Capítulo 1

El misterioso movimiento del señor Brown

> Temía que el mundo que me rodeaba pudiera empezar en cualquier momento a moverse, a deformarse, primero lenta y luego bruscamente, a disgregarse, a transformarse, a perder todo sentido.
>
> *ERNESTO SABATO, Sobre héroes y tumbas.*

1.1. Un poco de historia

Esta historia comienza en el laboratorio de un botánico escocés llamado Robert Brown. Nacido en 1773 en Montrose, Escocia, Brown fue un meticuloso botánico conocido por su trabajo de documentación de la flora australiana, así como por hacer la primera referencia al núcleo celular en unos estudios sobre la estructura microscópica de las orquídeas.[1]

En uno de sus estudios de 1827, con el conciso título *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*, Brown observó bajo el microscopio granos de polen sumergidos en agua, encontrando que no estaban en reposo sino que manifestaban un extraño movimiento zigzagueante.[2] En palabras del físico-químico premio Nobel Jean Perrin, cada partícula "[...] en lugar de hundirse con regularidad, se acelera con un movimiento extremadamente agitado y totalmente aleatorio [...]. Cada partícula gira de acá para allá, se eleva, se hunde y se vuelve a elevar, sin que jamás tienda al reposo".[3] En la figura 1.1 se puede observar la representación gráfica que hizo Perrin del movimiento de partículas coloidales de 0,52 micrómetros de radio. Cada punto representa la posición de una partícula cada 30 segundos.

En un principio no se le dio demasiada importancia a lo que desde entonces comenzó a llamarse *movimiento browniano*. De hecho, el propio Brown parecía otorgarle más importancia al cambio de forma que sufrían las partículas de polen a lo largo de sus trayectorias.

El movimiento browniano comenzó a ser objeto de interés cuando pasó del ámbito de la botánica al de la física. A finales del siglo XVIII y principios del XIX tenía lugar una ardua disputa acerca de la naturaleza atómico-molecular de la materia. Los "atomistas", encabezados por James Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann habían

[1] Brown (1814, 1866).

[2] Este estudio aparece también en Brown (1866).

[3] Perrin (1909).

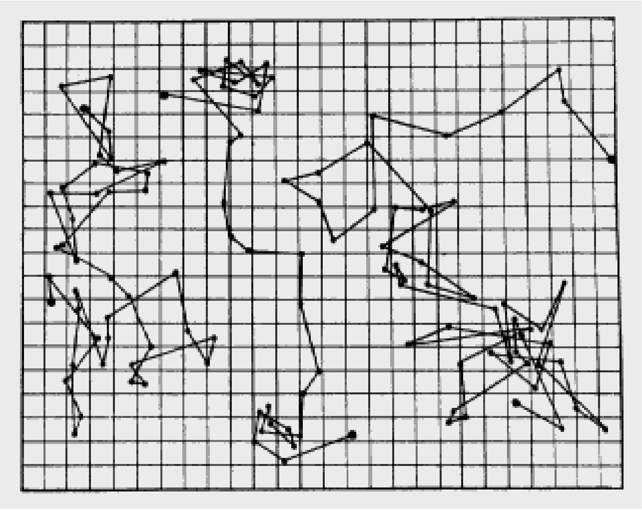

Figura 1.1: Movimiento browniano de partículas en suspensión

conseguido explicar las propiedades termodinámicas de los gases en términos de su estructura molecular, pero los "energicistas", entre los cuales podemos citar a Ernst Mach y Pierre Duhem, rechazaban la hipótesis atómico-molecular argumentando que una hipótesis como la de unos constituyentes microscópicos invisibles con un movimiento incesante también invisible carecía de garantías científicas.[4] La controversia cesó (a favor de los atomistas) con la intervención de un joven empleado de la Oficina de Patentes de Berna, de nombre Albert y apellido Einstein.

[4] Algo parecido ocurre en la actualidad con la teoría de supercuerdas. La descripción de las partículas elementales como vibraciones de cuerdas de tamaño increíblemente pequeño y prácticamente imposibles de ser detectadas experimentalmente, ha llevado a muchos físicos a pensar que sobrepasa los límites del conocimiento científico.

En 1905, su *annus mirabilis*, Albert Einstein publicó tres artículos que cambiarían el desarrollo de toda la física, dando lugar a la Teoría Especial de la Relatividad, la Teoría Cuántica y, sin saberlo, a las Finanzas Matemáticas modernas.[5] En el artículo relativo al movimiento browniano ya aparecían algunas de las características asociadas al concepto matemático actual. En concreto, demostró que el número de partículas en suspensión por unidad de volumen era solución de la llamada *ecuación del calor*.[6] Esta ecuación describe la evolución de la temperatura en cada punto de un cuerpo a lo largo del tiempo. La misma ecuación es satisfecha por la densidad de probabilidad asociada a algunos casos de procesos matemáticos conocidos como *difusiones*, de los que hablaremos más adelante y de los cuales el movimiento browniano es un caso particular.

