MULTIVERSOS

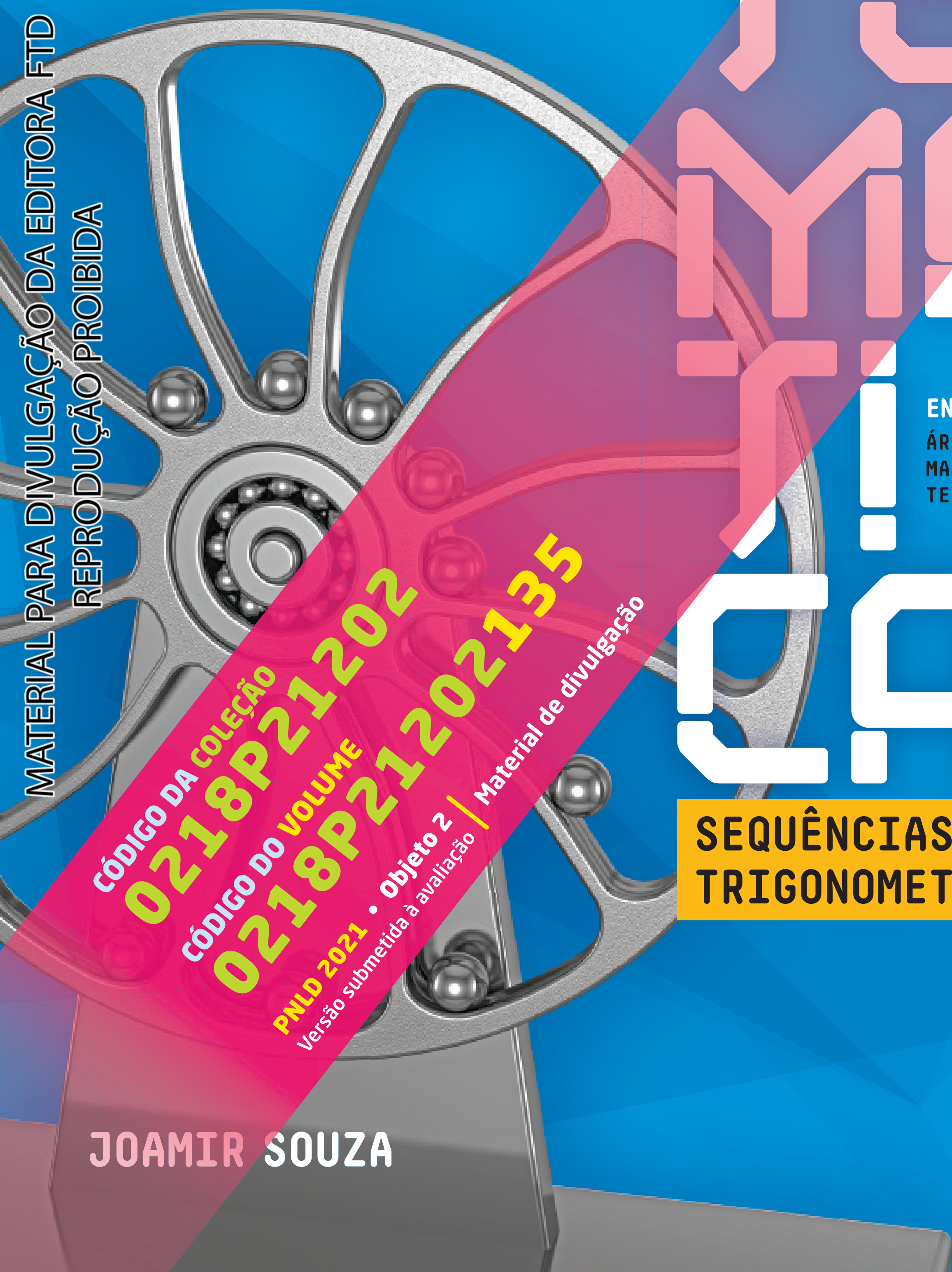
MATEMÁTICA

ENSINO MÉDIO

ÁREA DO CONHECIMENTO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

MANUAL DO PROFESSOR

SEQUÊNCIAS E TRIGONOMETRIA



JOAMIR SOUZA

FTD

MULTIVERSOS

MATEMÁTICA

SEQUÊNCIAS E TRIGONOMETRIA

JOAMIR ROBERTO DE SOUZA

Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).

Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

Área do conhecimento:
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ENSINO MÉDIO

FTD
1ª edição
São Paulo – 2020

MANUAL DO PROFESSOR

FTD

Copyright © Joamir Roberto de Souza, 2020

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira

Direção editorial adjunta Luiz Tonolli

Gerência editorial Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita

Edição/Assistência Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)

Alan Mazoni Alves, André Luiz Ramos de Oliveira, Camila Silvestre, Cristina Silva dos Santos, Janaina Bezerra Pereira, João Alves de Souza Neto, Lísias Cruz, Polyanna Costa, Valéria Elvira Prete

Preparação/Revisão Maria Clara Paes (sup.)

Ana Lúcia P. Horn, Carolina Ramos Manley, Daniela Nanni, Danielle Costa, Desirée Araújo, Eliana Vila Nova de Souza, Jussara Rodrigues Gomes, Pedro Henrique Fandi, Priscilla Freitas, Yara Affonso

Gerência de produção e arte Ricardo Borges

Design Daniela Máximo (coord.), Bruno Attili

Imagem de capa Dragun3d/Shutterstock.com

Arte e Produção Isabel Cristina Ferreira Corandin Marques (sup.)

Adriana Maria Nery de Souza, Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, Kleber Bellomo Cavalcante, Nadir Fernandes Racheti, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (assist.)

Diagramação Maluhy&Co

Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga

Licenciamento de textos Erica Brambila, Bárbara Clara (assist.)

