SISTEMI LINEARI

Sistemi di equazioni

Un **sistema di equazioni** è un insieme di equazioni per le quali si cercano eventuali soluzioni comuni.

Esempio

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Ognuna delle due equazioni ha infinite soluzioni.

La coppia $(x = 4\,;\ \ y = 3)$ è la soluzione comune.

Un sistema si dice **intero** se tutte le equazioni che lo compongono sono intere.

Un sistema si dice **frazionario** se almeno una delle equazioni che lo compongono è un'equazione frazionaria.

Il **grado** di un sistema intero è il prodotto dei gradi delle sue equazioni.

Esempi

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x \cdot y = 15 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$
Sistema di 2 equazioni in 2 incognite di 2° grado	Sistema di 2 equazioni in 2 incognite di 4° grado	Sistema di 3 equazioni in 3 incognite di 1° grado

Un sistema si dice **determinato** quando ha un numero finito di soluzioni.

Un sistema si dice **indeterminato** quando ha infinite soluzioni.

Un sistema si dice **impossibile** quando non ha soluzioni.

Sistemi lineari

Un **sistema di due equazioni lineari in due incognite** è un sistema formato da due equazioni di primo grado nelle stesse due incognite.

Un **sistema di due equazioni lineari in due incognite** ridotto a forma normale è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$a\,,\ a'\,,\ b\,,\ b'$ sono detti **coefficienti** delle incognite

$c\,,\ c'$ sono detti **termini noti** delle due equazioni

$Se\quad \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$	Il sistema è **determinato**
$Se\quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$	Il sistema è **indeterminato**
$Se\quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$	Il sistema è **impossibile**

Esempi

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ $\qquad$ Il sistema è determinato

$\begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} = \dfrac{6}{3}$ $\qquad$ Il sistema è indeterminato

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{3}{5}$ $\qquad$ Il sistema è impossibile

Metodo di sostituzione

Per risolvere un sistema di due equazioni lineari in due incognite occorre:

1. ridurre il sistema in forma normale *(applicando i principi di equivalenza delle equazioni)*
2. verificare se il sistema è determinato, *(in caso affermativo continuare con la risoluzione)*
3. ricavare un'incognita da una delle due equazioni
4. sostituire l'espressione dell'incognita trovata nell'altra equazione
5. risolvere l'equazione in un'incognita ottenuta
6. sostituire la soluzione trovata nell'altra equazione per determinare il valore dell'altra incognita
7. scrivere la coppia dei valori soluzione del sistema
8. effettuare la verifica della soluzione *(non obbligatoria)*.

Esempio

$\begin{cases} (x-1)(y+1)=xy \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=3 \end{cases}$	Riduciamo il sistema in forma normale
$\begin{cases} xy+x-y-1=xy \\ 2x+5y=30 \end{cases}$	
$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+5y=30 \end{cases}$	Verifichiamose il sistema è determinato
$\left(\frac{a}{a'}=\frac{1}{2}\right) \neq \left(\frac{b}{b'}=\frac{-1}{5}\right)$	Essendo il sistema determinato, continuiamo nella risoluzione
$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+5y=30 \end{cases}$	Ricaviamo l'incognita x dalla prima equazione
$\begin{cases} x=1+y \\ 2x+5y=30 \end{cases}$	Sostituiamo l'espressione dell'incognita trovata nell'altra equazione
$\begin{cases} - \\ 2\cdot(1+y)+5y=30 \end{cases}$	Risolviamo l'equazione nell'incognita y ottenuta
$\begin{cases} - \\ 2+2y+5y=30 \end{cases}$	
$\begin{cases} - \\ 7y=28 \end{cases}$	
$\begin{cases} - \\ y=4 \end{cases}$	Sostituiamo la soluzione trovata nell'altra equazione e determiniamo il valore dell'altra incognita
$\begin{cases} x=1+4 \\ y=4 \end{cases}$	
$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$	Scriviamo la coppia dei valori soluzione del sistema.

Verifica della soluzione	
$\begin{cases} (5-1)(4+1)=5\cdot 4 \\ \frac{5}{5}+\frac{4}{2}=3 \end{cases}$	Sostituiamo le soluzioni trovate al posto delle due incognite x e y
$\begin{cases} 4\cdot 5=5\cdot 4 \\ 1+2=3 \end{cases}$	essendo le due eguaglianze vere il sistema è stato risolto correttamente.