Nuestra siguiente etapa en este camino hacia el concepto de movimiento browniano que se usa en la actualidad pasa por otro genio, en este caso de las matemáticas, llamado Norbert Wiener. Nacido en Missouri en 1894, Wiener era hijo de Leo Wiener, un inmigrante ruso de origen judío. Hecho a sí mismo, Leo pasó de ganarse la vida como vendedor ambulante a ser profesor de lengua y literatura eslava en Harvard. Su confianza en la capacidad de progresión del ser humano se reflejaba en su concepto de la educación, reflejado en un artículo en *American*

---

[5] Los tres artículos pueden encontrarse traducidos al castellano en Stachel (2004).

[6] En el caso unidimensional, que es el que estudió Einstein originalmente, si el número de partículas por unidad de longitud es $\nu = f(x,t)$, tenemos que $\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, donde el coeficiente de difusión D viene dado por $D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi kP}$, siendo R la constante de los gases perfectos, T la temperatura absoluta, N el número de Avogadro, k el coeficiente de viscosidad y P el radio de las partículas consideradas esféricas.

Magazine, de julio de 1911, en el que se podía leer lo siguiente:

"El profesor Leo Wiener, de la Universidad de Harvard [...], cree que el secreto del desarrollo mental precoz radica en un adiestramiento temprano [...]. Es padre de cuatro hijos cuyas edades van desde los cuatro a los dieciséis años, y ha tenido el valor de manifestar sus convicciones transformándolos en objeto de un experimento educativo. Los resultados han sido asombrosos, especialmente en el caso de su hijo mayor, Norbert". Ya sea como resultado de tal "experimento" o como resultado de un talento innato en su hijo, el caso es que Norbert Wiener se convirtió en un niño prodigio. A los once años ingresó en el Tufts College donde se graduó en matemáticas tres años después. Tras diversas idas y venidas, Wiener acabó doctorándose en Harvard con una tesis sobre lógica matemática. Sus estudios de postdoctorado lo llevaron a Europa, donde estudió bajo la tutela de algunos de las más grandes mentes de la época, como Bertrand Russell, G. H. Hardy o David Hilbert. La impresión que dejó el *wunderkinder* Wiener en Russell puede apreciarse claramente en una carta que éste dirigió a un amigo: "Al niño le han adulado y se cree Dios Todopoderoso. Se ha establecido una constante competición entre él y yo en torno al punto de a quién de los dos corresponde el enseñar".[7]

Ya como profesor del MIT y dentro de su estudio de la Teoría de la Medida, Wiener dedicó sus esfuerzos a ampliar el concepto de medida para pasar de la medida de un conjunto de puntos a la de un conjunto de trayectorias. Como matemático que gustaba de relacionar las matemáticas con los fenómenos físicos, Wiener se sentía

[7] Bertrand Russell a Lucy Donnelly, 19 de octubre de 1913, citado en Grattan-Guiness (1974).

atraído por el movimiento browniano y decidió aplicar sus nuevas investigaciones a obtener una medida apropiada para las trayectorias brownianas, conocida posteriormente como *medida de Wiener*. En uno de sus trabajos relacionados con este tema, Wiener aborda el estudio del movimiento browniano estudiando directamente las trayectorias, en lugar del número de partículas por unidad de volumen como hizo Einstein.[8] En dicho artículo de 1923, Wiener presenta las características matemáticas más importantes del movimiento browniano: los desplazamientos de las partículas son independientes de su historia previa y su distribución de probabilidad es normal. Abundaremos más tarde en la explicación de estos conceptos cuando tratemos la definición precisa desde un punto de vista matemático del movimiento browniano, también llamado *proceso de Wiener* desde la aportación de este. Aunque esta última forma es más usada en artículos de matemáticas puras, en trabajos relacionados con las finanzas matemáticas se suele seguir utilizando el término movimiento browniano y yo adoptaré este último enfoque.

Antes de llegar a la moderna definición de movimiento browniano, necesitamos algo de equipaje matemático.

1.2. Procesos estocásticos

Suponga que usted invierte en acciones cotizadas en la Bolsa de Madrid y tiene como costumbre consultar, a las 12:00 AM de cada día, sus cotizaciones. Coincidirá conmigo en que, antes de realizar dicha consulta, es imposible determinar con total certeza la cotización que aparecerá en su monitor. Este tipo de experimentos son conocidos como *experimentos aleatorios* porque su resultado no

[8] Wiener (1923).

puede ser conocido con antelación con total seguridad. Dicho resultado dependerá del *estado de la naturaleza* que se dé, es decir, de las cantidades ofertadas y demandas de la acción en los instantes anteriores a las 12:00 AM. La magnitud numérica que medimos en un experimento aleatorio (en nuestro ejemplo la cotización) se conoce como *variable aleatoria*. Ejemplos de variables aleatorias son el resultado de un lanzamiento de dados o la temperatura que habrá mañana en un determinado momento del día.

En ocasiones tenemos información acerca de la probabilidad de que la variable aleatoria esté dentro de un rango determinado a través de lo que se conoce como *densidad de probabilidad*. Por ejemplo, consideremos la figura 1.2, que representa el porcentaje de personas de un determinado país cuya altura está en un determinado intervalo.

Si escogemos al azar un ciudadano de dicho país, lo más probable es que su altura se encuentre alrededor de los 175 cm y sería bastante improbable encontrar a alguien cuya altura rondase los 150 cm.

Fenómenos como este de la estatura y otros muchos se pueden aproximar bastante bien por la *función de densidad normal o gaussiana*, llamada así en honor a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), el llamado Príncipe de las Matemáticas. Para el ejemplo anterior de las alturas tendríamos la función de densidad gaussiana de la figura 1.3 conocida también por su forma como *campana de Gauss*.