Iconografia Jonathan Christian do Prado Santos, Ana Isabela Pithan Maraschin (trat. imagens)

Ilustrações Alan Carvalho, Artur Fujita, Bentinho, Cbook Produções, Dacosta Mapas, Daniel Bogni, Fabio Eugenio, Leo Teixeira, Lucas Farauj

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Souza, Joamir Roberto de
Multiversos Matemática: Sequências e trigonometria: Ensino Médio / Joamir Roberto de Souza. – 1. ed. –
São Paulo : Editora FTD, 2020.

"Área do conhecimento : Matemática e suas Tecnologias"
Bibliografia.
ISBN 978-65-5742-032-4 (Aluno)
ISBN 978-65-5742-033-1 (Professor)

1. Matemática (Ensino Médio) I. Título.

20-43453 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino Médio 510.7

Aline Graziele Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Quando você observa a sociedade em que está inserido, provavelmente identifica diversas situações desafiadoras que influenciam diretamente suas ações. Os avanços tecnológicos, por exemplo, estão modificando as maneiras de acesso às informações, as relações de trabalho, os hábitos de consumo, as interações sociais e outros aspectos que impactam diversas áreas da vida das pessoas.

Esta etapa do Ensino Médio será muito importante para sua formação cidadã e crítica, uma vez que você será estimulado a compreender conhecimentos historicamente construídos e a relacioná-los com a realidade. Dessa maneira, é esperado que o seu repertório cultural e intelectual seja ampliado, possibilitando o enfrentamento de desafios contemporâneos locais e globais.

Este livro foi elaborado para contribuir com o seu aprendizado em Matemática, possibilitando a exploração de diferentes situações que, sempre que possível, envolvem outras áreas do conhecimento, as quais auxiliam na continuidade do estudo em etapas posteriores, na sua relação com o mercado de trabalho e na sua vida social.

Por fim, desejo que você, estudante, explore este livro com dedicação e entusiasmo e desenvolva as propostas de estudo, interagindo com os professores e os colegas e compreendendo a importância do conhecimento matemático em sua formação como cidadão atuante na comunidade em que vive e na busca de uma sociedade mais justa e inclusiva.

O autor.

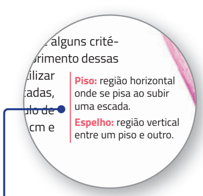
CONHEÇA SEU LIVRO

BNCC

Nesta parte, são apresentadas as competências e habilidades que são trabalhadas com maior ênfase ao longo da Unidade.

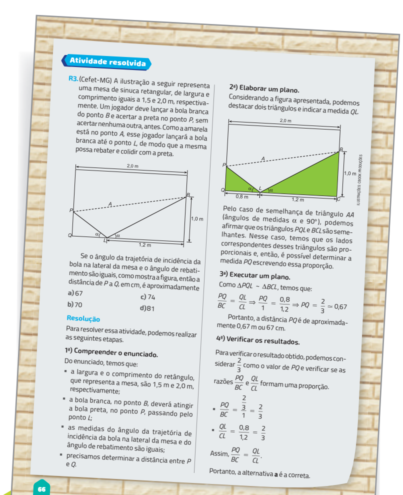
Abertura de Unidade

Nesta dupla de páginas, você é convidado a refletir sobre um tema relacionado ao conteúdo a ser estudado.



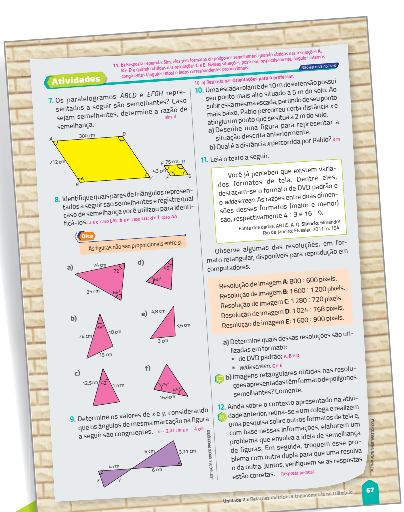
Vocabulário

Este boxe apresenta o significado de termos destacados no texto.



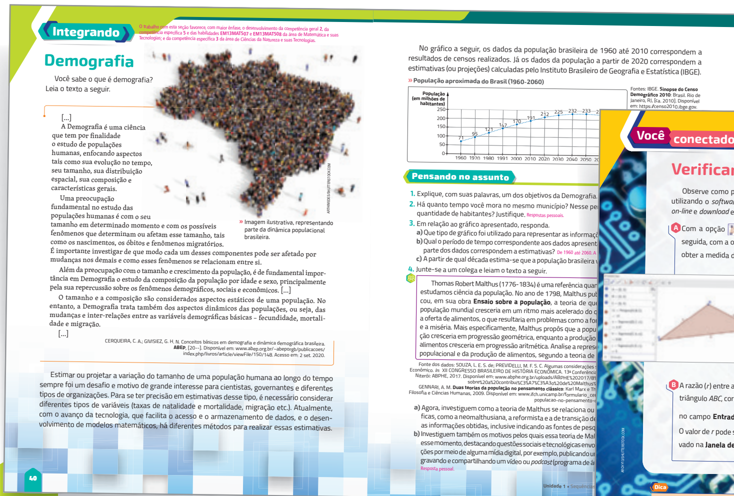
Atividades resolvidas

Para ampliar seu repertório de estratégias, acompanhe a resolução detalhada de atividades e de problemas relacionados aos conteúdos estudados.



