

Моделювання коливального руху на прикладі математичного маятника.

Теоретичний матеріал

Якщо тіло здійснює вільні незгасаючі коливання, то його координата з плином часу змінюється за законом косинуса або синуса:

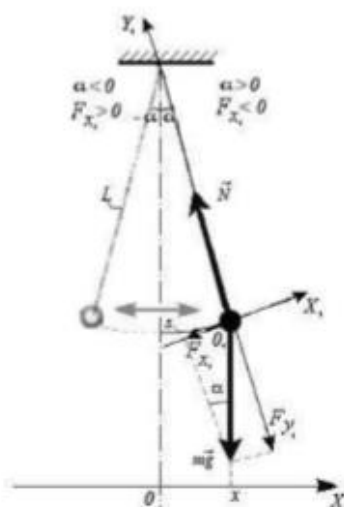
$$x = x_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

де $x_{\max}$ – амплітуда, $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливання, φ – початкова фаза, ω_0 – власна циклічна (кругова) частота коливання. Швидкість (перша похідна координати за часом) і прискорення (друга похідна координати за часом) при цьому також будуть змінюватися по гармонійному закону:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = x_{\max} \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_{\max} \omega_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = x'' = -x_{\max} \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_{\max} \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi + \pi).$$

Для перетворення виразів ми скористалися формулами приведення. Звідси видно, що швидкість випереджає зміщення по фазі на $\pi/2$, а прискорення - на π , тобто знаходиться в протифазі зі зміщенням.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Моделювання коливального руху на прикладі математичного маятника									
2										
3										
4	Розрахункові формули:									
5										
6	$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; x(t) = x_{\max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi);$									
7	$v(t) = \omega_0 \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi); a(t) = -\omega_0^2 x_{\max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi).$									
8										
9	Вихідні дані:									
10	Амплітуда коливання	$x_{\max} =$		м						
11	Довжина маятника	$L =$		м						
12	Період коливання	$T =$		с						
13										
14	Проміжки часу	$t_{\min} =$		с						
15		$t_{\max} =$		с						
16		$\Delta t =$		с						
17	Кругова частота	$\omega_0 =$		рад/с						
18	Початкова фаза	$\varphi =$		град = рад						
19										
20										

Вихідні дані:

- 1) амплітуда (початкове зміщення) x_{max} ;
- 2) початкова фаза φ ;
- 3) довжина нитки L ;
- 4) інтервал часу.

Сталі величини: амплітуда, початкова фаза, довжина нитки, період (частота) коливань. Змінні - зміщення тіла в кожен момент часу (координата x), швидкість і час.

Занесіть початкові дані в клітинки C10, C11, C14, C15 и C18. Для прикладу можна скористатись такими значеннями:

$$x_{max}=0,3 \text{ м}; L=1 \text{ м}; t_{max}=10 \text{ с}; \varphi=30^\circ.$$

Початковий момент часу (клітинка C14) варто прийняти рівний нулю.

Створіть формули для розрахунку періоду, частоти коливання та інтервалу часу в клітинках C12, C17 і C16 відповідно. Кількість значущих цифр в сталих величинах $g \approx 9,80665 \text{ м/с}^2$ та $\pi \approx 3,14159265358979$ визначатимуть точність розрахунків.

Варто наголосити на обов'язковому перерахунку значення початкової фази із градусів у радіани. Для цього потрібно скористатись вбудованою функцією РАДІАНЫ() (клітинка E18).

Діапазон клітинок G8÷J8 заповніть формулами для обчислення значень Час, Координата, Швидкість, Прискорення. Отримані формули скопіюйте в нижню частину таблиці заповнивши ними діапазон клітинок G8: J110. Така кількість значень потрібна для побудови точної моделі процесу та проведення подальшого комп'ютерного експерименту.

Нагадування: При складанні формул не забувайте використовувати абсолютні посилання для постійних величин.

Побудова графіка залежності $x(t)$, $v(t)$ та $a(t)$

За результатами розрахунків необхідно побудувати три графіка залежності: $x(t)$, $v(t)$ та $a(t)$.

Оскільки у всіх випадках по осі Ох відкладається одна і та ж величина (час), всі три залежності можна представити в одній системі координат. Такий спосіб побудови застосовується в тих випадках, коли необхідно провести порівняння декількох різних (неоднорідних) величин або досліджувати поведінку деякої величини залежно від початкових умов або умов проведення експерименту. Однак він має і недоліки: він може бути застосований тільки тоді, коли порівнювані величини мають один і той же порядок.

Діапазон даних для побудови діаграми - діапазон клітинок G8:J110. Програма Excel автоматично розглядатиме цей діапазон як три ряди даних, і це дасть можливість побудувати три графіка залежності, а перша колонка даних (G8:G108) буде виділена для них, яка спільна.

Основні вимоги до графіків:

- тип діаграми – "Графік з маркерами";
- діаграма повинна містити заголовок та підпис для кожної із осей;
- діаграму доповнити "легендою";
- включити відображення ліній сітки;
- діаграму розмістити на окремому аркуші.



Комп'ютерний експеримент

1. Змінюючи значення початкових даних прослідкувати за змінами на графіку.
2. Визначити зсув фаз між коливаннями кожної пари величин. Це зручно виконати для випадку, коли початкова фаза коливань дорівнює нулю.
3. Змінюючи момент часу $t_{\max}$ (і, цим самим, - інтервал Δt), визначити межі застосування даної моделі.
4. Додати в таблицю вихідних даних контрольні точки для заданого моменту часу і вивести їх на всіх графіках.