Las distribuciones gaussianas vienen determinadas por dos parámetros, que las identifican totalmente y las diferencian unas de otras. Estos son su *media* y su *varianza* (o su raíz cuadrada llamada *desviación típica*). La media se refiere al valor de la variable al que corresponde una mayor altura en la campana de Gauss y que la divide en dos mitades iguales. En el ejemplo anterior la media

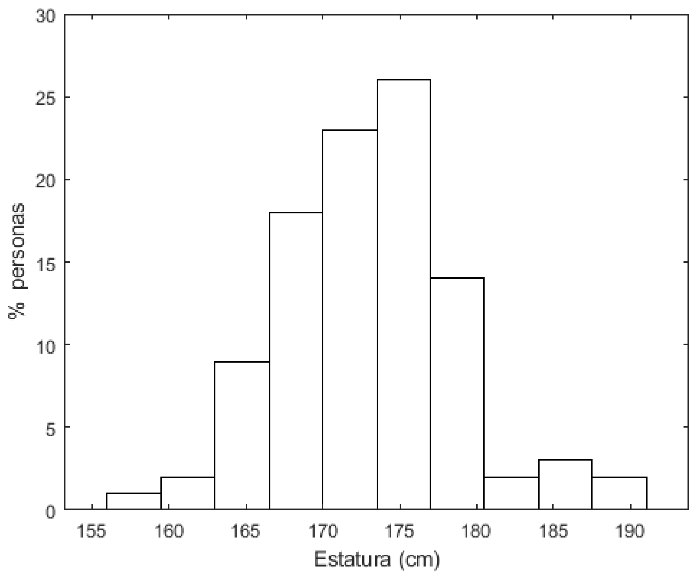

Figura 1.2: Histograma de alturas

está entre 170 y 175 cm. La varianza no puede ser determinada a simple vista como la media, pero nos informa de cuánto de extendida está la gráfica. Varianzas grandes se corresponden con gráficas muy anchas mientras que varianzas pequeñas se refieren a curvas muy picudas y concentradas en torno a la media. Dicho de otra forma, si la varianza es pequeña, la probabilidad de encontrar valores de la variable muy alejados de la media (en las colas) es muy baja, siendo más alta si la varianza es grande. Otra propiedad importante de cualquier densidad de probabilidad, no exclusiva de las normales, consiste en que la probabilidad de que la variable tome un valor menor que uno determinado coincide con el área comprendida entre el eje horizontal y la curva a la izquierda de dicho valor. Como la probabilidad de que la variable tome un valor

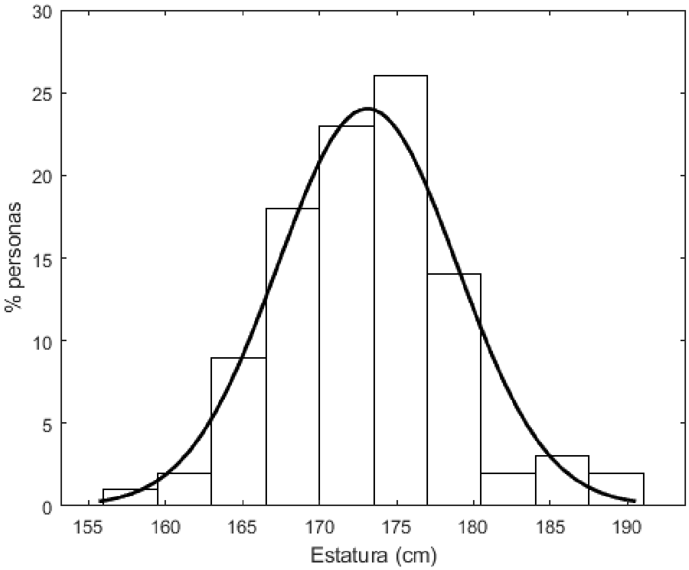

Figura 1.3: Ajuste a la densidad normal

menor que infinito es uno, el área total entre la curva y el eje horizontal vale uno. Se suele llamar *distribución normal estándar* a aquella que posee media cero y varianza uno. Para realizar cálculos de probabilidades con la distribución normal, se suele tomar como referencia la distribución normal estándar, ya que sus valores están tabulados.

Volviendo a nuestro ejemplo de las cotizaciones bursátiles, como el lector conocerá bien, el interés de un inversor en bolsa no se centra exclusivamente en conocer el precio de las acciones de su cartera en un momento determinado. Le interesa principalmente conocer su evolución en el tiempo. Si damos todos los posibles valores que puede tomar una variable aleatoria con el tiempo para todos los posibles estados de la naturaleza, estamos dando lo que se conoce como *proceso aleatorio* o más comúnmente *proceso estocástico*. Para cada valor fijo del estado de la naturaleza tendremos un posible camino del proceso aleatorio. Así pues, la gráfica de la cotización del IBEX 35 durante cinco años mostrada en la figura 1.4, es un ejemplo de un camino de un proceso estocástico.