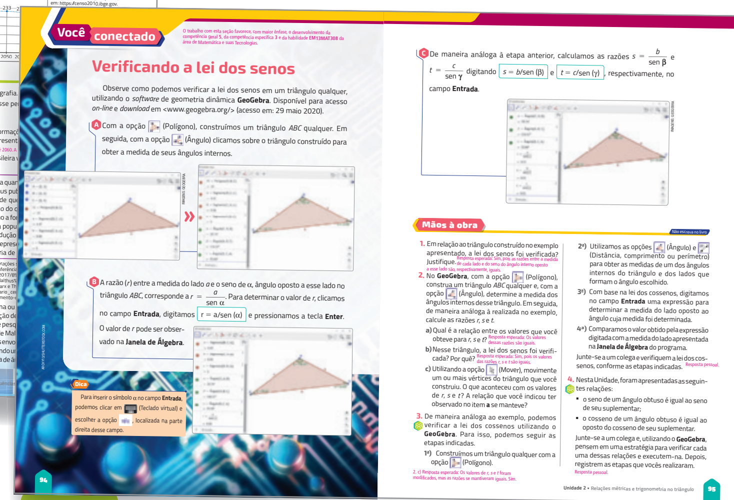
Atividades

É a oportunidade de retomar os conteúdos apresentados por meio de atividades e problemas propostos.



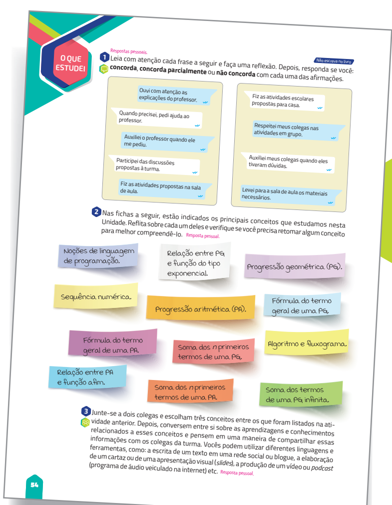
Integrando

Esta seção propõe discussões de assuntos de maior integração com outras áreas do conhecimento.



Você conectado

Nesta seção, você pode desenvolver competências e habilidades relacionadas ao pensamento computacional e também fazer uso de recursos tecnológicos para a resolução de problemas.



O que estudei

É um momento para você refletir sobre o seu desenvolvimento ao estudar a Unidade, tanto com relação a suas atitudes quanto aos conteúdos aprendidos.

Boxes

Dica

Apresentação de alguma dica ou de um lembrete importante para a resolução de uma atividade ou para a compreensão de algum conceito em discussão.

Conexões

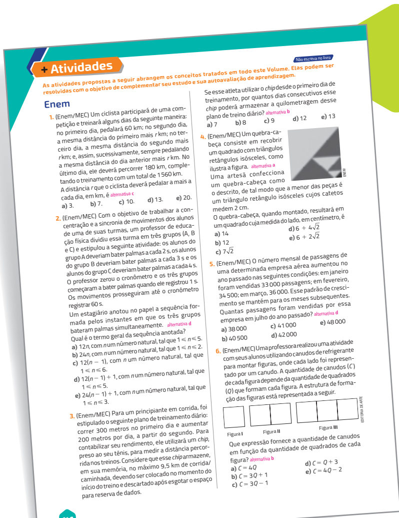
Boxe em que são apresentadas sugestões de *sites*, vídeos, *softwares* ou textos para complementar os assuntos discutidos no livro.

Para pensar

Aqui, você tem oportunidade de resolver questões que contribuem para a reflexão e a argumentação a respeito do conteúdo em estudo e, assim, participar ativamente da aula.

Matemática na História

Neste boxe são apresentadas informações sobre a História da Matemática com tópicos relacionados ao conteúdo em estudo.



+ Atividades

A seção fornece diversas questões do Enem e de vestibulares de diferentes regiões do Brasil relacionadas ao que foi estudado no Volume.

Ícones

Resposta oral • Quando este ícone for apresentado, a resposta para a atividade deve ser dada oralmente, sem a necessidade de registro escrito.

Atividade em grupo • É sugerido que, nas atividades com este ícone, sejam formadas duplas ou grupos. Dessa maneira, você pode discutir com seus colegas utilizando, como argumento, os conhecimentos adquiridos ao longo de sua vida escolar.

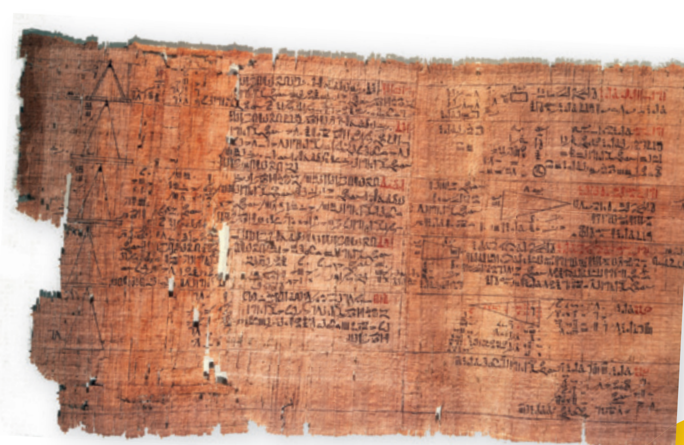
Sumário

ISMAR INGBER/SHUTTERSTOCK.COM

Unidade 3

Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas | 98

THIAGO LEMOS/FOTOARENA



VISIOARS/AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

CONHEÇA O VOLUME

Objetivos a serem desenvolvidos neste Volume

Ao realizar os estudos propostos neste livro da Coleção, esperamos que os objetivos apresentados a seguir sejam alcançados.

