高等微积分 I-1 (简体中文版)

度量空间、拓扑空间和序列

作者：郑志豪

读高微就如吃榴梿，你必需有技巧性地把坚硬的刺刺外
壳撬开，才能享用香甜浓郁营养丰富的果肉。

高等微积分 I-1 目录

序言

高等微积分在一般的数学训练中佔据最基本的位置，它是从基本的数字计算到高阶的抽象思考的必经之路。许多学生对这门课感到焦虑与害怕。传统的一些课本对一些学生而言，特别是还只习惯于微积分的计算的学生，产生很大的障碍与恐惧。为了能稍微化解学生的学习问题，并让学生更愿意投入到这门课中，本书作者编写了几本高等微积分课本。这些书源于作者在台湾清华大学数学系教授的几次高等微积分的讲义。因应科技的进步，学习的方式可以更多样化，所以这些书的一个目标是使用手机于学习上，让学生方便在手机上阅读，而且不再只是无声的黑白文字，书中必须包含许多颜色和图形，有些图形还能动。另一方面，在这些书中，所有的证明都应该尽量简单、易于理解和逻辑完整，论证不能跨度太大，每个使用到的结果都应该能往前追溯。为了方便在手机上使用，本书的档案不可太大，因此高等微积分一的内容根据考试分为两本书：高等微积分 I-1 和高等微积分 I-2，每本书包含两次考试。书中附有考试试题和模拟考试试题，每一章节都附有练习题。基于一些基本的微积分知识，本书可以视为自完备并适合自学，能够让学生的高等微积分知识形成一个完整的体系。

高等微积分是一门为期两学期的课程，每学期四学分，每週上课 200 分钟，再加上每週 2 小时的演习课、每週的作业、每学期的四次考试，可以说，这是数学系中最繁重的课程。在现代科学和技术产业中，数学知识和抽象思维的能力变得越来越重要。数学与自动化过程、金融模型和大数据处理等密不可分，单靠微积分知识是不够的。这也是为什麼尽管这门课程非常繁重，仍然吸引了来自电机工程、计算机科学、金融工程、管理学和医学院等各个领域的学生来修课。

本书主要翻译自作者的英文版高等微积分课本：Advanced calculus I-1 Second edition. 根据经验，英文确实会拖慢部分学生吸收数学的速度。若课程内容简单可能无所谓，但当课程内容已不好理解，授课者应尽量排除与内容无关的干扰，减少学生掌握数学内容的障碍。为了与之后课程的衔接，所有专有名词旁都附有其英文名词，书本最后几页也有中英文索引。

作者感谢所有之前修过课的同学对这本书提供的意见及找到的打字错误，若读者有任意见或发现书中其他错误，非常欢迎以以下电子邮件通知作者：jyhhaur@math.nthu.edu.tw

高等微积分 I-1 的主要参考资料为：

1. Real mathematical analysis by Pugh ([1]);
2. Elementary classical analysis by Marsden and Hoffman ([2]);
3. Principles of mathematical analysis by Rudin ([3]);
4. Wikipedia.

书中的一些漂亮的图片是从网站 pixabay.com 获得。

本版书将学习高等微积分类比于吃榴梿。以下四个特点是作者自身感受：

挑战性：榴梿的外壳坚硬，需要一定的技巧和力量才能打开，就像学习困难的数学需要时间和努力才能理解。

耐心：你需要耐心地等待榴梿成熟，才能享受到它的美味。同样，学习数学也需要耐心，因为理解新的概念和解决困难的问题需要时间。

回报：尽管初期可能会遇到困难，但一旦你打开榴梿并尝到了它的果肉，或者你终于理解了一个困难的数学概念，那么你会觉得所有的努力都是值得的。

不同的体验：每个人对榴梿的喜好都不同，有些人可能喜欢它独特的味道和口感，而有些人可能不喜欢。同样，每个人对数学的理解和兴趣也是不同的，有些人可能对其充满热情，而有些人可能觉得它很困难。