Figura 1.4: Gráfico con la serie histórica del IBEX 35

Lo representado en el anterior gráfico es una de las posibles trayectorias de dicho proceso, la correspondiente al estado de la naturaleza que se dio en la realidad. Si el estado de la naturaleza hubiese sido distinto (por ejemplo, si la evolución de la economía española durante ese periodo de tiempo hubiese sido diferente), el camino efectivo seguido por el proceso estocástico habría sido otro.

Si usted todavía no ha arrojado a un lado el libro, es que está preparado para conocer el concepto matemático moderno de movimiento browniano.

1.3. El movimiento browniano

Un *movimiento browniano* o *proceso de Wiener* unidimensional, W, es un proceso estocástico que cumple:

1. Es continuo.

2. El incremento que sufre desde un instante a otro es independiente de su historia previa.

3. Dicho incremento es una variable aleatoria gaussiana de media cero y varianza igual al tamaño del intervalo temporal considerado.

Antes de avanzar conviene profundizar en la definición. El término unidimensional se refiere a que estamos considerando que el movimiento se va a realizar en una sola dirección, pero en los dos sentidos, por ejemplo, hacia arriba y hacia abajo. Una forma gráfica de considerar la evolución temporal de un movimiento browniano unidimensional es imaginar que se puede representar por un sismograma (figura 1.5).

Así, el valor en cada instante del movimiento browniano vendrá dado por la altura de la línea del sismograma. Los incrementos de W corresponderán a movimientos hacia arriba del lápiz, mientras que las disminuciones se corresponderían con movimientos hacia abajo. La evolución temporal de W vendrá dada por el desplazamiento del papel del sismógrafo (figura 1.6).

La continuidad del proceso en el primer apartado de la definición se refiere a que la gráfica del sismógrafo no tiene "saltos" y se lleva a cabo sin que se levante el lápiz del papel. La propiedad del segundo apartado consiste en que el movimiento browniano se "refresca" al llegar a cada punto de su trayectoria y sus desplazamientos futuros

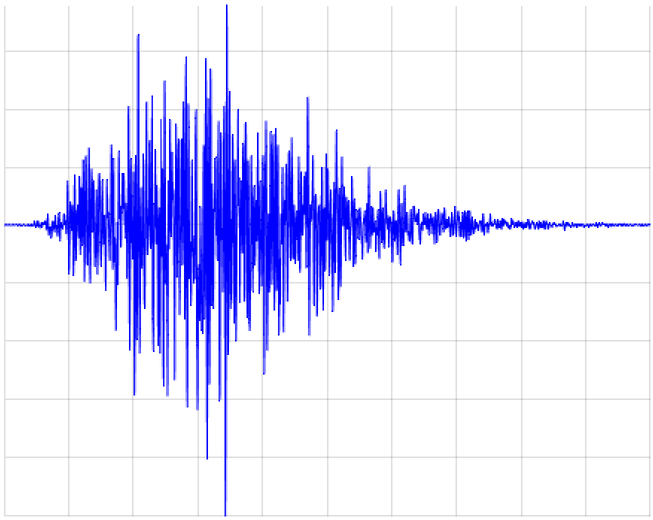

Figura 1.5: Sismograma

no tienen nada que ver con el camino ya recorrido. Insistiremos algo más adelante en esta característica conocida como *propiedad de Markov*.

El tercer punto nos dice que los incrementos de W a partir de cualquier instante son impredecibles (constituyen una variable aleatoria), pero que todos los incrementos "hacia arriba" compensan en cierto modo a todos los que van "hacia abajo" dando media cero. Que la varianza sea igual al intervalo de tiempo quiere decir que cuanto más tiempo dejemos pasar, mayor es la probabilidad de encontrar incrementos mayores (la campana de Gauss se va ensanchando). Esta propiedad lleva a un "esparcimiento" de los caminos conforme va pasando el tiempo como puede apreciarse en la figura 1.7, en la

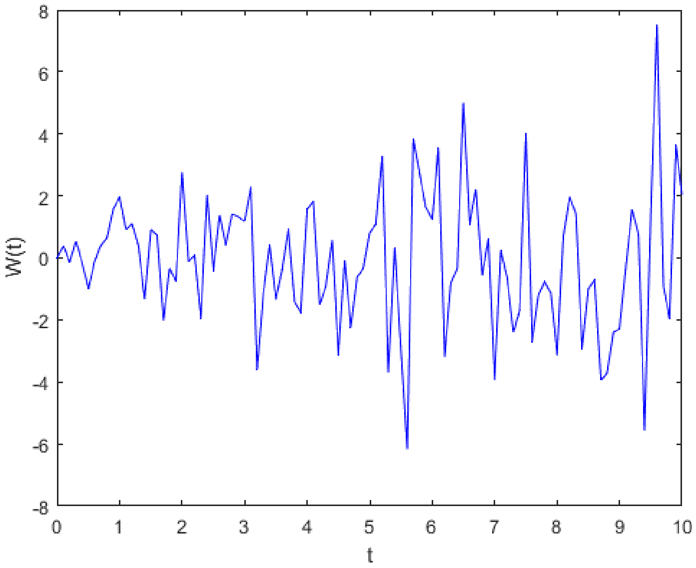

Figura 1.6: Trayectoria de un movimiento browniano

que se muestran distintas trayectorias de un movimiento browniano.

Aunque la analogía con el sismógrafo sigue siendo válida en lo fundamental, si los terremotos siguieran la misma distribución que el movimiento browniano, después de iniciado el seísmo, en la mayoría de las ocasiones, la sacudida del terremoto en lugar de amortiguarse, ¡iría incrementándose más y más con el tiempo!