- Compreender a ideia de sequência numérica como uma função de domínio discreto, formado por números naturais, e classificar essa sequência em finita ou infinita.
- Identificar regularidades em uma sequência numérica ou figural e defini-la de maneira recursiva ou não recursiva.
- Compreender o conceito de progressão aritmética (PA) e de progressão geométrica (PG), associando-as a uma função afim ou exponencial, respectivamente, de domínio discreto.
- Determinar os termos e a soma de termos de uma PA e de uma PG, bem como classificá-las de acordo com o comportamento deles.
- Reconhecer o uso de linguagens de programação no funcionamento de aparelhos eletrônicos para executar determinadas tarefas.
- Interpretar e construir algoritmos em linguagem corrente e/ou matemática ou por meio de fluxograma, a fim de descrever as etapas necessárias para executar uma tarefa ou resolver um problema, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Reconhecer a utilização de métodos científicos para obter e validar resultados, bem como identificar diferenças entre o método científico indutivo e dedutivo.
- Compreender e utilizar o teorema de Tales, o conceito de semelhança de figuras geométricas planas e as relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas em diversos contextos.
- Compreender razões trigonométricas no triângulo e reconhecer a importância das relações ao contribuir na resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a determinação de distâncias inacessíveis.
- Identificar arcos em uma circunferência e determinar a medida de seu comprimento e a sua medida angular.
- Compreender o ciclo trigonométrico para associar arcos de diferentes medidas angulares e números reais a pontos da circunferência que compõe essa estrutura.
- Determinar o seno, o cosseno e a tangente de um número real e da soma e da diferença das medidas angulares de dois arcos trigonométricos, utilizando ou não o ciclo trigonométrico.
- Compreender o conceito de função seno, de função cosseno e de funções do tipo trigonométricas, além de esboçar e analisar o gráfico dessas funções, identificando suas características.
- Reconhecer fenômenos periódicos da natureza e a possibilidade de modelá-los por meio de funções do tipo trigonométricas.
- Analisar e investigar aplicações de funções do tipo trigonométricas, explorando situações de diferentes áreas do conhecimento, como marés, ciclo menstrual e ondas sonoras.
- Resolver equações trigonométricas.
- Resolver e elaborar problemas, individualmente ou em grupo, envolvendo sequências, noções de linguagens de programação, teorema de Tales, semelhança entre figuras geométricas planas, relações métricas e trigonométricas no triângulo, trigonometria na circunferência e funções e equações trigonométricas, relacionados ou não a situações do cotidiano.

Justificativa da pertinência dos objetivos

Os objetivos citados anteriormente são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento científico e computacional; para o reconhecimento da importância de conhecimentos historicamente construídos para a sociedade; e para sua formação como cidadão crítico, reflexivo e atuante, que investiga, que argumenta e que formula e testa conjecturas, contribuindo em suas práticas sociais, individual ou coletiva.

O reconhecimento de sequências numéricas ou de figurais contribui para ampliar a capacidade de análise em diferentes situações, como estimar e/ou prever resultados que obedeçam a determinada regra ou padrão e relacionar determinadas situações a funções afins ou exponenciais cujo domínio seja o conjunto dos números naturais positivos.

A construção de algoritmos utilizando diferentes tipos de representação, por meio de linguagem corrente ou matemática, de fluxograma ou de uma linguagem de programação estimula o desenvolvimento do pensamento computacional e a capacidade de pensar matematicamente para interpretar e resolver um problema.

Conhecer métodos científicos e suas características contribuem para que você estabeleça conjecturas, defina estratégias e procedimentos mais adequados para obter ou validar um resultado com base em argumentações consistentes. Além disso, reconhecer a aplicação das relações trigonométricas em situações do cotidiano e em diferentes contextos pode auxiliá-lo no estudo das funções trigonométricas, com suas principais características e suas representações, e na identificação de situações ou fenômenos da natureza que podem ser modelados por esse tipo de função, com ou sem auxílio de recursos tecnológicos.

Os conceitos estudados poderão ser utilizados para resolver e elaborar problemas e analisar e verificar os resultados obtidos neles, aqui ou em situações com as quais você possa se deparar futuramente.


MONKEY BUSINESS IMAGES/SHUTTERSTOCK.COM

UNIDADE 1

Sequências e noções de linguagem de programação

O trabalho com esta abertura de Unidade favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **1**.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC:

Competências gerais: 1, 2 e 5

Matemática e suas Tecnologias

Competências específicas: 3, 4 e 5

Habilidades: EM13MAT315, EM13MAT405, EM13MAT507 e EM13MAT508

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

Competência específica: 3

O texto integral das competências e das habilidades citadas encontra-se no final deste livro do estudante.

Stop-motion

É provável que você já tenha assistido a um filme ou a uma animação que utiliza a técnica chamada *stop-motion*. Em tradução livre para o português, essa técnica significa "movimento parado". Com ela, por exemplo, um objeto é fotografado de um mesmo ângulo diversas vezes, mas com pequenas alterações em sua posição. Cada uma dessas fotografias corresponde a um quadro e, ao colocá-los em disposição sequencial relacionando os quadros anteriores com os subsequentes, é possível criar um vídeo com a ideia de movimento contínuo.

Um dos precursores do *stop-motion* foi o francês George Méliès (1861-1938), que, em 1902, utilizou essa técnica para gravar o filme **Viagem à Lua**, o que possibilitou criar efeitos especiais com a movimentação quadro a quadro, já que na época não existiam os recursos da tecnologia gráfica computacional utilizada na maioria das produções atuais.

Ao longo do século XX, o *stop-motion* foi sendo desenvolvido e aprimorado. Essa técnica é considerada lenta e trabalhosa, pois é necessário criar em torno de 24 quadros para se obter 1 segundo de animação.

Fonte dos dados: PURVES, B. ***Stop-motion***. Tradução de João Eduardo Nóbrega Tortello. Porto Alegre: Bookman, 2011.