无论如何，希望读者能从这本书得到一点点的收获。

郑志豪
国立清华大学数学系
新竹, 台湾

网页: http://www.math.nthu.edu.tw/∼jyhhaur

第 1 章 集合论及基数

1.1 回顾

以下我们回顾一些常用的集合的符号、基本的逻辑及集合论的运算。实数的构造会在第 3 章中给出。

1.1.1 数字的集合及逻辑

自然数(natural number) 的集合 (set)是

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

整数(integer) 的集合是

$$\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

有理数(rational number) 的集合是

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

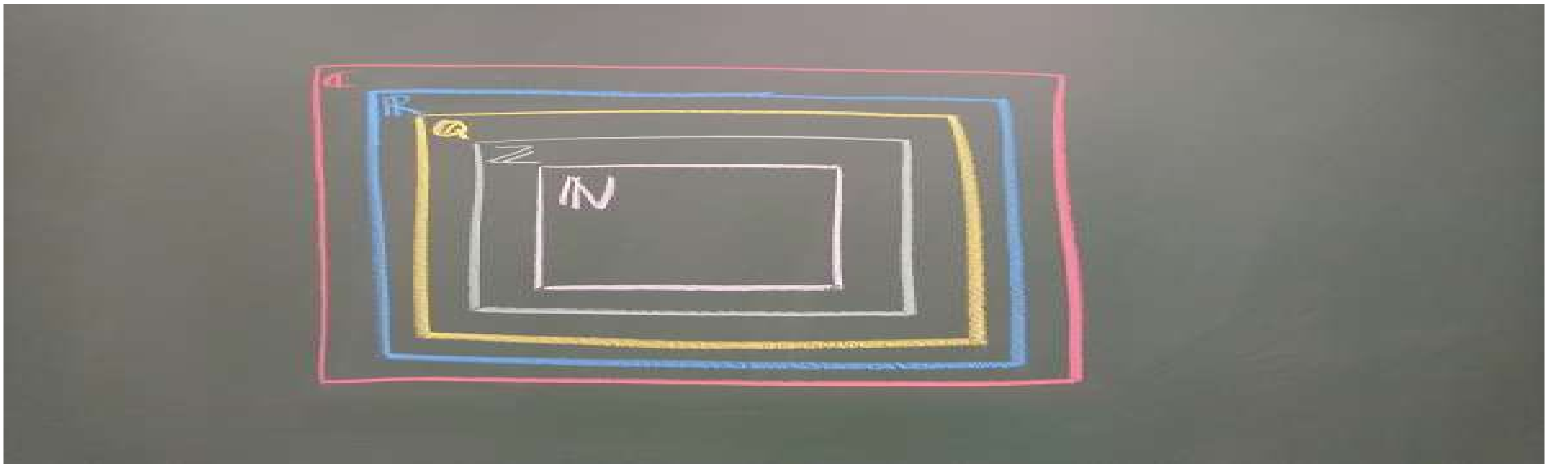
实数(real number) 的集合是 $\mathbb{R}$。实数如

$$\pi, e, \sqrt{2}, -2^{\sqrt{3}}$$

不是有理数。不是有理数的实数称为无理数(irrational number)。 复数(complex number) 的集合是

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

以下是几个数的集合的包含关系：



让 P, Q, R 是一些陈述(statement) 。以下两个式子是证明中常用的两种逻辑等价(logical equivalence)形式。

1. $$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P) \equiv (\neg P \vee Q)$$

2. $$(P \Rightarrow Q \vee R) \equiv (P \wedge \neg Q \Rightarrow R)$$

定义 1.1.1

一个谓词(predicate) $P(x)$ 把变数 x 对应到一个陈述。

1. 符号
$$(\forall x \in A) P(x)$$
被定义为
$$x \in A \Rightarrow P(x)$$

2. 符号
$$(\exists x \in A) Q(x)$$
被定义为
$$(x \in A) \wedge Q(x)$$

♣

以下两个是常用的逻辑等价形式。

命题 1.1.1

1.
$$\neg((\forall x \in A)P(x)) \equiv (\exists x \in A)(\neg P(x))$$

2.
$$\neg((\exists x \in A)P(x)) \equiv (\forall x \in A)(\neg P(x))$$

证明

1.
$$\neg((\forall x \in A)P(x)) \equiv \neg (x \in A \Rightarrow P(x)) \equiv (x \in A) \wedge \neg P(x) \equiv (\exists x \in A)\neg P(x)$$

