I SISTEMI DI NUMERAZIONE

Indice

Tre concetti importanti

Prima di procedere con la nostra spiegazione è necessario fare una distinzione tra i seguenti concetti:

PERCEZIONE

Più precisamente, la percezione delle quantità esigue, che non richiede una capacità di astrazione. Tale capacità innata è presente anche in alcune specie di uccelli, come emerso dagli studi di Konrad Lorenz.

CONTARE

L'uomo sin dalla Preistoria ha l'esigenza di contare per questioni puramente pratiche e rudimenti di tecniche di calcolo appaiono 4000-3000 anni fa in Egitto e Mesopotamia ma non sono giustificati da dimostrazioni.

MATEMATICA

La matematica come una scienza nasce nel VI secolo a.C. in Grecia perché da quel momento nei documenti i calcoli sono giustificati da una dimostrazione.

Cos’è un sistema di numerazione?

Durante il corso della storia i bisogni dell’uomo cambiarono e si ampliarono e, se all’inizio poteva fare affidamento sono sulla sua percezione, andando avanti divenne impellente il bisogno di contare attraverso dei sistemi di numerazione

Un sistema di numerazione, per essere definito tale, deve essere caratterizzato da:

- Una base, ossia il numero di simboli che si sceglie di usare
- Una sintassi, ovvero deve avere delle regole per la scrittura dei numeri

Quali sistemi si sono diffusi?

- Il sistema egizio, di base decimale.
- Il sistema greco di cui esistono due tipi.
- Il sistema maya, a base vigesimale.
- Il sistema babilonese, di tipo sessagesimale e additivo.
- Il sistema romano, di tipo additivo e sottrattivo.
- Il sistema arabo, quello che è usato in Europa al giorno d’oggi.

Il sistema romano:

Tra i sistemi precedentemente menzionati abbiamo approfondito il sistema di numerazione romano, molto diverso dal nostro, che possiede le seguenti caratteristiche:

- E’ additivo quindi ogni simbolo rappresenta una somma o sottrazione tra numeri;
- Non ha il simbolo dello 0;
- Usa 7 simboli e si avvale anche di alcuni segni grafici come ad esempio i trattini.

I	V	X	L	C	D	M
Uno	cinque	Dieci	Cinquanta	Cento	Cinquecento	mille

Il sistema arabo:

Il nostro sistema, invece, si differenzia molto da quello romano poichè, al contrario di quest’ultimo è:

- posizionale, ossia ogni numero ha un significato diverso in base alla posizione in cui si trova;
- un sistema decimale, ha quindi 10 simboli (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9);
- un sistema polinomiale, questo che ad esempio il numero 10 può essere espresso come 0*10 alla 0+1*10^1

Come si sommano i numeri nel sistema romano

Per addizionare numeri romani non si può usare un algoritmo ed è quindi abbastanza difficile scrivere operazioni (infatti i Romani usavano l’abaco). In alcuni casi il calcolo si riduce ad una riscrittura dei segni, come ad esempio con i numeri:

XVII - VI = XI

Cosa abbiamo imparato?