STILLFX/SHUTTERSTOCK.COM; IGOR SHIKOV/SHUTTERSTOCK.COM; EDITORIA DE ARTE

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens abaixo.

- Explique com suas palavras como funciona a produção de uma animação utilizando a técnica de *stop-motion*.
- Você já assistiu a alguma animação produzida com a técnica *stop-motion*? Qual? Se necessário, faça uma breve pesquisa.
- Como se calculam quantos quadros são necessários para obter uma cena de animação, com certa duração, produzida com a técnica *stop-motion*?

Veja os comentários sobre a abordagem desses itens nas **Orientações para o professor**.

AA FILM ARCHIVE/ ALAMY/FOTOARENA

» Dirigido por Peter Lord e Nick Park, **A fuga das galinhas** (2000) é uma animação produzida com a técnica de *stop-motion*. Eles filmaram 20 quadros por segundo em vez dos tradicionais 24, totalizando mais de 100 000 quadros para obter 84 minutos de animação.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**.

Sequências

Na abertura desta Unidade, vimos que, para obter 1 s de animação utilizando o processo *stop-motion,* são necessários cerca de 24 quadros da cena. Podemos indicar a quantidade de quadros necessários para produzir uma animação considerando o tempo, em segundos, da seguinte maneira:

$$(0, 24, 48, 72, ...)$$

Para pensar

Quais os próximos dois números dessa sequência? Explique como você fez para obtê-los.

96 e 120. Resposta esperada: Os números podem ser obtidos calculando 72 + 24 = 96 e 96 + 24 = 120.

PHOTO 12/ALAMY/FOTOAREANA

» A animação **Minhocas**: o filme (2013) é o primeiro longa-metragem brasileiro produzido com a técnica de *stop-motion*. Ela foi filmada utilizando 24 quadros por segundo.

Conexões

Acesse este vídeo para saber mais sobre como foi feita a animação **Minhocas**: o filme:

- CONHEÇA o "Minhocas", primeiro longa-metragem em *stop-motion* da América Latina. 2012. Vídeo (9min4s). Publicado pelo canal Programa Reclame. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2q5_j7A-7YQ. Acesso em: 6 maio 2020.

As quantidades de quadros por segundo são elementos de um conjunto que estão organizados em certa ordem, formando uma **sequência**. Os **elementos** ou **termos** de uma sequência podem ser representados por uma letra minúscula e um índice, que indica sua posição (ou ordem) nessa sequência.

$$(\underset{a_1}{0}, \underset{a_2}{24}, \underset{a_3}{48}, \underset{a_4}{72}, ...)$$

Ao representar o 1º termo por a_1, o 2º por a_2 e assim por diante, podemos indicar um termo qualquer da sequência por a_n, que corresponde ao termo de ordem n ou enésimo termo dessa sequência.

Podemos classificar uma sequência em finita ou infinita.

Dica

Uma função é uma relação que associa cada elemento de um conjunto A não vazio (domínio) a um único elemento de um conjunto B não vazio (contradomínio).

Denominamos **sequência finita** de n termos toda função cujo domínio é dado por $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, ou seja, A é o conjunto dos n primeiros números naturais positivos, cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Uma sequência finita pode ser indicada da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

Acompanhe alguns exemplos de sequências finitas.

- Sequência alfabética das vogais: (a, e, i, o, u).
- Sequência dos números naturais entre 20 e 25: (21, 22, 23, 24).
- Sequência dos números quadrados perfeitos menores do que 40: (1, 4, 9, 16, 25, 36).

Denominamos **sequência infinita** toda função cujo domínio é dado por $\mathbb{N}^*$ e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Uma sequência infinita pode ser indicada da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

Acompanhe alguns exemplos de sequências infinitas.

- Sequência dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, ...).
- Sequência dos múltiplos positivos de 10: (10, 20, 30, 40, 50, ...).
- Sequência dos números inteiros maiores do que -8: $(-7, -6, -5, -4, -3, \ldots)$.

Atividades resolvidas

R1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência definida em cada item.

a) $a_1 = 6$ e $a_n = a_{n-1} - 5$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

b) $a_n = 10n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

a) Podemos obter um termo dessa sequência, a partir do 2º, subtraindo 5 do termo anterior. Assim:

- $n = 2 \Rightarrow a_2 = a_{2-1} - 5 = a_1 - 5 = 6 - 5 = 1$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_{3-1} - 5 = a_2 - 5 = 1 - 5 = -4$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_{4-1} - 5 = a_3 - 5 = -4 - 5 = -9$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = a_{5-1} - 5 = a_4 - 5 = -9 - 5 = -14$

$\vdots$

Portanto, os cinco primeiros termos dessa sequência são 6, 1, -4, -9 e -14.

Essa sequência está definida de maneira **recursiva**; pois, para determinar um termo qualquer dela, é necessário conhecer um ou mais termos que o antecedem.

b) Podemos utilizar a expressão $a_n = 10n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$, para determinar um termo qualquer dessa sequência. Essa expressão é chamada de **termo geral** ou **lei de formação** da sequência. Assim:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 10 \cdot 1 + 1 = 10 + 1 = 11$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = 10 \cdot 2 + 1 = 20 + 1 = 21$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = 10 \cdot 3 + 1 = 30 + 1 = 31$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = 10 \cdot 4 + 1 = 40 + 1 = 41$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = 10 \cdot 5 + 1 = 50 + 1 = 51$

$\vdots$

Para pensar

No item **a**, a sequência $(6, 1, -4, -9, -14, \ldots)$ pode ser definida de maneira não recursiva? Justifique.

Resposta esperada: Sim, pelo termo geral $a_n = -5n + 11$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Portanto, os cinco primeiros termos dessa sequência são 11, 21, 31, 41 e 51.