2.
$$\begin{aligned}\neg((\exists x \in A)P(x)) &\equiv \neg ((x \in A) \wedge P(x)) \equiv \neg (x \in A) \vee \neg P(x) \\ &\equiv (x \in A) \Rightarrow \neg P(x) \equiv (\forall x \in A)(\neg P(x))\end{aligned}$$

1.1.2 集合论

给定集合 $A_1, A_2, A_3, \ldots.$。这些集合的 联集(union) 是
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x : x \in A_i \text{ 对于 } \textbf{某些 } i \in \mathbb{N}\}$$
而这些集合的 交集(intersection) 是
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x : x \in A_i \text{ 对于 } \textbf{每个 } i \in \mathbb{N}\}$$
更一般地，如果 B 是一个集合使得对于每个 i 在 B 中都对应到一个集合 A_i，则 由 B 标明的集合的联集 被定义为
$$\bigcup_{i \in B} A_i := \{x : x \in A_i \text{ 对于 } \textbf{某些 } i \in B\}$$

而 由 B 标明的集合的交集 被定义为

$$\bigcap_{i \in B} A_i := \{x : x \in A_i \text{ 对于 } \textbf{每个}\ i \in B\}$$

接下来，我们回顾笛卡儿积的定义。

定义 1.1.2 (笛卡儿积)

集合 X 和 Y 的 笛卡儿积(Cartesian product) 是集合

$$X \times Y := \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

其中 (x, y) 是一个有序对(ordered pair)。集合 X 的n 次笛卡儿积(n-th Cartesian product) 是集合

$$X^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in X, i = 1, 2, ..., n\}$$

其中 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是一个有序 n 元组 (ordered n-pair)。 ♣

定义 1.1.3

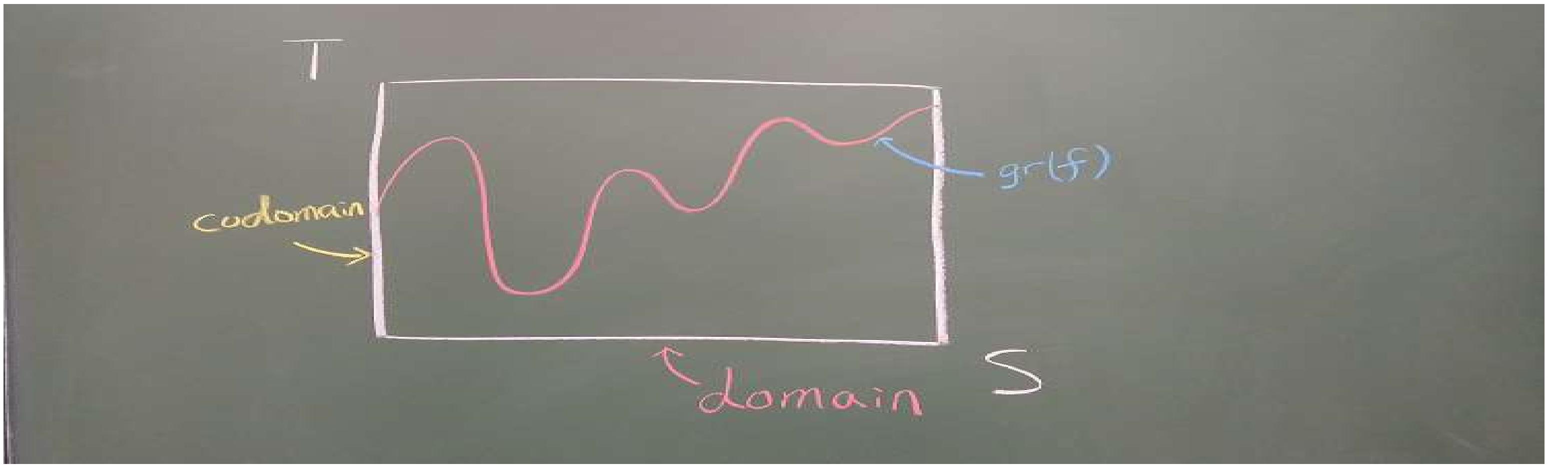
从集合 S 到集合 T 的 函数(function) $f : S \to T$ 是一个子集

