Sistemi di Numerazione

Corrado Santoro

Dipartimento di Matematica e Informatica
santoro@dmi.unict.it

Corso di Architettura degli Elaboratori

Il Sistema Decimale

- 10 **simboli:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Ogni simbolo rappresenta una **quantità** ben precisa
- Ma la quantità dipende anche dalla **posizione** del simbolo

278

8 **unità**

7 **decine** (gruppi da 10)

2 **centinaia** (gruppi da 10×10)

Il Sistema Decimale

Sistema **posizionale**

- La quantità dipende anche dalla **posizione** della cifra
- Il sistema arabo è appunto **posizionale**
- La numerazione **romana** non è posizionale ma **additiva** perchè il valore complessivo del numero è dato dalla **somma** dei valori dei simboli, indipendentemente dalla loro posizione

$$278 = CCLXXVIII$$

Il Sistema Decimale

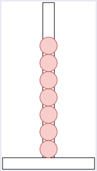
Vantaggi di un sistema **posizionale**

- Il sistema decimale/arabo è estremamente **economico** e **flessibile**
- Con un numero **limitato** di simboli (solo 10) è possibile rappresentare **qualunque quantità**
- Questo non è vero per i sistemi additivi i quali, al crescere della quantità, hanno sempre bisogno di nuovi simboli

- Perchè 10 simboli?
- Potremmo usarne di più o di meno?
- E' possibile averne un numero arbitrario (7, 3, 2, 15, 16,..)?

Gli Abachi

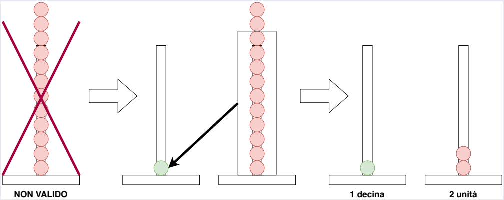
- Da piccoli ci hanno insegnato a rappresentare i numeri con gli abachi
- Un abaco è un asticella dove è possibile impilare una quantità di palline corrispondenti al numero che vogliamo rappresentare
- Ma, attenzione!, un abaco non può contenere più di **9 palline**



7

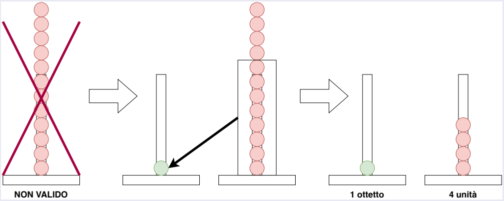
Gli Abachi-10

- Se, su un abaco da 7 palline, aggiungiamo altre **5 palline** andiamo oltre la capacità dell'abaco
- Aggiungiamo un altro abaco che "raccoglie" gruppi di 10 palline
- Non appena il primo abaco supera la sua capacità, **raggruppiamo** le palline e trasformiamole in una pallina singola posta nell'abaco successivo
- Chiamiamo questo mondo quello degli "abachi-10"



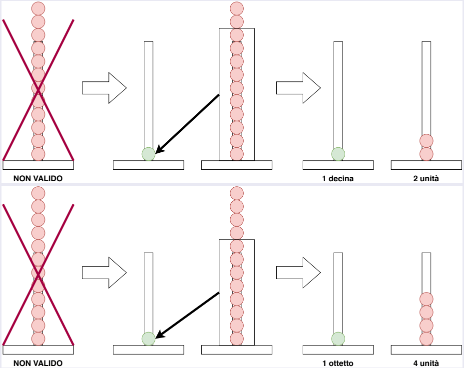
Gli Abachi-8

- Supponiamo di avere lo stesso numero di palline, ma gli abachi non possono contenerne più di **7**
- L'abaco successivo raccoglierà dunque gruppi di 8 palline ("ottetti")
- Nell'abaco delle unità rimarrano 4 palline
- Chiamiamo questo mondo quello degli "abachi-8"