1.4. Propiedades del movimiento browniano

A continuación, enunciamos y exploramos con cierto detalle algunas propiedades del movimiento brow-

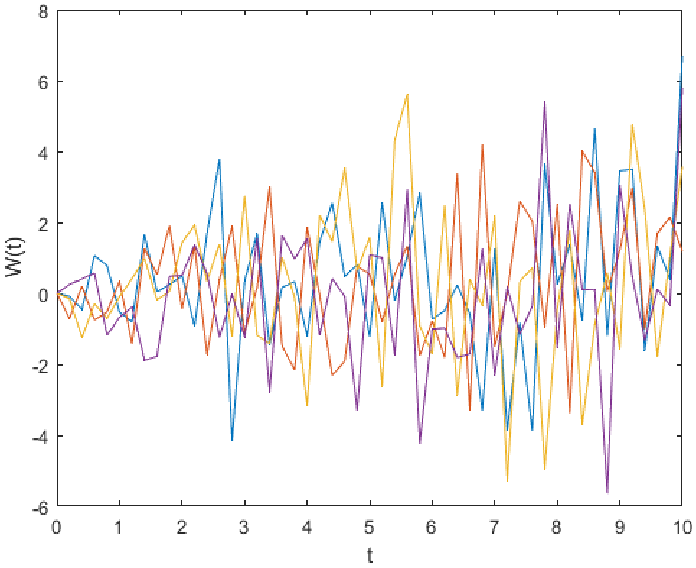

Figura 1.7: Distintas trayectorias de un movimiento browniano

niano. Las dos primeras corresponden a características matemáticas del proceso estocástico propiamente dicho. Las restantes se refieren a los caminos del proceso.

1. **El movimiento browniano es un proceso de Markov.** Un proceso estocástico es *de Markov* si dado el valor del proceso en un instante dado no depende de su historia previa. Como Dori en Buscando a Nemo, el proceso sólo "conoce" su valor actual en cada instante, pero no "recuerda" como llegó hasta allí.
   Como ejemplo de proceso de Markov considere un juego de dados en el que la puntuación en cada partida se obtiene como el máximo de los resultados

obtenidos al lanzar un dado un número de veces igual a la puntuación de la partida anterior. Así, por ejemplo, se comenzaría tirando el dado una sola vez. Si el resultado es 2, esa será la puntuación de la primera partida. En la siguiente partida el jugador tiraría el dado dos veces. Si los resultados son 3 y 5, entonces su puntuación en la segunda partida sería 5, y en la siguiente partida tiraría el dado 5 veces. El proceso estocástico definido por la puntuación en cada partida es de Markov porque la probabilidad de cada resultado en una partida se puede obtener a partir, exclusivamente, de la puntuación de la partida inmediatamente anterior. Si dicha probabilidad dependiera de partidas anteriores, el proceso no sería de Markov.

2. **El movimiento browniano es una martingala.** Supongamos que conocemos toda la historia de un cierto proceso hasta un momento determinado. Al valor promedio que tendrá el proceso en un instante futuro cualquiera, estimado con dicha información, se le conoce como *esperanza condicionada* del proceso. Pues bien, si dicha esperanza condicionada coincide con el valor actual del proceso, entonces el proceso es una *martingala*. Es decir, una martingala es un proceso estocástico para el cual la mejor estimación que podemos hacer de su valor futuro, con la información que tenemos hasta un cierto instante, es que se quede como está. Conocida la historia del proceso, todos los posibles caminos futuros "hacia arriba" cuentan lo mismo que todos los posibles caminos "hacia abajo". En el ámbito de los juegos de azar, una martingala es lo que conocemos como un "juego limpio".

Para ilustrar el concepto de martingala consideremos un juego que consiste en realizar tiradas de una moneda con sus caras etiquetadas con $+1$ y -1. El jugador comienza con una puntuación inicial de 1 y el resultado del juego tras cada tirada consiste en multiplicar lo que salga en la moneda por la suma de todas las puntuaciones anteriores y sumarlo a la puntuación anterior. Por ejemplo, si el jugador obtiene en las tres primeras tiradas -1, $+1$ y $+1$, respectivamente, las puntuaciones serán:

a) Inicial: 1
b) Tras la primera tirada: $1 - 1 \times 1 = 0$
c) Tras la segunda tirada: $0 + 1 \times (1 + 0) = 1$
d) Tras la tercera tirada: $1 + 1 \times (1 + 0 + 1) = 3$

El proceso estocástico determinado por las puntuaciones del juego tras cada tirada es una martingala, ya que conocido el resultado hasta una tirada concreta, por ejemplo, el de la tercera que es 3, hay la misma probabilidad de que aumente en dos unidades y de que disminuya esa misma cantidad, siendo la esperanza condicionada igual al valor actual de 3.

El ejemplo de proceso de Markov del apartado 1 no es una martingala, ya que si el resultado de una partida es 1, en la siguiente tiraría el dado una sola vez y la esperanza condicionada del resultado siguiente sería mayor que 1. Por otra parte, el ejemplo de martingala del apartado 2 no es de Markov, ya que el resultado de cada tirada depende de todos los resultados anteriores.