O termo geral define essa sequência de maneira **não recursiva**, pois permite determinar qualquer termo da sequência sem que seja necessário conhecer outro termo.

R2. Analise a sequência a seguir, em que cada termo, a partir do 2º, é obtido adicionando 6 unidades ao termo anterior.

$$(4, 10, 16, 22, 28, ...)$$

a) Defina essa sequência de maneira não recursiva.
b) Determine o 15º termo dessa sequência.

Resolução

a) Com base nas informações do enunciado, podemos expressar os termos dessa sequência da seguinte maneira:

- $n = 1 \Rightarrow a_1 = 4$
- $n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 6 = 4 + 6 = 4 + \mathbf{1} \cdot 6$
- $n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 6 = 4 + 6 + 6 = 4 + \mathbf{2} \cdot 6$
- $n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 6 = 4 + 6 + 6 + 6 = 4 + \mathbf{3} \cdot 6$
- $n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 6 = 4 + 6 + 6 + 6 + 6 = 4 + \mathbf{4} \cdot 6$

$\vdots$

Assim, podemos definir essa sequência, de maneira não recursiva, por meio do termo geral $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 6$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Considerando $n = 15$, temos:

$$a_{15} = 4 + (15 - 1) \cdot 6 = 4 + 14 \cdot 6 = 4 + 84 = 88$$

Portanto, o 15º termo dessa sequência é 88.

Atividades

Não escreva no livro

1. Anteriormente, falamos sobre a quantidade de quadros de cena necessária para produzir uma animação utilizando a técnica de *stop-motion*. De acordo com os dados apresentados, determine quantos quadros são necessários para se obter uma animação de 45 s.
cerca de 1 080 quadros

2. Escreva os cinco primeiros termos da sequência definida em cada item.

a) $a_n = 10 - 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. $(7, 4, 1, -2, -5, ...)$

b) $a_1 = -8$ e $a_n = a_{n-1} - 6$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 2$. $(-8, -14, -20, -26, -32, ...)$

c) $a_n = 2n + \frac{1}{4}$, com $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(\frac{9}{4}, \frac{17}{4}, \frac{25}{4}, \frac{33}{4}, \frac{41}{4}, ...\right)$

3. A professora de Matemática propôs aos estudantes que escrevessem os termos de uma sequência definida por $a_n = n^2 - 4n + 3$, com $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n \leq 5$. Observe a resposta de alguns estudantes.

Felipe:
(0, 1, 0, 8, 3)

Paulo:
(8, 3, 0, −1, 0)

Flávia:
(1, 2, 3, 4, 5)

Marcela:
(0, −1, 0, 3, 8)

a) A sequência foi definida pela professora de maneira recursiva ou de maneira não recursiva? Justifique.

b) Classifique essa sequência em finita ou infinita. finita

c) Qual estudante escreveu corretamente todos os termos dessa sequência? Marcela

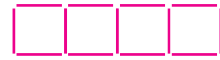
4. Os termos a_{n-1}, a_n e a_{n+1}, nessa ordem, são denominados termos consecutivos de uma sequência, sendo a_{n-1} o antecessor de a_n e a_{n+1} o sucessor de a_n.
Em relação à sequência (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...), resolva as questões.

a) Escreva três termos consecutivos dessa sequência. Algumas respostas possíveis: 1, 2 e 4; 2, 4 e 8; 4, 8 e 16; 8, 16 e 32.

b) Qual é o termo sucessor de 16? E qual é o termo antecessor de 4? 32. 2.

3. a) Resposta esperada: Não recursiva, pois, para determinar um termo qualquer da sequência, não é necessário conhecer o valor de um ou mais termos anteriores.

5. a) figura **1**: 4 palitos e 1 representação de contorno de quadrado; figura **2**: 7 palitos e 2 representações de contorno de quadrado; figura **3**: 10 palitos e 3 representações de contorno de quadrado

5. b) Resposta esperada: 

5. Analise a sequência de figuras construídas com palitos.

5. c) Resposta esperada: A partir da figura 2, acrescentam-se três palitos à figura anterior, de maneira a obter a representação de um contorno de quadrado a mais do que essa figura anterior possui.


Figura **1**

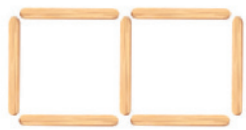
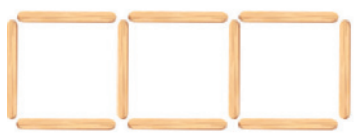


Figura **2**

 ...
Figura **3**

a) Para cada figura apresentada, escreva a quantidade de palitos utilizados e a quantidade de representações de contorno de quadrado obtidas.

b) Desenhe a próxima figura dessa sequência.

- Quantos palitos são necessários para compor essa figura? Quantas representações de contorno de quadrado tem essa figura? 13 palitos. 4 representações de contorno de quadrado.

c) Explique como pode ser construída uma figura dessa sequência a partir da figura anterior.

d) Represente a sequência numérica que expresse, ordenadamente, a quantidade de palitos necessária para construir cada figura da sequência apresentada anteriormente. Depois, defina essa sequência numérica de maneira não recursiva. (4, 7, 10, ...). Resposta esperada: $a_n = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Observe a sequência representada a seguir e, depois, defina-a de duas maneiras: uma recursiva e outra não recursiva.

(0, 13, 26, 39, 52, ...)

7. Quais dos números a seguir são termos da sequência definida por $a_n = 9(n - 1) - 5$, com $n \in \mathbb{N}^*$? 238 e 355

238	483	260	355

- Agora, determine a posição, nessa sequência, dos números que você indicou. 238: 28ª posição; 355: 41ª posição

8. Determine o décimo termo da sequência numérica definida por $a_1 = -4$ e $a_n = 14 - a_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 2$. 18

6. Resposta esperada: Recursiva: $a_1 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + 13$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 2$; não recursiva: $a_n = 13(n - 1)$ ou $a_n = 13n - 13$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Leia o texto a seguir.

