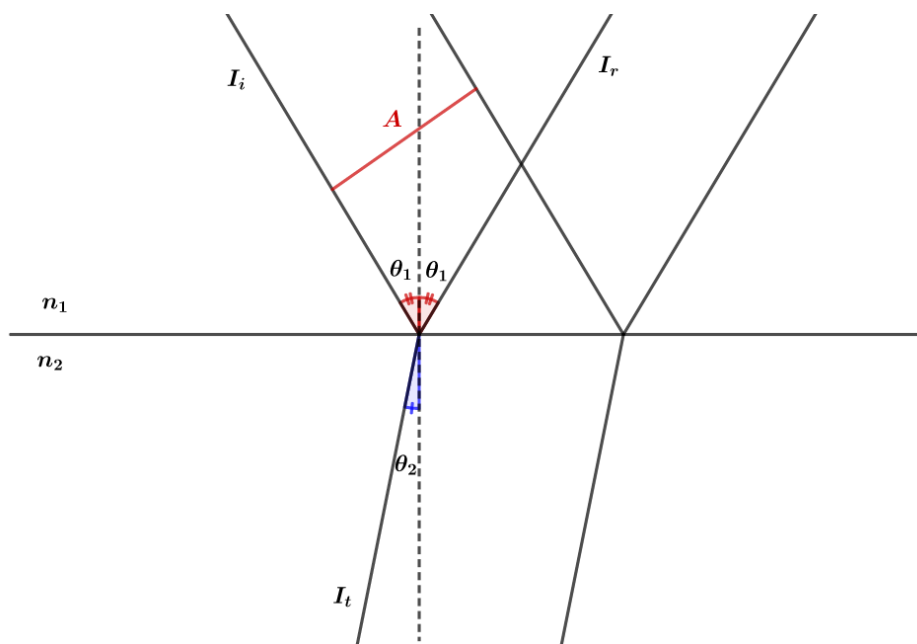
- as intensidades dos feixes incidente, refletido e transmitido são iguais a  $I_i = 1$ ;  $I_r = 1/3$  e  $I_t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , respectivamente.

Observação:

- despreze a energia absorvida.

#### Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte situação:



Para calcular  $n_2$ , devemos usar a Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2 \quad (eq. I)$$

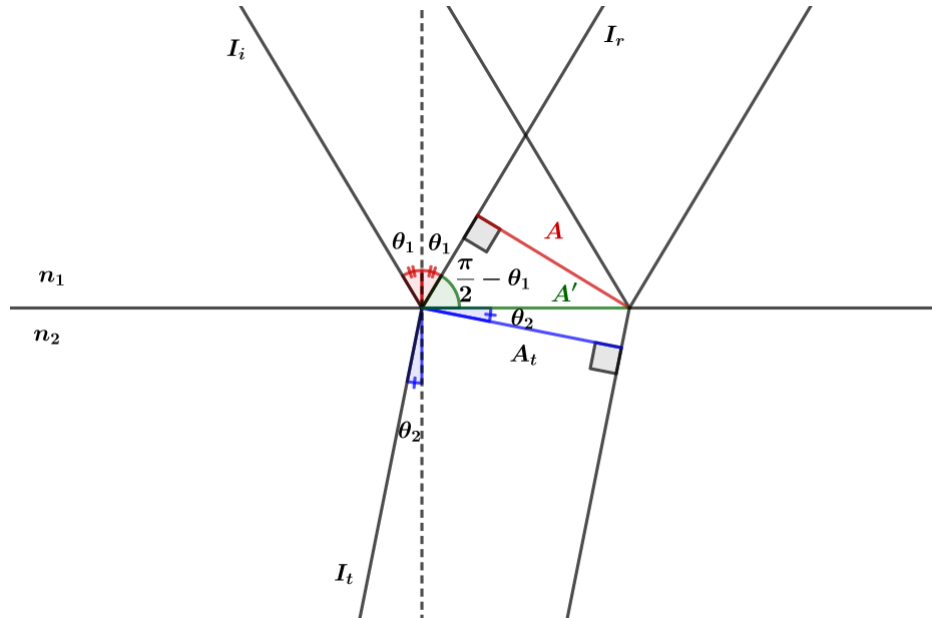
Note que podemos encontrar uma relação entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$  pela conservação de energia da luz monocromática de seção reta de área  $A$ :

$$P_i = P_r + P_t$$

$$I_i \cdot A = I_r \cdot A_r + I_t \cdot A_t \quad (eq. II)$$



A área da luz refletida é a mesma da luz incidente, ou seja,  $A_r = A$ . Note que  $A_t$  pode ser obtida pelas relações trigonométricas. Veja:



Observando os triângulos retângulos, temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{A}{A'} \Rightarrow A' = \frac{A}{\cos \theta_1}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{A_t}{A'} \Rightarrow A_t = \frac{A}{\cos \theta_1} \cos \theta_2$$

Da eq. II, temos:

$$\begin{aligned} I_i \cdot A &= I_r \cdot A_r + I_t \cdot \left( \frac{A}{\cos \theta_1} \cos \theta_2 \right) \\ \Rightarrow I_i &= I_r + \frac{I_t \cos \theta_2}{\cos \theta_1} \\ \Rightarrow \cos \theta_2 &= \frac{(I_i - I_r) \cos \theta_1}{I_t} \end{aligned}$$