Gli Abachi

- La dicitura **14** nel mondo degli abachi-8 corrisponderà alla dicitura **12** nel mondo degli abachi-10
- Entrambe le diciture rappresentano **la stessa quantità**, ma utilizzano un sistema di “scrittura” che ha regole differenti



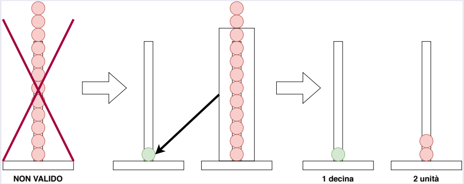
= 12

= 14

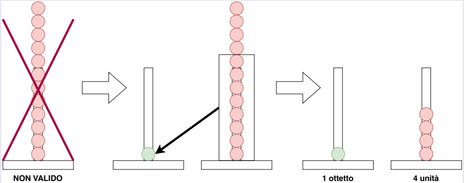
Vari Sistemi

Gli Abachi

- Nel mondo degli abachi-10 abbiamo bisogno di **10 simboli** $0, \ldots, 9$
- Nel mondo degli abachi-8 avremo bisogno solo di **8 simboli** $0, 1, 2, 4, 5, 6, 7$



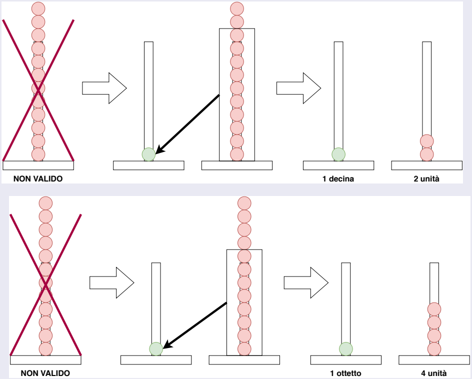
$= (12)_{10}$



$= (14)_8$

Gli Abachi

- Nel mondo degli abachi-10 usiamo un sistema **a base 10**
- Nel mondo degli abachi-8 usiamo un sistema **a base 8**



$= (12)_{10}$

$= (14)_{8}$

Un sistema di numerazione è definito da ...

- Una **base** B, intera
- Un insieme di B **simboli** $S = \{s_0, ..., s_{B-1}\}$, ognuno dei quali rappresenta le **quantità** $0, 1, 2, ..., B - 1$

- Un numero a n **cifre** $p_{(n-1)}p_{(n-2)}...p_{(1)}p_{(0)}$ con "(i)" posizione della cifra e $p_{(i)} \in S$ in base B rappresenta dunque la quantità:

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{(i)} \cdot B^i$$

- Esso è dunque espresso come **somma di potenze della base**
- La *posizione* della cifra, ovvero l'*esponente* della potenza della base, è detto **peso**
- La cifra più a **destra** (*peso minore*) è detta **cifra meno significativa**
- La cifra più a **sinistra** (*peso maggiore*) è detta **cifra più significativa**

Esempi

Sistema Decimale, Base 10

$$(126)_{10} = 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 = 6 + 20 + 100 = (126)_{(10)}$$

Sistema Ottale, Base 8

$$(126)_8 = 6 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 = 6 + 16 + 64 = (86)_{(10)}$$

Sistema Quaternario, Base 4

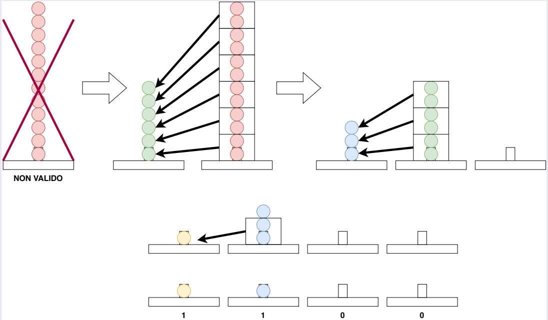
$$(123)_4 = 3 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^2 = 3 + 8 + 16 = (27)_{(10)}$$