$$gr(f) \subseteq S \times T$$

具有以下性质：对于任何 $s \in S$，都存在一个 唯一的 $t \in T$ 使得 $(s, t) \in gr(f)$。通常我们写成

$$f(s) = t$$

集合 S 被称为 f 的 定义域(domain)，集合 T 被称为 f 的 对应域(codomain)。 ♣



例题 1.1.1 让

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

定义为

$$f(x) = x^2$$

和

$$g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$$

定义为

$$g(x) = x^2$$

这两个函数是两个不同的函数，因为它们有不同的对应域。

定义 1.1.4

如果 $f : S \to T$ 是一个函数，且 $A \subseteq S$，我们定義

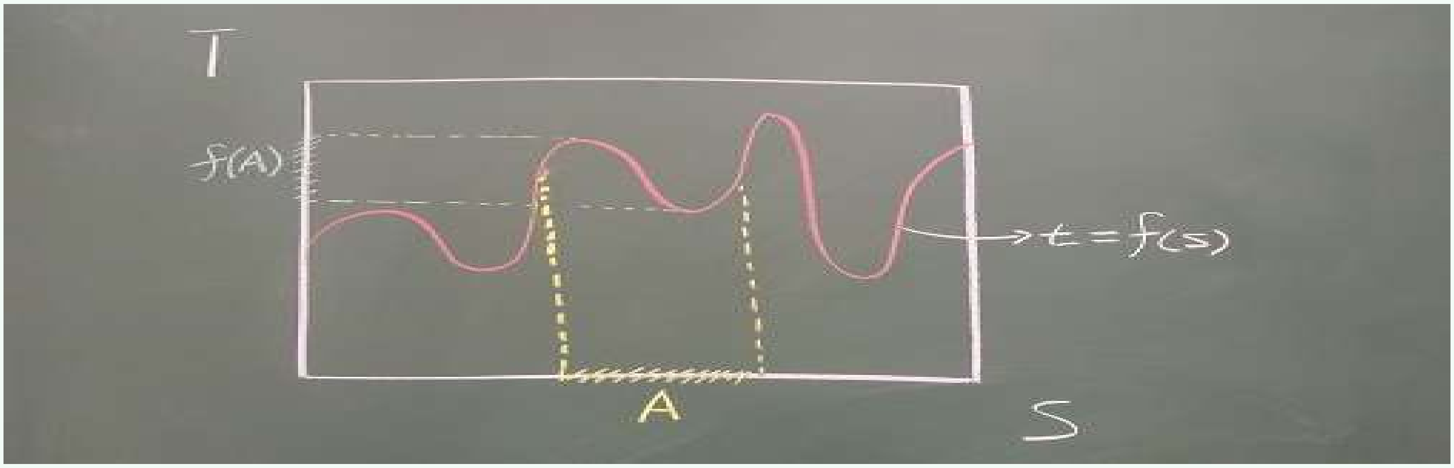
$$f(A) := \{f(a)|a \in A\}$$

并将 $f(A)$ 称为 A 在 f 下的 象(image)。

如果 $B \subseteq T$，我们定义

$$f^{-1}(B) := \{s \in S|f(s) \in B\}$$

并将 $f^{-1}(B)$ 称为 B 在 f 下的 原象(pre-image)。



♣

定义 1.1.5

设 $f: S \to T$ 是一个函数。我们说

1. f 是 单射(injective) 的，如果每当 $x_1 \neq x_2$，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$；
2. f 是 满射(surjective) 的，如果对于每个 $t \in T$，都存在 $s \in S$ 使得 $f(s) = t$；
3. f 是 双射(bijective) 的，如果 f 同时是 单射和满射，我们将这样的 f 称为 双射函数(bijective function)。

如果 $f: S \to T$ 是一个双射函数，那麽函数 $g: T \to S$ 定义为

$$g(t) := f^{-1}(\{t\})$$

被称为 f 的 反函数(inverse function)。

♣

1.2 可数和不可数集合

定义 1.2.1 (相同基数)