Usando  $I_i = 1$ ,  $I_r = 1/3$ ,  $I_t = \sqrt{\frac{2}{3}}$  e  $\theta_1 = 45^\circ$ , encontramos:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \cos 45^\circ = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \cos \theta_2 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Da eq. I, temos:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 &= n_2 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 \\ 2 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ &= n_2 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 \end{aligned}$$



$$\sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{n_2}$$

Pela relação fundamental da trigonometria:

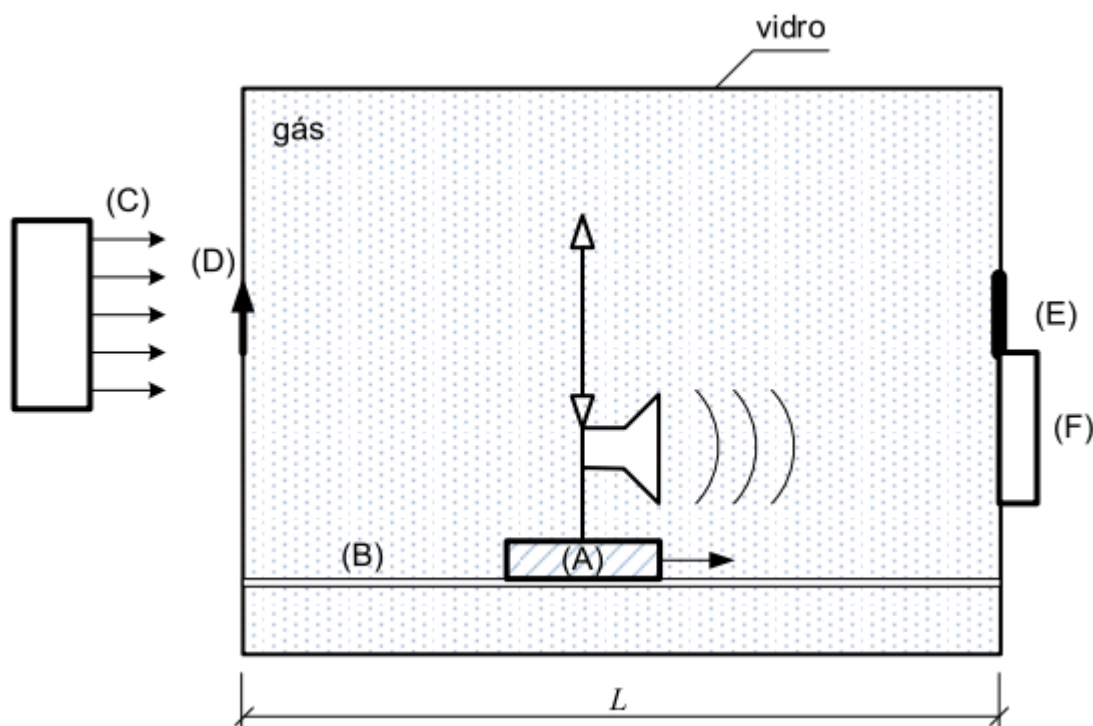
$$\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2 = 1$$

$$\frac{2}{n_2^2} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{2}{n_2^2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \boxed{n_2 = \sqrt{3}}$$

**Gabarito:**  $n_2 = \sqrt{3}$ .

### QUESTÃO 07 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Um recipiente de vidro contendo gás tem uma lente convergente e uma fonte sonora presas a um suporte (A) que desliza no trilho (B) a velocidade constante. Um feixe laser (C), que ilumina o objeto (D), forma imagens reais nítidas por duas vezes em (E), separadas por uma diferença de tempo  $\Delta t$ , sendo que, entre a formação dessas duas imagens, chegam  $n$  bips (pulsos sonoros de mesma duração) no detector (F) e  $n - 1$  bips são emitidos pela fonte sonora. Considerando que o comprimento do recipiente é  $L$  e a distância focal da lente é  $f$ , determine a velocidade do som no gás.

#### Comentários

A diferença entre o número de bips recebidos pelo detector (F) e os emitidos pela fonte sonora se devem ao Efeito Doppler causado pela aproximação entre a fonte (que é transportada pelo carrinho). Seja  $v$  a velocidade do som no gás, temos que a frequência aparente percebida no detector é:

$$f_{ap} = \frac{v}{v - v_f} \cdot f_{real}$$

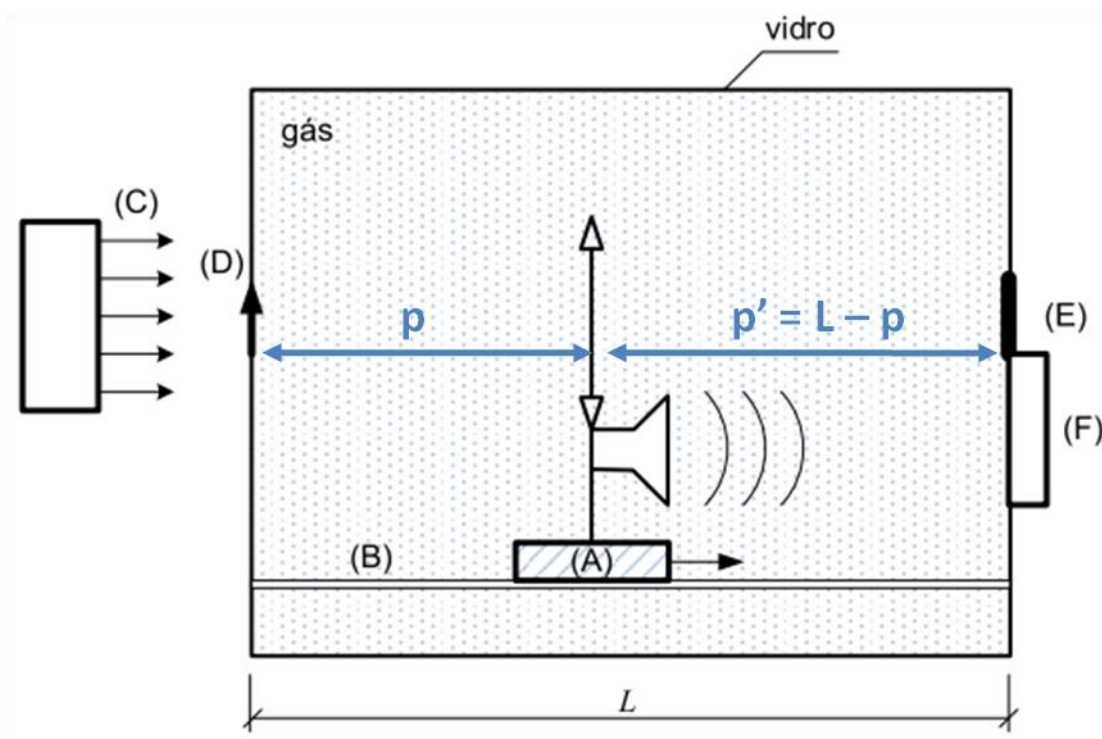
$$\frac{f_{ap}}{f_{real}} = \frac{v}{v - v_f}$$

$$\frac{n}{n - 1} = \frac{v}{v - v_f}$$

Usando as propriedades de razão e proporção, temos que:

$$n = \frac{v}{v_f} \therefore v = nv_f$$

O carrinho também transporta uma lente convergente.



Usando a equação das lentes, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{L - p} = \frac{(L - p) + p}{p(L - p)} = \frac{L}{p(L - p)}$$

Usando a propriedade de meios pelos extremos, temos:

$$\therefore p(L - p) = fL$$

$$pL - p^2 = fL$$

$$\therefore p^2 - pL + fL = 0$$

Temos, portanto, uma equação do segundo grau em  $p$ , cujas soluções são dadas pela Fórmula de Bhaskara.

$$p = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4fL}}{2.1} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4fL}}{2}$$

A diferença entre as duas raízes é, portanto:

$$\Delta p = \sqrt{L^2 - 4fL}$$

Como sabemos o tempo necessário para que o carrinho percorresse exatamente a distância  $\Delta t$ , podemos calcular a velocidade do carrinho.

$$v_f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\sqrt{L^2 - 4fL}}{\Delta t}$$

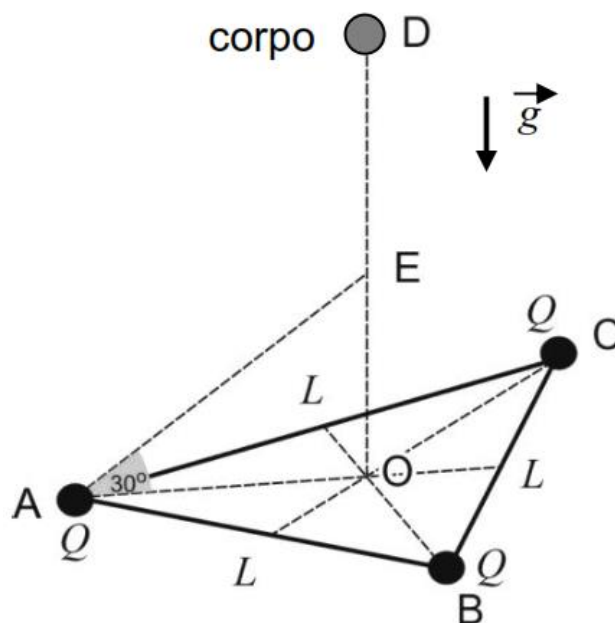
A partir da velocidade do carrinho, podemos calcular a velocidade do som no gás, pois já havíamos determinado a relação entre elas no início da resolução.

$$v = nv_f = \frac{n\sqrt{L^2 - 4fL}}{\Delta t}$$

$$\therefore v = \frac{n\sqrt{L^2 - 4fL}}{\Delta t}$$

**Gabarito:**  $v = \frac{n\sqrt{L^2 - 4fL}}{\Delta t}$ .

#### QUESTÃO 08 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



A figura apresenta três esferas de cargas positivas  $Q$  fixas nos vértices de um triângulo equilátero ABC de centro O e localizado no plano horizontal. Um corpo de massa  $m$ , posicionado no ponto D em  $t = 0$ , tem a ele grudadas milhares de micropartículas de cargas positivas e massas desprezíveis. O corpo sofre uma queda vertical até o ponto O. No intervalo  $0 \leq t \leq 5/3$  s, diversas micropartículas vão se soltando gradativamente do corpo, de modo que sua velocidade permanece constante. O restante das micropartículas desprende-se totalmente em  $t = 5/3$  s, exatamente no ponto E, no qual o ângulo entre os segmentos AO e

AE é de  $30^\circ$ . O corpo continua em movimento até atingir o plano ABC no ponto O em  $t = 8/3$  s.