Como acabamos de ver, existen procesos de Markov que no son martingalas, de la misma forma que existen martingalas que no son de Markov, los dos conceptos son independientes.

3. **Los caminos del movimiento browniano no son diferenciables en ningún punto.** Desde mi punto de vista esta es la propiedad más asombrosa del movimiento browniano y merece la pena detenerse con calma para disfrutar de ella.
   El lector recordará de sus estudios de Geometría Elemental el concepto de *tangente a una curva* como aquella recta que toca a la curva en un solo punto y que tiene la misma "inclinación" que la curva en dicho punto (figura 1.8).

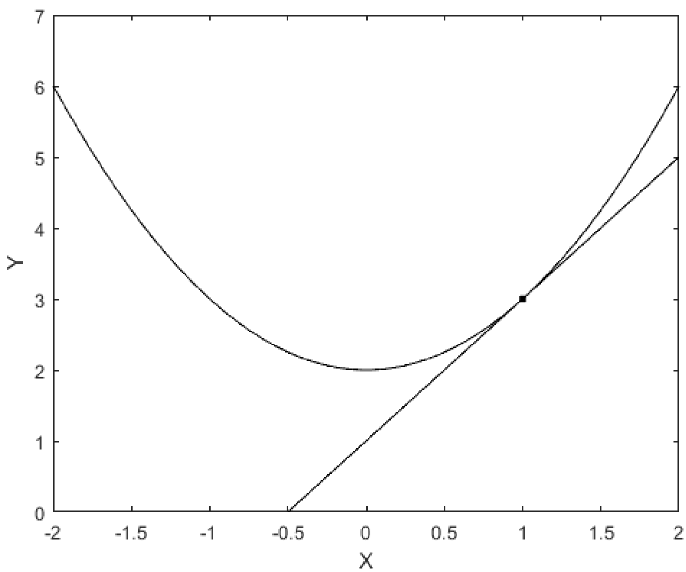

Figura 1.8: Tangente a una curva

Las curvas "suaves" tienen tangente en todos sus puntos y se dice que son *diferenciables*. Sin embargo, podemos dibujar curvas en el plano que tengan "picos" en los que no es posible trazar una tangente, ya que en ellos el concepto de inclinación no está bien definido. Mirando a las gráficas anteriores del movimiento browniano es evidente que están "llenas" de tales picos. De hecho, ya Jean Baptiste Perrin se refirió a las trayectorias del movimiento browniano en estos términos: "Las trayectorias son confusas y complicadas, cambian de dirección con tanta frecuencia y rapidez que es imposible seguirlas [...]. Es imposible fijar una tangente, incluso aproximadamente, y nos recuerda las funciones continuas sin derivada de los matemáticos".[9] Pues bien, como ya parece evidente, los caminos del movimiento browniano son muy irregulares y presentan "picos" en abundantes puntos. ¿Pero en cuántos? La respuesta es en todos. Todos los puntos de una trayectoria de movimiento browniano son puntos de cambio brusco de dirección. Parece increíble pensar en una gráfica con esta propiedad, pero así son las matemáticas. De hecho, esta propiedad es el contenido de un teorema debido a Zigmund, Wiener y Paley que apareció en 1933 en un artículo con el escueto título: "Notas sobre funciones aleatorias".[10] Esta espectacular propiedad no es exclusiva de las trayectorias del movimiento browniano. Veamos dos ejemplos más.

En el siglo XIX comenzó a correr entre los matemáticos la conjetura de que toda gráfica continua era diferenciable salvo en puntos aislados. Aunque, según parece, Bolzano en 1834 presentó una función continua pero no diferenciable en ningún punto, el ejemplo más conocido que ha llegado hasta nuestros días de función continua y no diferenciable en ningún punto es la llamada *función*

[9] Cita de Perrin en Paley y Wiener (1934).

[10] Paley, Wiener y Zygmund (1933).

de Weierstrass, cuya gráfica hemos representado en la figura 1.9.[11] Otro ejemplo curioso de gráfica con-

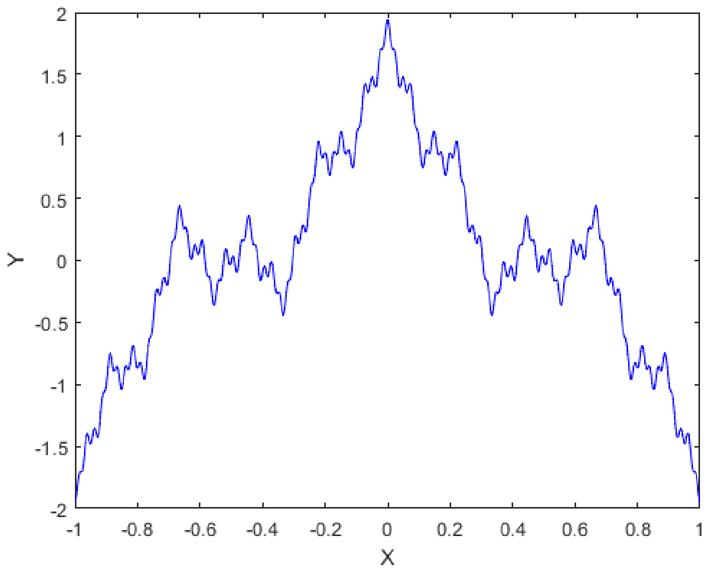

Figura 1.9: Función de Weierstrass

tinua sin tangente en ningún punto es la llamada *curva de Koch*. Esta curva fue propuesta por Helge von Koch en 1904 y su propósito queda perfectamente reflejado en el título de su artículo: "Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental". El proceso de construcción de la curva de Koch se puede dar en forma de un sencillo algoritmo:

a) Se parte de un segmento horizontal de lon-

[11] La función de Weierstrass viene dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde a es un entero positivo impar, $0 < b < 1$ y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

gitud determinada. Se divide en tres partes iguales y se retira la parte central. Sobre ella se construye a modo de "tienda de campaña" un ángulo formado por dos segmentos de la misma longitud que el que hemos quitado.