如果存在一个双射函数从集合 A 到集合 B，我们称集合 A 和 B 具有相同的基数(same cardinality)。

请注意，如果 A 和 B 具有相同的基数，利用反函数，我们也可看出 B 和 A 也具有相同的基数。

定义 1.2.2

如果存在一个正整数 N 和一个双射函数

$$f : \{1, 2, ..., N\} \to S$$

则称集合 S 为有限(finite) 的。空集被定义为有限集合。一个不是有限的集合被称为无限(infinite) 的。一个无限集合 S 被称为可计数(denumerable) 的如果存在一个双射函数

$$f : \mathbb{N} \to S$$

一个有限或可计数的集合被称为可数(countable) 的。一个不是可数的集合被称为不可数(uncountable) 的。

我们使用以下的图示来展示这些分类：

$$\text{集合}\begin{cases}\text{可数集合}\begin{cases}\text{有限集合}\\\text{可计数集合}\end{cases}\\\text{不可数集合}\end{cases}$$

$$\text{集合}\begin{cases}\text{有限集合}\\\text{无限集合}\begin{cases}\text{可计数集合}\\\text{不可数集合}\end{cases}\end{cases}$$

例题 1.2.2 证明 $\mathbb{Z}$ 是可计数集合。

证明 将 $\mathbb{Z}$ 的元素列出：$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$。定义函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ 如下：

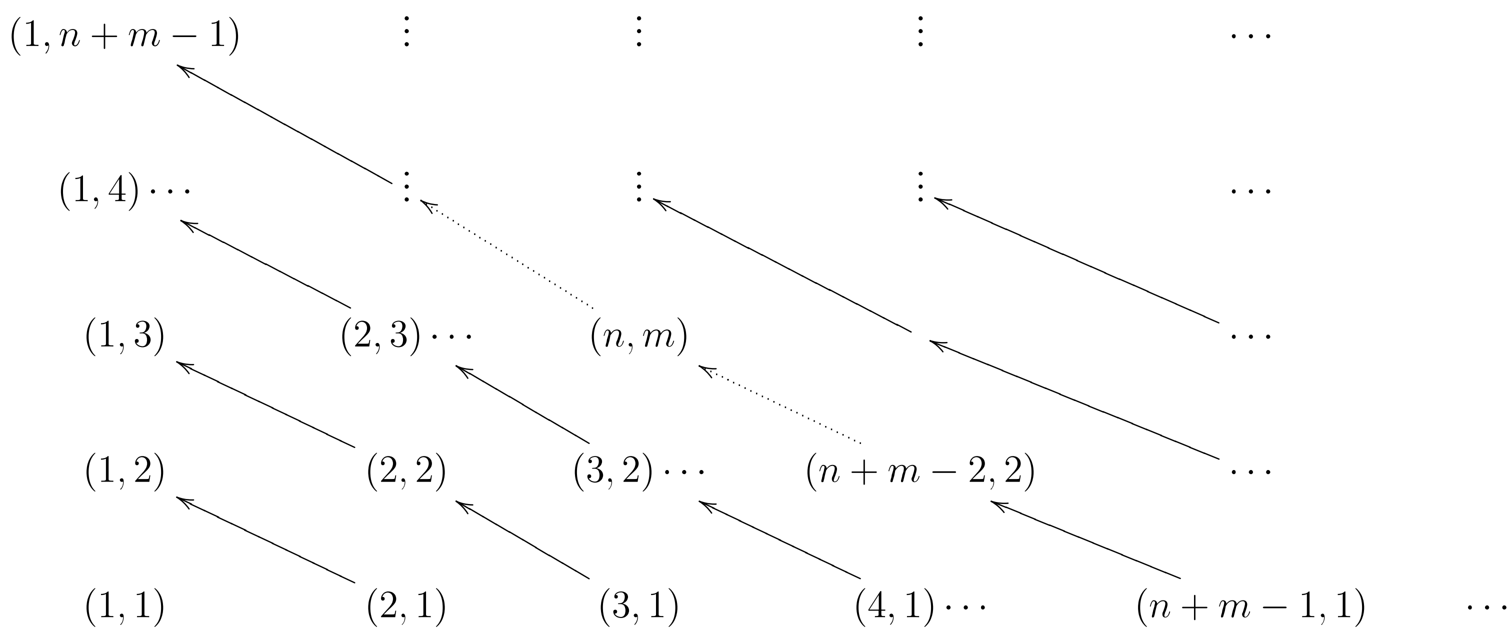
$$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & ,\quad \text{如果} n \text{ 是偶数}\\ -\frac{n-1}{2} & ,\quad \text{如果} n \text{ 是奇数}\end{cases}$$