Determine:

- a) a velocidade do corpo no intervalo  $0 \leq t \leq 5/3$  s;
- b) a altura inicial do corpo (comprimento DO) em  $t = 0$ ;
- c) a carga do corpo imediatamente antes do instante  $t = 5/3$  s, quando o restante das micropartículas se desprende;
- d) a carga inicial do corpo em  $t = 0$ .

**Observações:**

- considere a massa do corpo constante;
- despreze as dimensões do corpo;
- ao se desprenderem, as cargas das micropartículas não influenciam no movimento do corpo.

**Dados:**

- massa do corpo:  $m = 2,7$  kg;
- cargas fixas nos vértices do triângulo:  $Q = 10^{-4}$  C;
- aceleração da gravidade:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;
- constante dielétrica do meio:  $k = 9 \times 10^9$  Nm<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>;
- comprimentos dos lados do triângulo:  $L = 24$  m.

**Comentários**

a) Note que o segmento AO corresponde ao raio da circunferência circunscrita no triângulo equilátero, que é dado por:

$$AO = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

O segmento AE, por sua vez, é a hipotenusa do triângulo retângulo AOE. Ele pode ser calculado pelo cosseno do ângulo de  $30^\circ$ .

$$\begin{aligned} \cos 30^\circ &= \frac{AO}{AE} \\ \therefore AE &= \frac{AO}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 24}{3} = 16 \end{aligned}$$

Podemos calcular também a altura do ponto E, notando que ele é cateto oposto ao ângulo de  $30^\circ$  no triângulo retângulo AOE.

$$OE = h = AO \cdot \sin 30^\circ = \frac{2L}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{L}{3}$$



Exatamente no ponto E, a partícula deixa de apresentar carga, portanto, passou a sofrer queda livre, sujeita unicamente à ação da gravidade. Portanto, o tempo de queda do movimento pode ser calculado pela expressão:

$$OE = v_o t + \frac{gt^2}{2}$$

$$\frac{L}{3} = v_o t + \frac{gt^2}{2}$$

Observe que o tempo de queda foi igual a 1 segundo – que é a diferença entre  $8/3$  e  $5/3$ .

$$\frac{24}{3} = v_o \cdot 1 + \frac{10 \cdot 1^2}{2}$$

$$8 = v_o + 5$$

$$\therefore v_o = 8 - 5 = 3$$

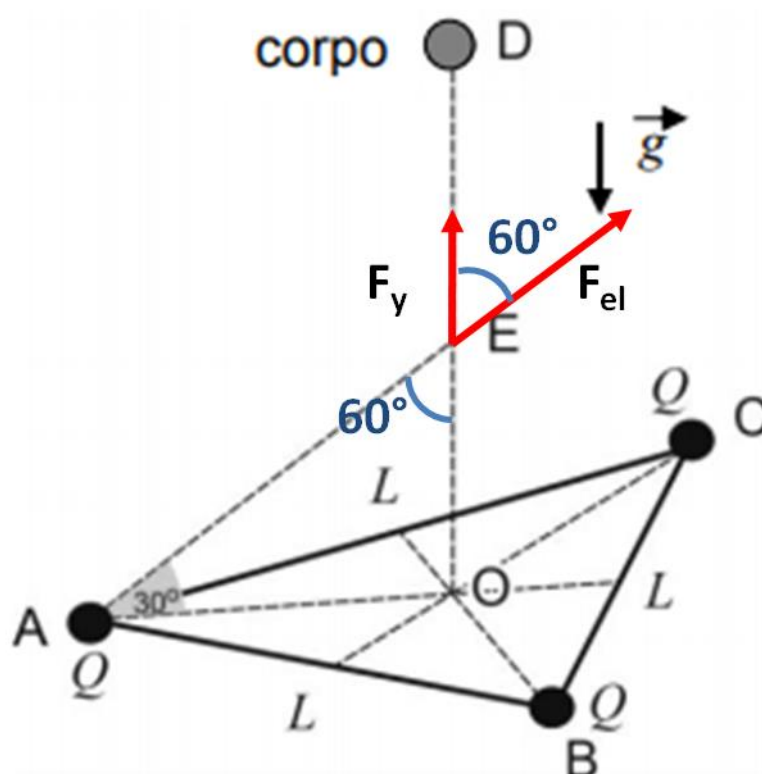
b) De acordo com as informações do enunciado, a queda do corpo do ponto D até o ponto E aconteceu com velocidade constante. Essa velocidade deve ser exatamente igual à velocidade inicial do movimento de queda livre, que foi calculada anteriormente. Portanto, o espaço percorrido entre os pontos DE é:

$$DE = v_o \Delta T = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$$

Portanto, a altura total do corpo no início do seu movimento (ou seja, o segmento DO) é:

$$DO = DE + OE = 5 + 8 = 13$$

c) No momento em que o corpo se encontra no ponto E, as forças geradas pelas três cargas no eixo  $x$  se equilibram. Porém, no eixo  $y$ , elas produzem uma soma que se contrapõe ao peso da carga.