b) El mismo procedimiento del apartado anterior se repite para cada segmento de los que se han formado.

c) Se vuelve a repetir el apartado b).

Los primeros 5 pasos de la construcción de la curva de Koch se pueden apreciar, desde arriba hacia abajo, en la figura 1.10.

¿Cuántos pasos se requieren para acabar de construir la curva de Koch? Pues sólo infinitos. La curva de Koch es el resultado de repetir este proceso sin fin. Si en lugar de comenzar con un segmento se comienza con un triángulo equilátero, el resultado es el (más bonito) *copo de nieve de Koch* (fig. 1.11).Aparte de su belleza y de su importancia matemática, una de las características interesantes de la curva de Koch es que se puede estudiar con métodos elementales. Por ejemplo, no es difícil demostrar que la longitud total de la curva es infinita.[12] Más aún, si se considera el copo de nieve de Koch, tenemos una curva cerrada de longitud infinita dentro de un área finita.

4. **Propiedad de escalado.** Consideremos un movimiento browniano que toma en el instante cero el valor cero, es decir, un *movimiento browniano estándar* (véase la figura 1.6). Supongamos que estamos mirando a la trayectoria del movimiento desde

[12] Si tomamos la longitud del segmento inicial igual a 1, la sucesión que da las longitudes de la curva tras cada paso es 1, 4/3, 16/9,. . . , por tanto, la longitud de la curva de Koch vendrá dada por $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$.

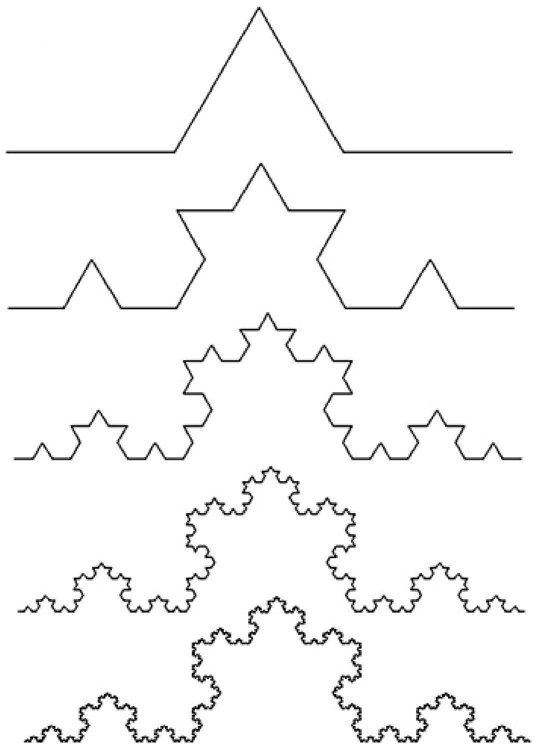

Figura 1.10: Curva de Koch

el inicio hasta los 9 segundos. ¿Tendrá el mismo aspecto que la trayectoria desde el origen hasta 1 segundo? La respuesta es no, porque sabemos que la varianza de los incrementos es proporcional al tiempo (el efecto de "esparcimiento" del que hablamos antes). Para que tenga el mismo aspecto, es decir, para que siga siendo un movimiento browniano, hay que multiplicar su valor por $3 = \sqrt{9}$. En esto consiste la propiedad de escalado, si dividimos el tiempo de un movimiento browniano por un número

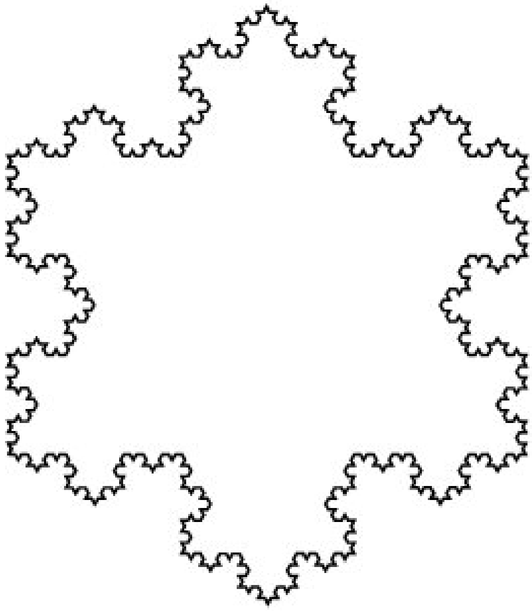

Figura 1.11: El copo de nieve de Koch

positivo, el proceso resultante es un movimiento browniano si lo multiplicamos por la raíz cuadrada de ese mismo número.