那麽 f 是一个双射函数，因此 $\mathbb{Z}$ 是可计数的。

命题 1.2.1

$\mathbb{N}^2=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可计数的。

解 我们将 $\mathbb{N}^2$ 的元素排列成以下的阵列，然后将 $\mathbb{N}^2$ 的元素沿着 45° 线从底部行的元素到左侧列的元素排列成一个无限序列：



在通过 (n,m) 座标的那条斜线下方的三角形包含的元素个数是

$$1+2+\cdots+(n+m-2)=\frac{(n+m-2)(n+m-1)}{2}$$

我们定义一个函数 $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$

$$f(n,m)=\frac{(n+m-2)(n+m-1)}{2}+m$$

现在我们声明 f 是一个双射函数。我们先证明 f 是单射的。对于 (n_1,m_1) 和 (n_2,m_2)，我们

需要证明：

$$f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$$

我们分三种情况来考虑：

情况 1： $n_2 + m_2 > n_1 + m_1$

假设

$$n_2 + m_2 = n_1 + m_1 + k,\ \text{其中} k \geq 1$$

那麽

$$\begin{aligned} f(n_2, m_2) &= \frac{(n_1 + m_1 + k - 2)(n_1 + m_1 + k - 1)}{2} + m_2 \\ &= \frac{(n_1 + m_1)^2 - 3(n_1 + m_1) + 2k(n_1 + m_1) + (k-1)(k-2)}{2} + m_2 \\ &= \frac{(n_1 + m_1)^2 - 3(n_1 + m_1) + 2}{2} + k(n_1 + m_1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} + m_2 - 1 \\ &> \frac{(n_1 + m_1 - 2)(n_1 + m_1 - 1)}{2} + m_1 \\ &= f(n_1, m_1) \end{aligned}$$

情况 2： $n_2 + m_2 = n_1 + m_1$

如果 $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$，则 $m_1 = m_2$ 且 $n_1 = n_2$。这违反了 (n_1, m_1) 和 (n_2, m_2) 不相等的假设。因此 $f(n_1, m_1) \neq f(n_2, m_2)$。

情况 3： $n_2 + m_2 < n_1 + m_1$

将情况 1 中 (n_1, m_1) 和 (n_2, m_2) 的角色互换，我们有

$$f(n_2, m_2) < f(n_1, m_1)$$

这显示了 f 是单射的。为了证明 f 是满射的，让 $M \in \mathbb{N}$。取 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{(N-2)(N-1)}{2} < M \leq \frac{(N-1)N}{2}$$

定义

$$m := M - \frac{(N-2)(N-1)}{2} \ \text{和}\ n := N - m$$

然后 $n+m=N$ 且

$$\begin{aligned} f(n,m) &= \frac{(n+m-2)(n+m-1)}{2}+m \\ &= \frac{(N-2)(N-1)}{2}+M-\frac{(N-2)(N-1)}{2} \\ &= M \end{aligned}$$

这显示 f 是满射的。因此 $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 是一个双射函数。让 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$ 为 f 的反函数。因为 g 是双射函数，$\mathbb{N}^2$ 是可计数的。

让我们回顾一下自然数的良序原理。

定理 1.2.1 (良序原理 (well-ordering principle))

自然数的每个非空子集都有一个最小元素。 ♡

我们有以下的结果。

定理 1.2.2 (一个可数集合的子集也是可数的)