Metodo del confronto

Per risolvere un sistema di due equazioni lineari in due incognite occorre:

1. ridurre il sistema in forma normale *(applicando i principi di equivalenza delle equazioni)*
2. verificare se il sistema è determinato, *(in caso affermativo continuare con la risoluzione)*
3. ricavare la stessa incognita da entrambe le equazioni
4. uguagliare le due espressioni delle incognite trovate
5. risolvere l'equazione in un'incognita ottenuta
6. sostituire la soluzione trovata in una delle due equazioni per determinare il valore dell'altra incognita
7. scrivere la coppia dei valori soluzione del sistema
8. effettuare la verifica della soluzione *(non obbligatoria)*.

Esempio

$\begin{cases}(x-1)(y+1)=xy\\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=3\end{cases}$	Riduciamo il sistema in forma normale
$\begin{cases}xy+x-y-1=xy\\ 2x+5y=30\end{cases}$	
$\begin{cases}x-y=1\\ 2x+5y=30\end{cases}$	Verifichiamo se il sistema è determinato
$\left(\dfrac{a}{a'}=\dfrac{1}{2}\right)\neq\left(\dfrac{b}{b'}=\dfrac{-1}{5}\right)$	Essendo il sistema determinato, continuiamo nella risoluzione
$\begin{cases}x=1+y\\ 2x=30-5y\end{cases}$	Ricaviamo l'incognita x da entrambe le equazioni
$\begin{cases}x=1+y\\ x=15-\dfrac{5}{2}y\end{cases}$	
$\begin{cases}1+y=15-\dfrac{5}{2}y\\ \_\_\_\end{cases}$	Uguagliamo le due espressioni delle incognite trovate e risolviamo l'equazione ottenuta
$\begin{cases}2+2y=30-5y\\ \_\_\_\_\end{cases}$	
$\begin{cases}7y=28\\ \_\_\end{cases}$	
$\begin{cases}y=4\\ \_\_\end{cases}$	Sostituiamo la soluzione trovata in una delle due equazioni e determiniamo il valore dell'altra incognita
$\begin{cases}x=1+4\\ y=4\end{cases}$	
$\begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}$	Scriviamo la coppia dei valori soluzione del sistema

Verifica della soluzione	
$\begin{cases}(5-1)(4+1)=5\cdot 4\\ \dfrac{5}{5}+\dfrac{4}{2}=3\end{cases}$	Sostituiamo le soluzioni trovate al posto delle due incognite x e y
$\begin{cases}4\cdot 5=5\cdot 4\\ 1+2=3\end{cases}$	essendo le due eguaglianze vere il sistema è stato risolto correttamente.

Metodo di riduzione (o di addizione e sottrazione)

Per risolvere un sistema di due equazioni lineari in due incognite occorre:

1. ridurre il sistema in forma normale *(applicando i principi di equivalenza delle equazioni)*
2. verificare se il sistema è determinato, *(in caso affermativo continuare con la risoluzione)*
3. moltiplicare la prima equazione per il coefficiente della prima incognita della seconda equazione
4. moltiplicare la seconda equazione per il coefficiente della prima incognita della prima equazione
5. Se i coefficienti della prima incognita, nelle due equazioni, sono uguali si effettua la sottrazione membro a membro. Se invece sono opposti si esegue l'addizione.
6. risolvere la semplice equazione in un'incognita ottenuta
7. sostituire la soluzione trovata nell'altra equazione per determinare il valore dell'altra incognita
8. scrivere la coppia dei valori soluzione del sistema
9. effettuare la verifica della soluzione *(non obbligatoria)*.