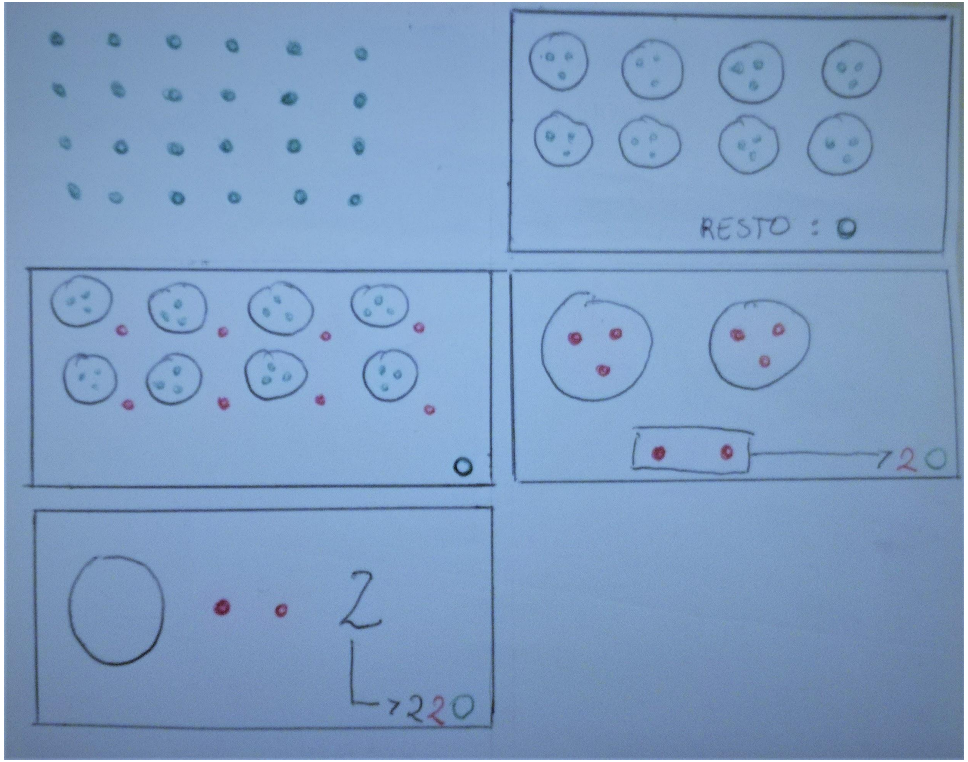
Noi scriviamo in base decimale, ma come abbiamo visto, ci sono molte altre basi

Il sistema binario

Il sistema binario è un sistema numerico posizionale in base 2, ciascuno dei numeri da questo espressi è definito *codice binario.*
In informatica questo sistema è utilizzato per la rappresentazione interna delle informazioni della quasi totalità degli elaborati elettronici poiché per la gestione dei loro circuiti digitali sono convenienti due valori (*0* e *1* oppure *vero* e *falso* per la logica booleana), rappresentanti i due diversi livelli di tensione elettrica.
Il sistema su cui oggi si regge l'informatica ha però molti padri. Il primo a proporne l'uso fu *Juan Caramel* nel *"Mathesis biceps. Vetus et noua"* pubblicato a Campagna nel 1669. Successivamente il matematico tedesco *Gottfried Wilhelm Leibniz* ne studiò per primo l'aritmetica, ragione per cui questo sistema di numerazione è considerato una tra le sue più grandi invenzioni.
Questi studi, però, non ebbero seguito immediato quindi l'aritmetica binaria venne dimenticata per essere poi riscoperta nel 1847 dal matematico *George Boole*. Quest ultimo introdusse tale concetto alle grandi scuole di logica matematica del 1900 e aprirà l'orizzonte alla nascita del calcolatore elettronico.

Passaggio da base dieci a N (metodo delle palline)

Questo metodo è una dimostrazione del metodo algebrico che permette di arrivare ad un numero in base 10 da una base N



Questo metodo consiste nel :

- prendere una certa quantità di palline di carta e scegliere una base N (in questo caso 3).
- suddividere le palline in gruppi da 3 e scrivere il numero delle palline che avanzano.
- assegnare una pallina a ciascun gruppo
- prendere le palline aggiunte, dividerle in gruppi da 3 e scrivere le unità che avanzano
- continuare la procedura finché il quoziente non è 0
- scrivere i resti, partendo dall’ultimo al primo
- il numero scritto è il numero nella base scelta

Passaggio da base 10 a base N (metodo algebrico)

Esempio: vogliamo ottenere l'equivalente di 24, ma in base 3…

24 :3 = 8 **R= 0**

8 : 3 = 2 **R= 2**

2 :3 = 0 **R= 2**

Risultato ⟹ **220**

Dalla dimostrazione per mezzo del metodo delle palline si si ottiene tale metodo algebrico che segue esattamente lo stesso criterio del metodo, molto più intuitivo, delle palline

Cioè:

- dividere il numero per la base desiderata e, in seguito, i quozienti ottenuti finché non si ottiene un quoziente uguale a 0 riportando ogni volta i resti
- il risultato si ottiene leggendo i resti da quello dell'ordine maggiore a quello del minore

Convertitore da base 10 a N

Il convertitore che abbiamo sviluppato per ottenere automaticamente un numero da base 10 a base N è, in sostanza, lo stesso metodo utilizzato dal metodo algebrico e reso automatico grazie all'inserimento di alcune funzioni fornite dal programma.