Sistema Ternario, Base 3

$$(121)_3 = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 1 + 6 + 9 = (16)_{(10)}$$

Base 2

- Consideriamo solo **2 simboli**, $S = \{0, 1\}$
- Ogni abaco potrà contenere **al più una pallina**



$$(1100)_2 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 4 + 8 = (12)_{(10)}$$

Conversione in Base B

- La conversione di un numero da **base 10** a **base** B usa la tecnica delle **divisioni successive**

1. Sia N il numero (in base 10) da convertire
2. Si calcola la divisione **intera** $N = N/B$ e si mette da parte il **resto** R della divisione
3. Se $N > 0$ si va al passo 2
4. Se $N = 0$, si riportano i vari resti **da destra verso sinistra**: **essi rappresentano il numero convertito in base** B

Conversione in Base B

Convertire 13 in base 2

Quoziente	Resto
13	1
6	0
3	1
1	1
0	

$$\Rightarrow (1101)_2 = 2^0 + 2^2 + 2^3 = 1 + 4 + 8 = 13$$

Convertire 13 in base 5

Quoziente	Resto
13	3
2	2
0	

$$\Rightarrow (23)_5 = 3 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 = 3 + 10 = 13$$

Sistemi con Base maggiore di 10

E' possibile avere un sistema di numerazione la cui base è maggiore di 10?

E' possibile avere un sistema di numerazione la cui base è maggiore di 10?

Sistema a base 12 — **Duodecimale**

- Abbiamo bisogno di **12 simboli**
- Oltre le **10 cifre** ci servono **altri due simboli**
- Utilizziamo le **lettere *A* e *B***, con il **valore (quantità)** di 10 e 11

Sistema a Base > 10

E' possibile avere un sistema di numerazione la cui base è maggiore di 10?

Sistema a base 12 — **Duodecimale**

- Abbiamo bisogno di **12 simboli**
- Oltre le **10 cifre** ci servono **altri due simboli**
- Utilizziamo le **lettere** A **e** B, con il **valore (quantità)** di 10 e 11

Simboli del sistema duodecimale

- $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B$

Esempi

Sistema Duodecimale, da Base 12 a Base 10

$$(12B)_{12} = 11 \cdot 12^0 + 2 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^2 = 11 + 24 + 144 = (179)_{10}$$

$$(BA)_{12} = 10 \cdot 12^0 + 11 \cdot 12^1 = 10 + 132 = (142)_{10}$$

Sistema Duodecimale, da Base 10 a Base 12

Quoziente	Resto
342	6
28	4
2	2
0	

$$\Rightarrow (246)_{12} = 6 \cdot 12^0 + 4 \cdot 12^1 + 2 \cdot 12^2 = 6 + 48 + 288 = (342)_{10}$$

Sistemi con Base 16 — Esadecimale

Sistema a Esadecimale

Sistema a base 16 — **Esadecimale**

- Abbiamo bisogno di **16 simboli**
- Oltre le **10 cifre** utilizziamo le **lettere da *A* a *F***, con il **valore (quantità)** di 10, 11, 12, 13, 14, 15

Sistema Esadecimale, Tabella di Conversione

Cifra Esadecimale	**Quantità (equivalente decimale)**
0	0
1	1
2	2
...	...
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

Esempi

Sistema Esadecimale, da Base 16 a Base 10

$$(3FB)_{16} = 11 \cdot 16^0 + 15 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^2 = 11 + 240 + 768 = (1019)_{10}$$

$$(123)_{16} = 3 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^2 = 3 + 32 + 256 = (291)_{10}$$

Sistema Esadecimale, da Base 10 a Base 16

Quoziente	Resto
342	6
21	5
1	1
0	

$$\Rightarrow (156)_{16} = 6 \cdot 16^0 + 5 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^2 = 6 + 80 + 256 = (342)_{10}$$

Artimetica nei Sistemi di Numerazione
Operazione di Somma

Operazione di somma binaria

Somma in base 2

L'operazione di somma binaria, in colonna, può essere svolta applicando le seguenti semplici regole:

0	+	0	=	0
0	+	1	=	1
1	+	0	=	1
1	+	1	=	0 con riporto di 1

Esempio

Riporti			1	1		
Primo addendo		1	0	0	1	+
Secondo addendo	1	0	0	1	1	=
Risultato	1	1	1	0	0	

$$(1001)_2 + (10011)_2 = (11100)_2$$
$$9 + 19 = 38$$

Proprietà dei Sistemi di Numerazione

1. Prodotto per potenze della base

Sia dato un numero $(n)_B$ espresso in base B e un esponente $k \geq 0$, intero non negativo, allora

il prodotto di $(n)_B$ per B^k è dato dallo stesso $(n)_B$ seguito da k cifre 0

Esempio

$$
\begin{aligned}
(37)_{10} \cdot (100)_{10} &= (3700)_{10} \\
(3B)_{16} \cdot (16)_{10} &= (3B0)_{16} \\
(1101)_2 \cdot (8)_{10} = (1101)_2 \cdot (2^3)_{10} &= (1101000)_2
\end{aligned}
$$

2. Divisione intera per potenze della base

Sia dato un numero $(n)_B$ espresso in base B e un esponente $k \geq 0$, intero non negativo, allora

la **divisione intera** di $(n)_B$ per B^k è dato dal numero ottenuto cancellando k cifre a destra di $(n)_B$

Esempio

$$\begin{aligned}
(37)_{10}/(10)_{10} &= (3)_{10} \\
(3B)_{16}/(16)_{10} &= (3)_{16} \\
(10101)_2/(8)_{10} = (10101)_2/(2^3)_{10} &= (10)_2
\end{aligned}$$

3. Intervallo rappresentabile con k cifre

Sia data una base B ed un numero intero di cifre k (intero positivo), allora

con k cifre è possibile rappresentare B^k interi, e, in particolare, tutti gli interi dell'intervallo $[0, B^k - 1]$

Esempio

B, k	Intervallo	Numero di interi
$B = 10, k = 3$	$[0, 999]$	1000
$B = 8, k = 3$	$[0, (777)_8 = 8^3 - 1 = 511]$	$8^3 = 512$
$B = 2, k = 5$	$[0, (11111)_2 = 2^5 - 1 = 31]$	$2^5 = 32$

Proprietà dei Sistemi di Numerazione con base pari ad una potenza del 2

4. Sistemi con $B = 2^k$

Sia dato un sistema di numerazione con base $B = 2^k$, e k intero positivo, allora:

- L'intervallo $[0, 2^k - 1] \equiv [0, B - 1]$ è **interamente coperto** da tutti i numeri di k cifre espressi in base 2
- Ogni **gruppo di k cifre in base 2** (a partire da destra) **equivale** ad una cifra in base 2^k

Base $8 = 2^3$	Base 2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

$$\begin{aligned}(201)_8 &= (010\ 000\ 001)_2 \\ (201)_8 &= 2 \cdot 8^2 + 1 = 2 \cdot 64 + 1 = 129 \\ (10000001)_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 = 128 + 1 = 129\end{aligned}$$

Sistemi con $B = 2^k$

Base $16 = 2^4$	Base 2
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

$$
\begin{aligned}
(37B)_{16} &= (\boxed{0011}\,\boxed{0111}\,\boxed{1011})_2 \\
(37B)_{16} &= 3 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 11 = \\
&= 891 \\
(1101111011)_2 &= 1 + 2 + 8 + 16 + 32 + \\
&= +64 + 256 + 512 = 891
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1011100101)_2 &= (\boxed{10}\,\boxed{1110}\,\boxed{0101})_2 = \\
&= (\;2 \quad E \quad 5\;)_{16}
\end{aligned}
$$

Sistemi di Numerazione

Corrado Santoro

Dipartimento di Matematica e Informatica
santoro@dmi.unict.it

Corso di Architettura degli Elaboratori