Pela simetria da figura, os três ângulos entre as forças e a linha vertical são iguais a  $60^\circ$ . Portanto, a soma entre as 3 forças elétricas é:

$$F_t = 3F_y = 3F_{el} \cdot \cos 60^\circ = 3F_{el} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}F_{el}$$

Pela condição de equilíbrio:

$$P = F_t$$

$$mg = \frac{3}{2}F_{el}$$

A força elétrica pode ser calculada pela Lei de Coulomb.

$$F_{el} = \frac{KQ Q_{corpo}}{d^2} = \frac{KQ Q_{corpo}}{AE^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4} \cdot Q_{corpo}}{(16)^2}$$

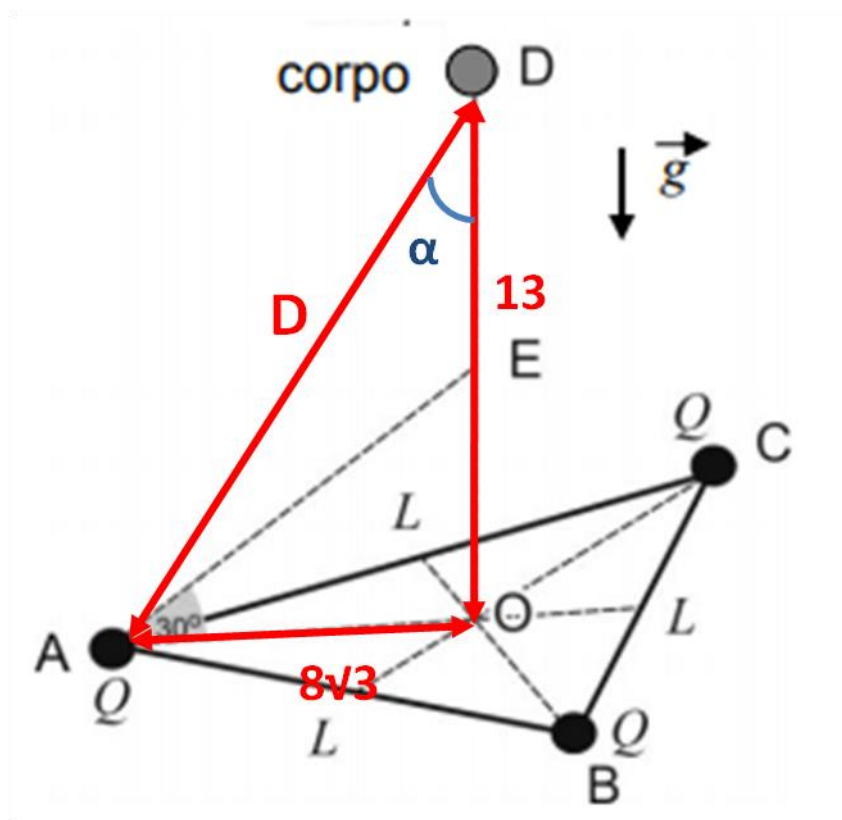
Portanto, temos que:

$$mg = \frac{3}{2}F_{el}$$

$$2,7 \cdot 10 = \frac{3}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^5}{(16)^2} \cdot Q_{corpo}$$

$$\therefore Q_{corpo} = \frac{2 \cdot 2,7 \cdot 10 \cdot (16)^2}{3 \cdot 9 \cdot 10^5} = \frac{2 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 256}{27 \cdot 10^5} = \frac{512}{10^5} = 512 \cdot 10^{-5} = 5,12 \cdot 10^{-3} C$$

d) A altura DO já foi calculada e sabemos o comprimento AO. Portanto, podemos calcular a distância AD entre o corpo e as cargas como a hipotenusa do triângulo retângulo AOD.



$$D^2 = 13^2 + (8\sqrt{3})^2 = 169 + 192 = 361$$

$$D = \sqrt{361} = 19$$

De forma análoga ao item anterior, as forças elétricas no eixo  $x$  se equilibram. Já a resultante entre as 3 forças no eixo  $y$  equilibram o peso do corpo.

$$P = F_t = 3F_{el} \cdot \cos \alpha$$

O cosseno do ângulo  $\alpha$  pode ser calculado no próprio triângulo AOD.

$$\cos \alpha = \frac{13}{D} = \frac{13}{19}$$

Substituindo os valores:

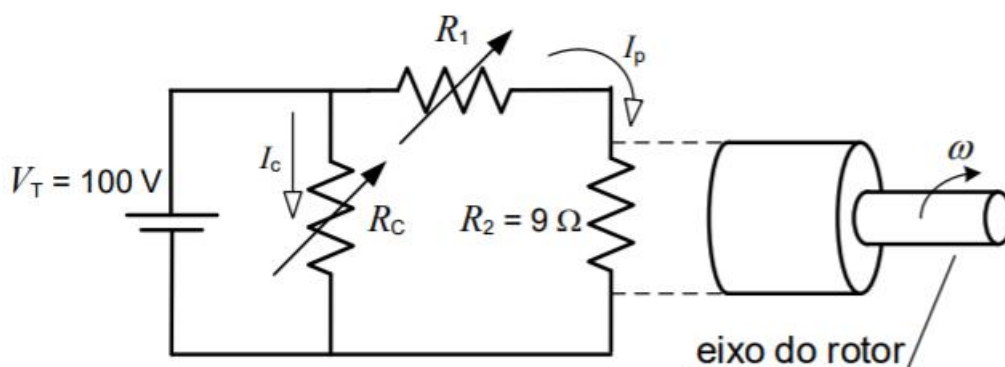
$$P = 3F_{el} \cdot \cos \alpha$$

$$mg = 3 \left( \frac{KQ Q_{corpo}}{D^2} \right) \cdot \cos \alpha$$

$$\therefore Q_{corpo} = \frac{mgD^2}{3KQ \cdot \cos \alpha} = \frac{2,7 \cdot 10 \cdot 19^2}{3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{13}{19}} = \frac{27 \cdot 19^2 \cdot 19}{27 \cdot 10^5 \cdot 13} = \frac{19^3}{13 \cdot 10^5} = 5,27 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

**Gabarito:** a) 3 m/s; b) 13 m; c)  $5,12 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ; d)  $5,27 \cdot 10^{-3} \text{ C}$

### QUESTÃO 09 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



A figura mostra o diagrama esquemático de um conversor eletromecânico que transforma a energia elétrica de entrada, fornecida pela fonte  $V_T$ , em energia mecânica na saída, utilizada para acionar o eixo do rotor. Nesse conversor, toda a potência dissipada no resistor  $R_2$  é transformada em potência mecânica empregada para acionar o eixo. Sabendo que a velocidade angular do eixo é 1800 rpm, pede-se:

- o torque no eixo do conversor, considerando que os reostatos  $R_1$  e  $R_C$  estão ajustados em  $1 \Omega$  e em  $50 \Omega$ , respectivamente;
- a nova velocidade de rotação do eixo, em rpm, se o reostato  $R_1$  for ajustado para  $2 \Omega$  e  $R_C$  continuar ajustado em  $50 \Omega$ , sabendo que o torque no eixo do motor é proporcional ao produto das correntes  $I_c$  e  $I_p$ ;
- o que deve ser feito para que o torque desenvolvido pelo eixo, com  $R_1$  ajustado em  $2 \Omega$ , volte a ser o mesmo das condições de funcionamento do item (a).
- o rendimento do sistema para as mesmas condições de funcionamento do item (c).



## Comentários

a) Analisando o circuito, temos:

$$V_T = R_C \cdot I_c = (R_1 + R_2) \cdot I_p$$

Usando os dados fornecidos, encontramos  $I_c$  e  $I_p$ :

$$100 = 50 \cdot I_c \Rightarrow I_c = 2A$$

$$100 = (1 + 9) \cdot I_p \Rightarrow I_p = 10A$$

Como toda a potência dissipada no resistor  $R_2$ , temos:

$$P = \tau \cdot \omega \Rightarrow R_2 \cdot I_p^2 = \tau \cdot \omega$$

Convertendo a velocidade angular para  $rad/s$ :

$$\omega = 1800 \text{ rpm} = 30 \text{ Hz} = 2\pi \cdot 30 \therefore \omega = 60\pi \text{ rad/s}$$

Substituindo os valores, obtemos o torque:

$$R_2 \cdot I_p^2 = \tau \cdot \omega \Rightarrow 9 \cdot 10^2 = \tau \cdot 60\pi$$

$$\therefore \tau = \frac{15}{\pi} \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) Como  $R_C$  não foi alterado, temos  $I_c' = 2A$ . Para  $R_1 = 2 \Omega$ :

$$100 = (2 + 9) \cdot I_p' \Rightarrow I_p' = \frac{100}{11} A$$

Como o torque no eixo do motor é proporcional ao produto das correntes  $I_c$  e  $I_p$ , temos que o novo torque é dado por:

$$\Rightarrow \tau' = \frac{I_c' \cdot I_p'}{I_c \cdot I_p} \tau = \frac{\frac{200}{11}}{20} \cdot \frac{15}{\pi} = \frac{10}{11} \cdot \frac{15}{\pi}$$

$$\therefore \tau' = \frac{150}{11\pi} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Assim, a nova velocidade de rotação do eixo é:

$$\tau' \cdot \omega' = R_2 \cdot (I_p')^2$$

$$\frac{150}{11\pi} \cdot \omega' = 9 \cdot \left(\frac{100}{11}\right)^2$$

$$\omega' = \frac{9 \cdot 100^2 \cdot 11\pi}{11^2 \cdot 150}$$

$$\therefore \omega' = \frac{600\pi}{11} \text{ rad/s}$$

c) Para que o torque desenvolvido pelo eixo volte a ser o mesmo das condições iniciais, devemos ter:

$$I_c \cdot I_p = 20$$



Para  $R_1 = 2 \Omega$ :

$$I_p = \frac{100}{11}$$

Logo:

$$I_c \cdot \frac{100}{11} = 20 \Rightarrow I_c = 2,2 \text{ A}$$

Para esse valor de corrente:

$$R_c \cdot I_c = V_T \Rightarrow R_c \cdot 2,2 = 100$$

$$\therefore \boxed{R_c \approx 45,45 \Omega}$$

Portanto, basta que  $R_c \cong 45,45 \Omega$  para satisfazer as condições do problema.