如果 $f:A\to S$ 是一个单射函数，且 S 是可数的，那麽 A 也是可数的。 ♡

证明 假设 A 不是有限的。我们需要证明 A 是可计数的。由于 f 是单射，函数 $f:A\to f(A)$ 是满射的，因此 $f(A)$ 是一个无限集合。但是 $f(A)\subset S$，S 必须是无限的，加上 S 是可数的，我们知道 S 是可计数的。将 S 的元素列为

$$\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$$

定义

$$N=\{i\mid s_i\in f(A)\}\subset\mathbb{N}$$

根据良序原理 1.2.1，存在一个最小的正整数 $n_1\in N$。我们有 $s_{n_1}\in f(A)$。

假设我们已经选择了 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，使得 $s_{n_1},s_{n_2},\ldots,s_{n_k}$ 在 $f(A)$ 中。由于 $f(A)$ 是无限的，$f(A)-\{s_{n_1},\ldots,s_{n_k}\}$ 非空。定义

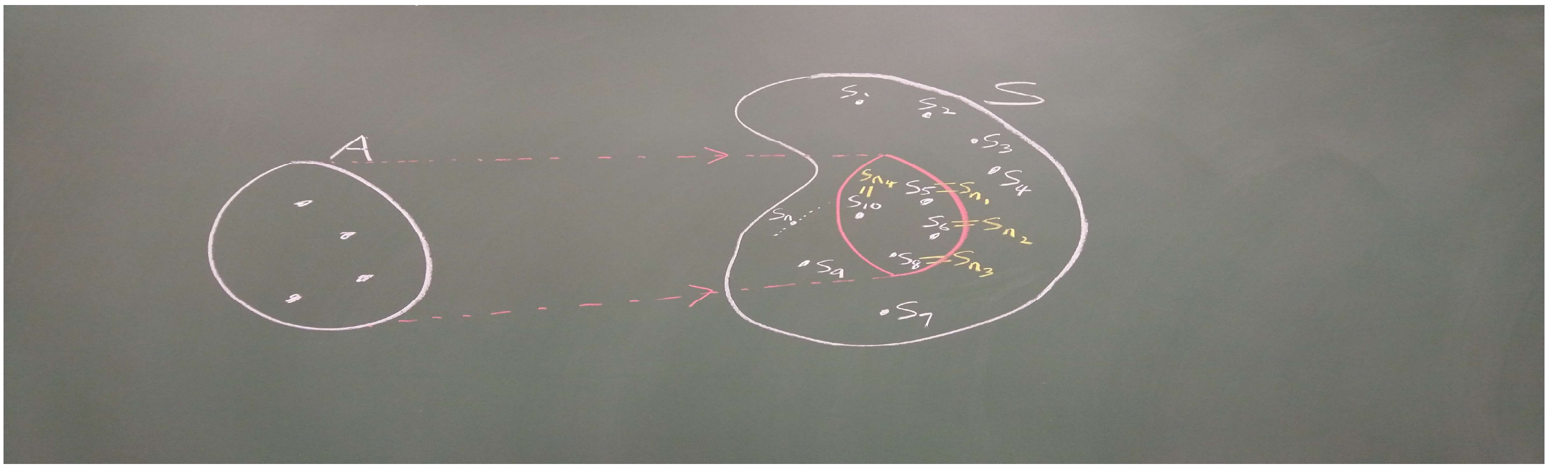
$$M:=\{i\mid s_i\in f(A)-\{s_{n_1},\ldots,s_{n_k}\}\}\subset\mathbb{N}$$

根据良序原理，存在一个最小的正整数 $n_{k+1} \in M$。我们有 $n_{k+1} > n_k$，否则 $s_{n_{k+1}}$ 会在之前被选择。注意 $s_{n_{k+1}} \in f(A)$。

对于任意 $s_t \in f(A)$，最多选择 t 次，s_t 就会被选到。因此，所有 $f(A)$ 中的元素被排成

$$\{s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \ldots\}$$

定义一个函数 $g : \mathbb{N} \to f(A)$，将 k 映射到 s_{n_k}。根据构造，g 是双射的，因此 $f(A)$ 是可计数的。由于 $f : A \to f(A)$ 是双射的，A 也是可计数的。