Numero scelto	24
Base scelta	3
Numero in base n	220

Si inserisce il numero scelto

Si inserisce la base in cui si desidera il risultato

La somma dei resti in unità viene automaticamente riportata per rendere visibile il risultato

Procedimento	Quoziente	Resto	Resti in unità
	8	0	0
	2	2	20
	0	2	200

La funzione "quoziente" da automaticamente il quoziente tra il numero scelto e la base e poi tra i successivi quozienti

La funzione "resto" dà il resto delle operazioni descritte a sinistra

Si moltiplicando i resti per una potenza di dieci, scelta in base alla posizione dei resti, che parte da 0 nella prima casella per poi aggiungere sempre 1 all'esponente man mano che si va più in basso

Grazie ad una funzione specifica il procedimento si ferma automaticamente quando il risultato è uguale a 0

Passaggio da base N a base 10

METODO ALGEBRICO

$$\mathbf{1022_{(3)} \longrightarrow N_{(10)}}$$

$$\mathbf{1022_{(3)} = 1*3^3+ 0*3^2+2*3^1+ 2*3^0}$$

$$\mathbf{1022_{(3)} = 35_{(10)}}$$

Per risalire ad un numero in base N a il suo equivalente in base 10 bisogna:

- prendere il numero desiderato in base N (es. 1022 in base 3)
- considerando che il nostro è un sistema polinomiale e posizionale, moltiplichiamo ogni cifra del numero per la potenza della base che che corrisponde alla sua posizione e le sommiamo (es. $1022_{(3)} = 1*3^3+ 0*3^2+2*3^1+ 2*3^0$)
- adesso è solo necessario eseguire la somma per ottenere il numero corrispondente in base 10 (es. $1022_{(3)} = 35_{(10)}$)

Convertitore da base N a 10

Il convertitore che abbiamo sviluppato per ottenere automaticamente un numero da base N a base 10 è, in sostanza, lo stesso metodo utilizzato dal metodo algebrico e reso automatico grazie all'inserimento di alcune funzioni fornite dal programma.

ordine della cifra	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
numero scelto	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2
Base del numero scelto			3																		
Numero in base 10			35																		
Procedimento																					
	348678	116226	387420	129140	430467	143489	478296	159432	531441	177147	59049	19683	6561	2187	729	243	81	27	9	3	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27	0	6	2

Si inseriscono le cifre del numero scelto

Si inserisce la base del numero scelto

Sommando i risultati della moltiplicazione della riga di sotto del procedimento si ottiene il risultato in base 10

La linea superiore contiene una funzione che ti calcola automaticamente il valore dell'ordine in cui si trova la cifra, cioè calcola la potenza tra la base e il numero della posizione (con la funzione "Pow")

Nella riga di sotto viene moltiplicato il valore dell'ordine con la rispettiva cifra del numero scelto

Passaggio da base M a base N

Esempio: si ha 35 in base 7 e si vuole ottenere il suo corrispondente in base 4...

$$35_{(7)} \longrightarrow N_{(4)}$$

$$35_{(7)} = 3*7^1 + 3*7^0 \quad (26)$$

$$26 : 4 = 6 \qquad R = 2$$

$$6 : 4 = 1 \qquad R = 2$$

$$1 : 4 = 0 \qquad R = 1$$

Risultato = $122_{(4)}$

Per passare da un numero in una base (M) a un'altra (N) si sfruttano entrambi i modo precedentemente descritti.