Matemática na História

Uma das sequências numéricas mais estudadas ao longo da história, a sequência de Fibonacci, pode ser obtida a partir da solução do seguinte problema enunciado pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci (c. 1180-1250):

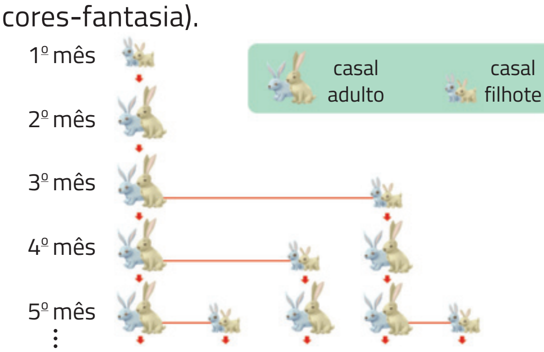
> [...] Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês? [...]

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 186.

Com base nesse problema, Fibonacci considerou as seguintes hipóteses:

- os casais de coelhos tornam-se adultos e começam a reproduzir no segundo mês de vida;
- todos os meses, cada casal de coelho adulto gera outro casal;
- no início há apenas um casal de coelhos e nenhum coelho morre durante o ano.

Analise o esquema (imagem sem escala; cores-fantasia).



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA

a) Sabendo que a quantidade de casais de coelhos em cada um dos meses determina os primeiros termos da sequência de Fibonacci, quais são os cinco primeiros termos dessa sequência? (1, 1, 2, 3, 5, ...)

b) Qual regularidade pode ser observada, com relação à quantidade total de casais de coelhos, a partir do 3º mês?

c) Obtenha a quantidade de casais de coelhos até o 12º mês e responda ao problema proposto por Fibonacci. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 e 144; 144 casais de coelhos

d) Defina, de maneira recursiva, a sequência de Fibonacci.

Resposta esperada: $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

9. b) Resposta esperada: A partir do 3º mês, a quantidade de casais de coelhos corresponde à soma das quantidades de casais nos dois meses anteriores.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**, da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT507** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Progressão aritmética (PA)

Observe as distâncias que certa pessoa deve correr semanalmente em um treino programado para um período de 8 semanas.

LEO TEIXEIRA

Podemos indicar a distância, em metros, que essa pessoa deve correr por semana nesse treinamento por meio da seguinte sequência numérica:

(4 500, 5 000, 5 500, 6 000, 6 500, 7 000, 7 500, 8 000)

Note que, a partir do 2º termo dessa sequência, a diferença entre um termo qualquer e o seu antecessor é um valor constante.

$$a_2 - a_1 = 5000 - 4500 = 500$$
$$a_3 - a_2 = 5500 - 5000 = 500$$
$$a_4 - a_3 = 6000 - 5500 = 500$$
$$\vdots$$
$$a_8 - a_7 = 8000 - 7500 = 500$$

Para pensar

Explique como é possível obter um termo dessa sequência a partir do seu antecessor.

Resposta esperada: A partir do 2º termo dessa sequência, um termo qualquer pode ser obtido adicionando-se 500 ao seu antecessor.

Sequências com características como a da situação apresentada anteriormente são denominadas **progressões aritméticas** (PA).

Denominamos **progressão aritmética (PA)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante. Essa constante, que pode ser indicada por r, é a **razão** da PA. Podemos classificar uma PA em:

- **decrescente**, quando $r < 0$;
- **constante**, quando $r = 0$;
- **crescente**, quando $r > 0$.

Analise alguns exemplos de PA.

- (16, 13, 10, 7, 4, ...)
  Nessa PA, note que um termo é sempre maior que seu sucessor. Nela, temos $r = 13 - 16 = 10 - 13 = 7 - 10 = 4 - 7 = -3$. Portanto, essa PA é decrescente.
- (−8, −8, −8, −8, −8, ...)
  Nessa PA, note que um termo é sempre igual ao seu sucessor. Nela, temos $r = -8 - (-8) = 0$. Portanto, essa PA é constante.

ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK.COM

- (5, 14, 23, 32, 41, ...)
Nessa PA, note que um termo é sempre menor que seu sucessor. Nela, temos $r = 14 - 5 = 23 - 14 = 32 - 23 = 41 - 32 = 9$. Portanto, essa PA é crescente.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ uma PA de razão r, então:

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 - a_1 = r$
$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 - a_2 = r$
$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 - a_3 = r$
$\vdots$
$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n - a_{n-1} = r$
$\vdots$

Logo, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = r$.

O enésimo termo de uma PA, sendo a_1 o 1º termo e r a razão, pode ser definido por recorrência da seguinte maneira:

$$a_n = a_{n-1} + r, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

Também podemos estabelecer uma relação entre três termos consecutivos de uma PA: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Acompanhe.

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três termos consecutivos de uma PA, o termo central a_n pode ser obtido pela média aritmética dos outros dois termos:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Dica

Podemos representar uma PA de razão r e termos desconhecidos de diferentes maneiras, por exemplo:
- para $a_1 = x$, temos $(x, x + r, x + 2r, ...)$;
- para $a_1 = x - r$, temos $(x - r, x, x + r, ...)$.

Fórmula do termo geral de uma PA

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ uma PA infinita de razão r. Como cada termo, a partir do 2º, pode ser obtido adicionando-se r ao termo anterior, temos:

$a_1 = a_1 + 0r$
$a_2 = a_1 + 1r$
$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$
$\vdots$
$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)r$
$\vdots$

Para pensar

Com suas palavras, explique que relação pode ser observada entre os elementos em destaque em cada expressão apresentada.