推论 1.2.1

每个可计数集合的无限子集都是可计数的。 ♢

证明 让 S 是一个可计数的集合，$A \subset S$ 是一个无限子集。令 $f : A \to S$ 是包含映射(inclusion)，即对于 $a \in A$，

$$f(a) = a$$

那麼 f 是单射。根据上面的结果，A 是可数的，并且根据假设，A 是一个无限集合，因此 A 是可计数的。

注 在证明数学结果时，一种非常有用的方法是所谓的 "反证法"。该策略是我们假设与我们要证明的相反的东西，然后通过一些数学论证来得出一个与已知事实矛盾的结论。这意味着我们所做的假设是不成立的，因此证明了我们想要的结果。这种方法将在整个课程中使用。

我们通过以下结果来举例说明“反证法”的方法。

推论 1.2.2

一个可数集合的任何子集都是可数的。 ♢

证明 让 S 是一个可数集合。假设存在一个子集 $A \subset S$ 是不可数的。根据不可数集合的定义，A 是一个无限集合。由于 $A \subseteq S$，S 也是无限的。那麽 S 是可计数的。根据上面的定理，A 是可计数的。这与我们的假设矛盾。因此，不存在 S 的不可数子集。

定理 1.2.3 (可数个可数集的联集仍然是可数的)

若 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个可数集合的序列，则

$$S := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

是可数的。 ♡

证明 我们将 E_n 的元素列举为

$$x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots.$$

如果 E_n 是有限的集合，我们将 E_n 的最后一个元素无限次重复，即，我们让

$$x_{ni} = x_{nk}$$

对于所有 $i \geq k$，其中

$$k = |E_n| := \ E_n \text{ 的元素个数}$$

因此，我们有一个数组

$$
\begin{tikzcd}
x_{14} & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
x_{13} & x_{23} \arrow[ul] & x_{33} \arrow[ul] & x_{43} \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
x_{12} & x_{22} \arrow[ul] & x_{32} \arrow[ul] & x_{42} \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
x_{11} & x_{21} \arrow[ul] & x_{31} \arrow[ul] & x_{41} \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

根据命题 1.2.1，$\mathbb{N}^2$ 是可数的，因此存在一个双射函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$。定义函数 $g:\mathbb{N}\to S$ 为

$$g(n) := x_{f(n)}$$

那麽 g 是满射，但 g 可能不是单射。对于 S 中的 s，定义

$$h(s) := \ g^{-1}(s) \text{ 中的最小自然数}$$

其中

$$g^{-1}(s) = \{n \in \mathbb{N} | g(n) = s\}$$

是 g 的原象。那麽 $h:S\to\mathbb{N}$ 是单射。由于 $\mathbb{N}$ 是可数的，根据定理1.2.2, S 也是可数的。

命题 1.2.2

$\mathbb{Q}$ 是可计数的。

证明 对于 $n\in\mathbb{N}$，定义

$$E_n := \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}\}$$

设函数 $f:\mathbb{Z}\to E_n$ 为

$$f(m) := \frac{m}{n}$$

则 f 是双射的。因此，E_n 是可数的。由于

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

根据上面的结果，$\mathbb{Q}$ 是可数的。由于 $\mathbb{Q}$ 具有无限多个元素，它是可计数的。

推论 1.2.3

设 X 是一个可数集合。如果对于每个 $x \in X$，E_x 是一个可数集合，那麽

$$\bigcup_{x \in X} E_x$$

是可数的。 ♢

证明 由于 X 是可数的，我们可以列出 X 的元素为

$$\{x_1, x_2, x_3, ...\}$$

并约定如果 X 是有限的，我们让 $x_k = x_n$ 对于所有 $k > |X|$。因为

$$\bigcup_{x \in X} E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{x_i}$$

根据上面的定理，结果成立。

定理 1.2.4

如果 X 和 Y 都是可数集合，那麽笛卡尔积

$$X \times Y$$

是可数的。 ♡

证明 对于 $x \in X$，定义

$$Y_x := \{(x, y) | y \in Y\}$$

定义一个函数 $f : Y \to Y_x$ 为

$$f(y) = (x, y)$$