Cioè:

- dalla base M si risale ad un numero totale (che non necessariamente va identificato in base 10)
- da tale totale si ottiene il corrispondente in base N

Convertitore da base M a base N

Il convertitore che abbiamo sviluppato per ottenere automaticamente un numero da base M a base N è, in sostanza, lo stesso metodo utilizzato dal metodo algebrico e reso automatico grazie all'inserimento di alcune funzioni fornite dal programma.

Ordine della cifra	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Numero scelto	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5
Base del numero scelto	7																				
Base desiderata	4																				
Numero nella nuova base																			1	2	2
Procedimento																					
	7,9792	1,13				474756	678223	968890	138412	197732	282475	403536	576480	823543	117649	16807	2401	343	49	7	1
	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21	5

numero in base 10	26

quoziente	resto
6	2
1	2
0	1

Si inserisce la base del numero scelto

Si inseriscono le cifre del numero scelto

Si inserisce la base in cui si desidera il risultato

I resti vengono automaticamente riportati per rendere visibile il risultato

La linea superiore contiene una funzione che ti calcola automaticamente il valore dell'ordine in cui si trova la cifra, cioè calcola la potenza tra la base e il numero della posizione (con la funzione "Pow")

La funzione "quoziente" da automaticamente il quoziente tra il numero scelto e la base e poi tra i successivi quozienti

La funzione "resto" dà il resto delle operazioni descritte a sinistra

Nella riga di sotto viene moltiplicato il valore dell'ordine con la rispettiva cifra del numero scelto

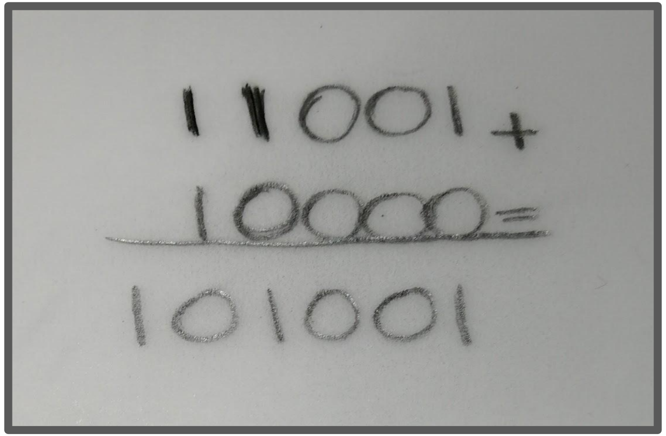
Sommando i risultati della moltiplicazione della riga di sotto del procedimento si ottiene il totale

Grazie ad una funzione specifica il procedimento (che può generare un risultato di massimo 20 cifre) si ferma automaticamente quando il risultato è uguale a 0

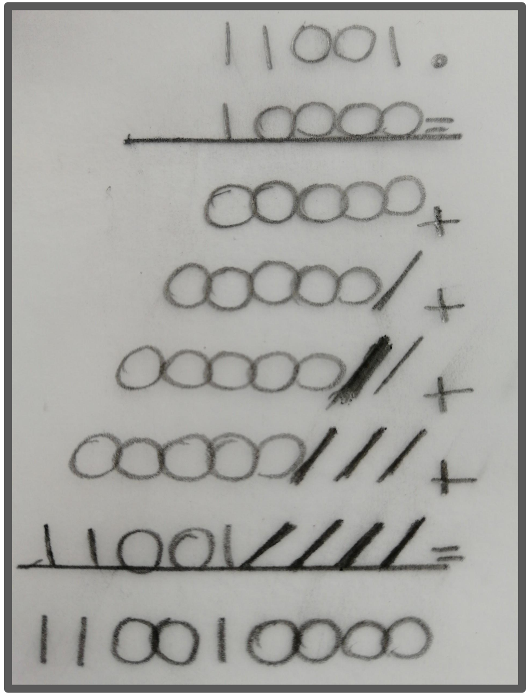
Operazioni tra numeri in base diversa da 10