d) A potência total é dada por:

$$P_T = (I_c + I_p) \cdot V_T = \left( \frac{100}{11} + 2,2 \right) \cdot 100 = 1129,1 \text{ W}$$

A potência mecânica para acionar o eixo é:

$$P = R_2 \cdot (I_p)^2 = 9 \cdot \left( \frac{100}{11} \right)^2 = \frac{90000}{121} = 743,8 \text{ W}$$

Portanto, o rendimento do sistema é:

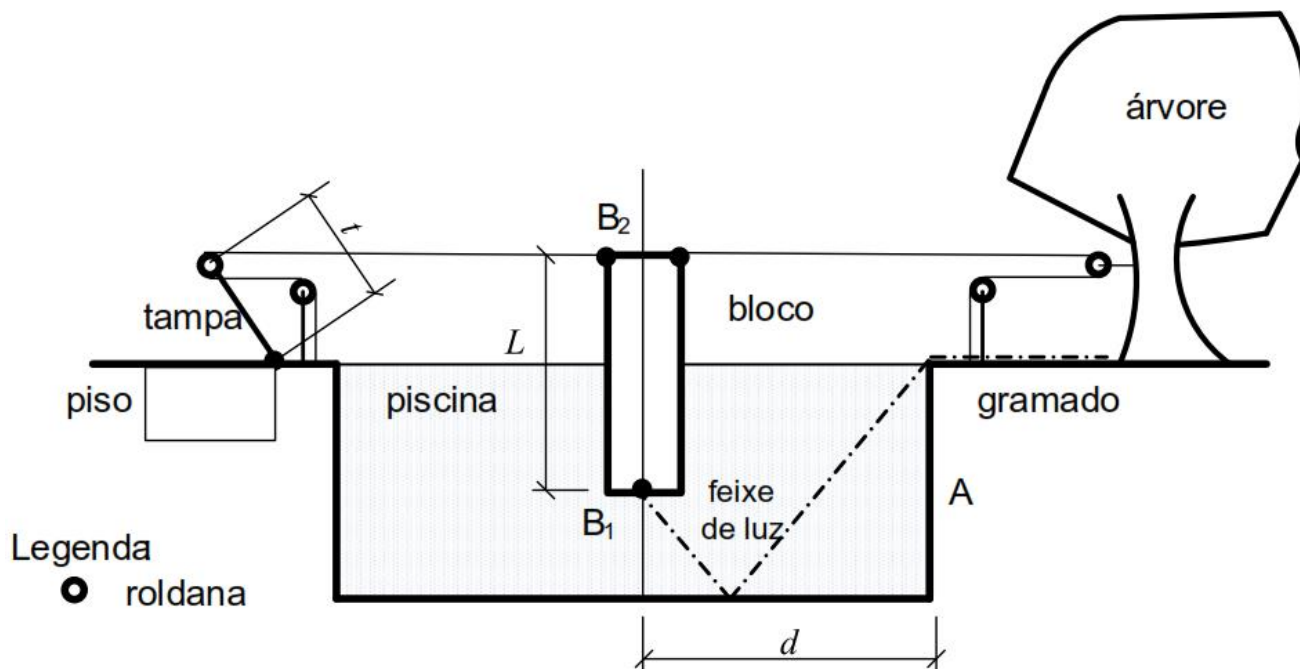
$$\eta = \frac{P}{P_T} = \frac{743,8}{1129,1} \approx 0,66$$

$$\therefore \boxed{\eta \approx 66\%}$$

**Gabarito:** a)  $\tau = \frac{15}{\pi} \text{ N} \cdot \text{m}$  b)  $\omega' = \frac{600\pi}{11} \text{ rad/s}$  c)  $R_c \approx 45,45 \Omega$  d)  $\eta \approx 66\%$



## QUESTÃO 10 - (2019/2020/IME 2ª FASE)



Um profissional de iluminação deseja projetar um sistema de feixe de luz capaz de iluminar o fundo reflexível de uma piscina e o gramado posicionado logo após o lado A. Sua ideia é submergir parcialmente um bloco maciço em formato de paralelepípedo reto, com uma fonte luminosa presa em sua base submersa  $B_1$ , que emite um feixe de luz que percorre a trajetória mostrada na figura. O bloco é fixado por dois cabos horizontais presos a sua base não submersa  $B_2$  e ortogonais ao lado A da piscina, sendo um deles amarrado, por meio de roldanas, na tampa articulada do compartimento onde é guardado o material de limpeza da piscina e o outro, na árvore. Considere que a piscina esteja completamente cheia com água e que a tração aplicada nos cabos seja metade do seu valor máximo para ruptura, especificado pelo fabricante. Calcule:

- a altura  $L$  do bloco;
- a distância  $d$  em que o bloco deve ser posicionado, em relação ao lado A da piscina.