Las propiedades anteriores del movimiento browniano nos permiten calificarlo como objeto *fractal*, en el sentido de ser una figura geométrica irregular y autosemejante, cualidades que comparte con la función de Weierstrass y la curva de Koch.[13] La piedra de toque para determinar

[13] El término fractal fue acuñado por Benoit Mandelbrot, dándole el significado de "forma geométrica quebrada o fragmentada que puede ser separada en partes, cada una de las cuales es (al menos aproximadamente) una copia reducida del total."(Mandelbrot, 1997).

si una figura geométrica puede ser considerada "oficialmente" como fractal es que se verifique que su *dimensión de Haussdorf* o *dimensión fractal* sea mayor que su *dimensión topológica.* No se asuste por las palabrejas, lo explicaremos en términos sencillos.

Supongamos que podemos coger (físicamente) un camino browniano y estirarlo todo lo que queramos. En algún momento acabará convertido en una recta, que como es sabido tiene una sola dimensión. Así pues, diremos que la dimensión topológica de una trayectoria browniana es 1. Sin embargo si la devolvemos a su estado inicial, vemos que de alguna forma, por su irregularidad, "ocupa" o "llena" más parte del plano que una recta. Esto es lo que mide la dimensión fractal, curvas con dimensión fractal algo superior a 1 ocuparán poco más que una recta y curvas con dimensión fractal cercana a 2 ocuparán casi todos los puntos del plano. Pues bien, la dimensión fractal de cualquier trayectoria browniana es exactamente 1,5, así que podemos aceptar las trayectorias de movimiento browniano como auténticos fractales. Además, el movimiento browniano supera en "fractalidad" a la curva de Koch, que tiene dimensión fractal 1,2618.[14] Completando el podio de esta competición entre fractales, y con la medalla de oro, aparece la *curva de Hilbert.* Los primeros pasos de su construcción aparecen en la figura 1.12.

La curva de Hilbert tiene dimensión topológica 1 y dimensión fractal 2, es decir, pasa por todos los puntos del cuadrado.[15]

[14]La dimensión fractal de la curva de Koch (y de su copo de nieve) es exactamente $\frac{\ln 4}{\ln 3}$.

[15]He excluido de esta competición a la función de Weierstrass debido a que, hasta donde yo conozco, no hay un valor exacto para su dimensión fractal, sólo hay una cota inferior de valor $\frac{\ln a}{2+\ln b}$ (Falconer, 2003). También hemos dejado de mencionar otras curvas

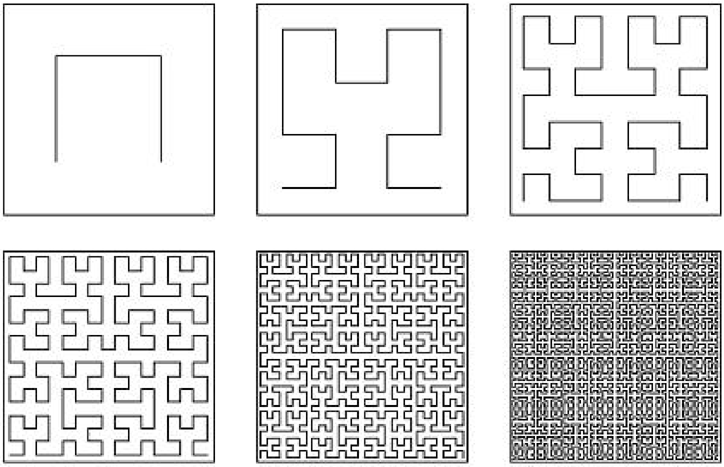

Figura 1.12: Construcción de la curva de Hilbert

Para poner fin a este apartado dedicado a las sorprendentes propiedades del movimiento browniano, expondremos otra propiedad que, aunque de menos entidad matemática, no es menos alucinante.

5. **Un movimiento browniano estándar cambia infinitas veces de signo entre el instante cero y cualquier otro instante posterior.** Si usted pone en marcha un movimiento browniano estándar y lo detiene en cualquier instante posterior, al mirar a su gráfica, ya habrá atravesado el eje horizontal correspondiente al valor cero una infinidad de veces. Además, no importa lo rápido que pare el reloj, nunca conseguirá hacer finito ese número de cambios de signo.

continuas que llenan el plano como la curva de Peano (anterior en el tiempo a la de Hilbert) y la curva de Gosper.

1.5. Bibliografía del capítulo

Acerca de los trabajos científicos de Brown puede consultarse Brown (1866). Una biografía clásica de Einstein que además profundiza bastante en su producción científica es Pais (1984). Otra biografía, también en castellano, de Wiener y Von Neumann es Heims (1986), de la que he extraído la mayor parte del material biográfico de Norbert Wiener. Es difícil encontrar bibliografía a nivel divulgativo relacionada con procesos estocásticos y movimiento browniano (¡ese es uno de los objetivos de este libro!). Para aproximaciones técnicas véase, por ejemplo, Mörters y Peres (2010) o Karatzas y Shreve (1991). Un libro de nivel algo más asequible y que puede ser usado como una introducción a estos conceptos es Klebaner (2005). Otra buena referencia en español es Martínez y Villalón (2003). Sobre fractales, la referencia clásica es Mandelbrot (1997).