Esempio

$\begin{cases} (x-1)(y+1) = xy \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$	Riduciamo il sistema in forma normale
$\begin{cases} xy + x - y - 1 = xy \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$	
$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$	Verifichiamo se il sistema è determinato
$\left(\frac{a}{a'} = \frac{1}{2}\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{-1}{5}\right)$	Essendo il sistema determinato, continuiamo nella risoluzione
$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$	Moltiplichiamo la prima equazione per il coefficiente della prima incognita della seconda equazione
$\begin{matrix} 2 \cdot \\ 1 \cdot \end{matrix} \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$	Moltiplichiamo la seconda equazione per il coefficiente della prima incognita della prima equazione
$\begin{cases} 2x - 2y = 2 & - \\ 2x + 5y = 30 & = \end{cases}$ $-7y = -28$	Siccome i coefficienti della prima incognita, nelle due equazioni, sono uguali si effettua la sottrazione membro a membro e si ricava il valore della prima incognita
$y = 4$	Sostituiamo la soluzione trovata in una delle due equazioni per determinare il valore dell'altra incognita
$\begin{cases} x = 1 + 4 \\ y = 4 \end{cases}$	
$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$	Scriviamo la coppia dei valori soluzione del sistema

Verifica della soluzione	
$\begin{cases} (5-1)(4+1) = 5 \cdot 4 \\ \frac{5}{5} + \frac{4}{2} = 3 \end{cases}$	Sostituiamo le soluzioni trovate al posto delle due incognite x e y
$\begin{cases} 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$	essendo le due eguaglianze vere il sistema è stato risolto correttamente.

Teorema di Cramer

Dato il sistema lineare di due equazioni in due incognite $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
Se $D \neq 0$ il sistema è *determinato* e ha soluzione $\left(x = \frac{D_x}{D} \;;\; y = \frac{D_y}{D} \right)$
Se $D = 0$ il sistema è : *indeterminato* se $D_x = 0 \;\wedge\; D_y = 0$; *impossibile* se $D_x \neq 0 \;\vee\; D_y \neq 0$

Con $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix}$ determinante del sistema

$\boldsymbol{D_x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix}$ determinante relativo all'incognita $\boldsymbol{x}$ del sistema

$\boldsymbol{D_y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{c'} \end{vmatrix}$ determinante relativo all'incognita $\boldsymbol{y}$ del sistema

Dimostrazione

Supponiamo, per semplicità, che i coefficienti a, a', b, b' del sistema lineare siano tutti diversi da zero.
Applichiamo quindi il metodo di addizione e sottrazione :

Moltiplicando i due membri della prima equazione per b' e i due membri della seconda equazione per b : $\begin{cases} ab'\,x + bb'\,y = b'c \\ a'b\,x + bb'y = bc' \end{cases}$ *Sottraendo membro a membro si ottiene:* $ab'x - a'b\,x = b'c - bc'$ *da cui si ricava:* $(ab' - a'b\,)x = b'c - bc'$	*Moltiplicando i due membri della prima equazione per a' e i due membri della seconda equazione per a :* $\begin{cases} aa'\,x + a'b\,y = a'c \\ aa'\,x + ab'\,y = ac' \end{cases}$ *Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene:* $ab'y - a'b\,y = ac' - a'c$ *da cui si ricava:* $(ab' - a'b\,)y = ac' - a'c$

Se $\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$ *si ottengono le due espressioni*	
$\boldsymbol{x} = \dfrac{b'c - bc'}{ab' - a'b} = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \dfrac{\boldsymbol{D_x}}{\boldsymbol{D}}$	$\boldsymbol{y} = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \dfrac{\boldsymbol{D_y}}{\boldsymbol{D}}$
il sistema è determinato	

Se invece $\boldsymbol{ab' - a'b = 0}$
Se $\boldsymbol{b'c - bc' = 0} \;\wedge\; \boldsymbol{ac' - a'c = 0}$ *entrambe le equazioni del sistema sono indeterminate* $\Rightarrow$ *S. indeterminato*
Se $\boldsymbol{b'c - bc' \neq 0} \;\vee\; \boldsymbol{ac' - a'c \neq 0}$ *una delle due equazioni del sistema è impossibile* $\Rightarrow$ *S. impossibile.*

Il risultati ottenuti, supponendo che a, a', b, b' siano diversi da zero, possono essere dimostrati anche per i casi in cui qualcuno di questi coefficienti è nullo.

Esempio

$\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ $\left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{46}{23} = 2 \;;\; y = \frac{D_y}{D} = \frac{23}{23} = 1 \right)$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) = 8 + 15 = 23$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 8 \cdot (-5) = 6 + 40 = 46 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 32 - 9 = 23$$