### Dados:

- profundidade da piscina: 3 m;
- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água da piscina:  $5/3$ ;
- massa específica da água:  $1 \text{ g/cm}^3$ ;
- massa específica do material do bloco:  $0,5 \text{ g/cm}^3$ ;
- comprimento  $t$  da tampa: 1 m;
- massa da tampa: 8 kg;
- tração máxima até a ruptura nos cabos: 30 N;
- aceleração da gravidade:  $10 \text{ m/s}^2$ .

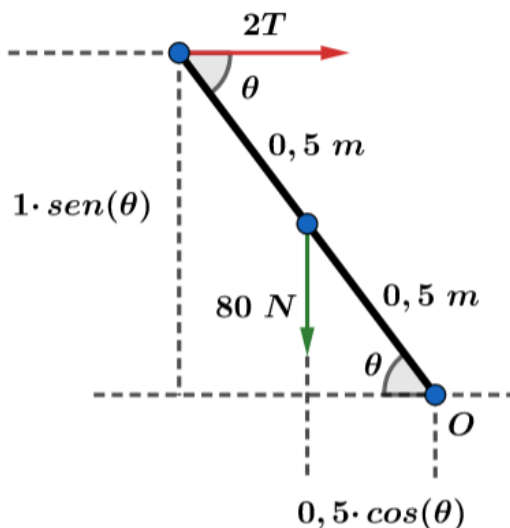


### Observações:

- despreze o atrito e as dimensões das quatro roldanas;
- considere a árvore uma estrutura rígida;
- as roldanas estão fixas.

### Comentários:

a) Na tampa, temos a seguinte condição de equilíbrio:



Com  $O$  como polo, podemos escrever que:

$$2T \cdot \sin(\theta) \cdot 1,0 = 80 \cdot \cos(\theta) \cdot 0,5$$

Sendo a tensão  $T$  a metade da tensão máxima que vale 30 N:

$$2 \cdot 15 \cdot \sin(\theta) = 40 \cdot \cos(\theta)$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{5} \text{ e } \sin(\theta) = \frac{4}{5}$$

Dessa forma, a altura do bloco fora da água é igual a  $L_1 = 1 \cdot \sin(\theta) = 0,8 \text{ m}$ . Para determinar a altura do bloco que está submersa, devemos analisar a condição de equilíbrio na vertical. Note que os cabos estão sempre na horizontal. Logo, para o corpo ter equilíbrio vertical, basta que o peso seja igual ao empuxo. Portanto:

$$P = E$$

$$m \cdot g = \rho_{\text{líq}} \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g$$

$$\rho_{\text{bloco}} \cdot A_{\text{transversal}} \cdot (L_1 + L_2) = \rho_{\text{líq}} \cdot A_{\text{transversal}} \cdot L_2$$

Substituindo valores, vem:

$$\frac{L_1 + L_2}{2} = L_2$$

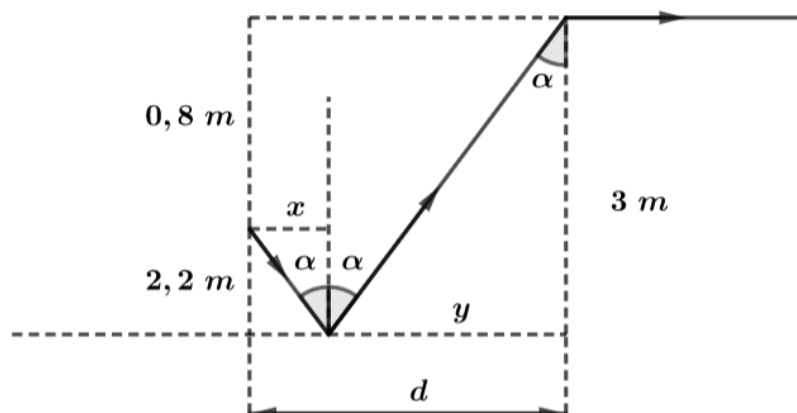
$$L_2 = L_1 = 0,8 \text{ m}$$

Portanto:

$$\boxed{L = L_1 + L_2 = 1,6 \text{ m}}$$



b) Para determinar a distância  $d$ , devemos analisar os raios refletidos e refratados. Para isso, vamos observar a seguinte figura da trajetória dos raios:



Pela lei de Snell no ponto de reflexão total, temos:

$$\frac{5}{3} \cdot \sin(\alpha) = 1 \cdot 1$$

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$

Portanto:

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{5} \text{ e } \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$$

Pela figura,  $y$  é igual a:

$$y = 3 \cdot \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ m}$$

Por outro lado:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3}{4} = \frac{x}{2,2}$$

$$x = 1,65 \text{ m}$$

Logo:

$$d = x + y = 1,65 + 2,25$$

$$\boxed{d = 3,9 \text{ m}}$$

**Gabarito: a) 1,6 m b) 3,9 m**