Somma e moltiplicazione

SOMMA



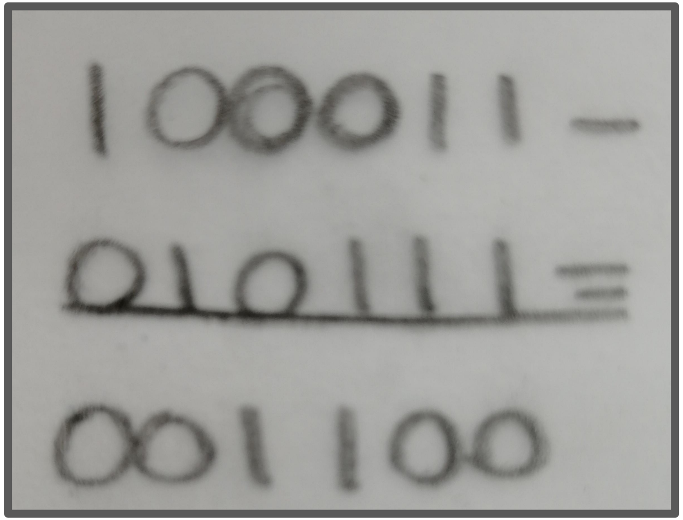
MOLTIPLICAZIONE



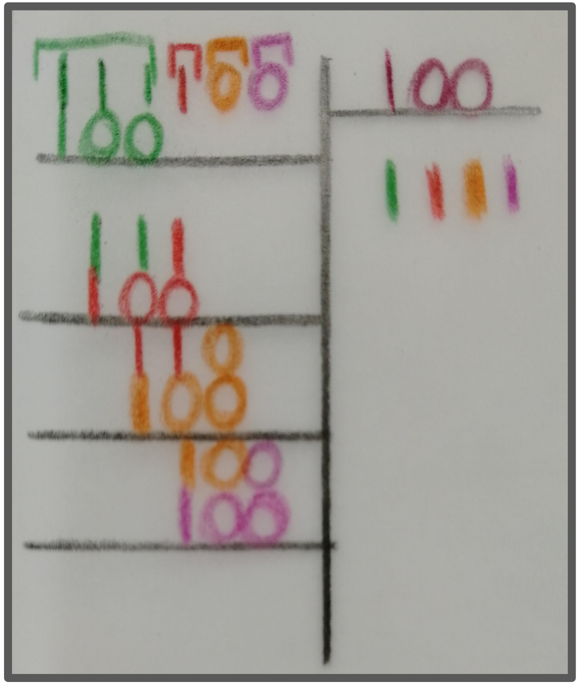
Operazioni tra numeri di base diversa da 10

Differenza e divisione

SOTTRAZIONE



DIVISIONE



Conclusione

Si può concludere quindi che:

1. I sistemi di numerazione nascono in tempi e luoghi differenti e soprattutto servono all'uomo per trovare un sistema funzionale per identificare le quantità che vede.
2. Un sistema ha:
- una *base* quindi un certo tipo e numero di simboli per esprimere le cifre
- un criterio chiamato *sintassi,* ossia la serie di regole che si usano per scrivere i numeri
3. Il nostro sistema è *decimale, posizionale* e *polinomiale.*
4. Il sistema romano è *additivo/sottrattivo* e usa *sette simboli* (sette lettere) e alcuni *segni grafici.* (Si possono eseguire operazioni tra numeri romani, tuttavia il sistema non è funzionale ad una scrittura veloce dei risultati).
5. Il sistema binario è il sistema usato e più funzionale per costruire dei sistemi di sicurezza o elettronici, avendo solo i numeri 1 e 0.
6. Un numero espresso in base decimale può, attraverso un metodo grafico, uno algebrico o con un convertitore, passare ad una base diversa e viceversa.
7. Un numero può passare da una base diversa da 10 ad un'altra diversa da 10 per mezzo di un *convertitore.*
8. Si possono eseguire operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione di numeri con base diversa da 10.