Resposta esperada: O fator que multiplica a razão da PA (r) é uma unidade menor que o número que indica o índice do termo correspondente da PA.

Note que podemos expressar qualquer termo de uma PA em função de a_1 e r.

A fórmula do termo geral de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,r$$

termo geral (enésimo termo): a_n; primeiro termo: a_1; ordem do termo: n; razão: r

ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK.COM

Com base na definição e na fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, podemos associá-la a uma função afim. Observe.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = a_1 + n \cdot r - r \Rightarrow a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Podemos associar uma PA com primeiro termo a_1 e razão r a uma função afim $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = r \cdot n + (a_1 - r)$, em que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente.

Por exemplo, em relação à PA (5, 9, 13, 17, ...), em que $a_1 = 5$ e $r = 9 - 5 = 4$, temos:

$$f(n) = 4 \cdot n + (5 - 4) \Rightarrow f(n) = 4n + 1$$

Portanto, os termos dessa PA podem ser obtidos por meio da função afim $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 4n + 1$.

- $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$
- $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 9$
- $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$
- $f(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17$

$\vdots$

Atividades resolvidas

R3. Dada a PA (26, 34, 42, 50, ...), resolva as questões a seguir.

a) Calcule a razão r da PA.

b) Classifique a PA em decrescente, constante ou crescente.

c) Determine o 37º termo da PA.

Resolução

a) Para determinar a razão da PA, podemos calcular:

- $r = a_2 - a_1 = 34 - 26 = 8$;
- $r = a_3 - a_2 = 42 - 34 = 8$;
- $r = a_4 - a_3 = 50 - 42 = 8$.

Portanto, a razão da PA é igual a 8.

b) Como nessa PA um termo é sempre menor que seu sucessor ($r > 0$), então a PA é crescente.

c) Como $a_1 = 26$, $r = 8$ e $n = 37$, segue que:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{37} = 26 + (37 - 1) \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{37} = 26 + 36 \cdot 8 = 26 + 288 = 314$

Portanto, o 37º termo da PA é 314.

R4. Escreva os quatro primeiros termos de uma PA em que $a_6 = -6$ e $a_{15} = 21$.

Resolução

Podemos escrever a_{15} em função de a_6 e de r.

$a_{15} = a_1 + (15 - 1) \cdot r \Rightarrow a_{15} = a_1 + 14r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{15} = \underbrace{a_1 + 5r}_{a_6} + 9r \Rightarrow a_{15} = a_6 + 9r$

Assim, determinamos o valor da razão da PA:

$a_{15} = a_6 + 9r \Rightarrow 21 = -6 + 9r \Rightarrow$

$\Rightarrow 9r = 27 \Rightarrow r = 3$

Em seguida, calculamos o valor de a_1:

$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow -6 = a_1 + 5 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = -21$

Por fim, determinamos os quatro primeiros termos dessa PA:

- $a_1 = -21$
- $a_2 = -21 + 3 = -18$
- $a_3 = -18 + 3 = -15$
- $a_4 = -15 + 3 = -12$

Portanto, os quatro primeiros termos dessa PA são -21, -18, -15 e -12.

Para pensar

Com procedimento análogo ao apresentado, explique como é possível escrever a_{20} em função de a_7 e de r.

Resposta esperada: $a_{20} = a_7 + 13r$.

R5. Determine a quantidade de termos da PA finita (102, 89, 76, 63, ..., −340).

Resolução

Nessa PA, temos:

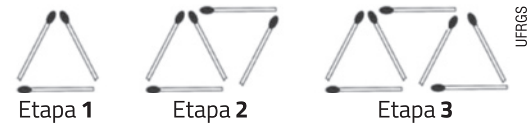
$$r = 89 - 102 = 76 - 89 = 63 - 76 = -13$$

Como $a_1 = 102$ e considerando $a_n = -340$, segue que:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow -340 = 102 + (n-1) \cdot (-13) \Rightarrow -340 = 102 - 13n + 13 \Rightarrow 13n = 455 \Rightarrow n = 35$$

Portanto, essa PA possui 35 termos.

R6. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras ao lado.



Na etapa n, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a

a) 120. **b)** 121. **c)** 122. **d)** 123. **e)** 124.

Resolução

A quantidade de palitos utilizados em cada etapa, de acordo com o padrão de construção apresentado, cresce segundo a PA em que $a_1 = 3$ e $r = 2$, ou seja, (3, 5, 7, ...). Assim, a_n corresponde à quantidade de palitos da construção na etapa n.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 245 = 3 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 245 = 1 + 2n \Rightarrow 2n = 244 \Rightarrow n = 122$$

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

R7. Um aplicativo de transporte privado iniciou seu serviço em um pequeno município e estima que o número de corridas, a partir do 1º mês, cresça mensalmente de acordo com a PA (1 500, 1 775, 2 050, ...).

a) Determine a razão dessa PA.

b) Defina uma função afim f que possa ser associada a essa PA, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente.

c) Em relação à função definida no item **b**, calcule $f(12)$ e explique o que o resultado obtido representa no contexto da situação apresentada.

Resolução

a) Temos que a razão dessa PA é dada por:

$$r = 1\,775 - 1\,500 = 2\,050 - 1\,775 = 275$$

Portanto, a razão dessa PA é 275.

b) O termo geral dessa PA, em que $a_1 = 1\,500$ e $r = 275$, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1\,500 + (n-1) \cdot 275 \Rightarrow a_n = 275n + 1\,225$$

Portanto, podemos associar a PA (1 500, 1 775, 2 050, ...) à função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 275n + 1\,225$.

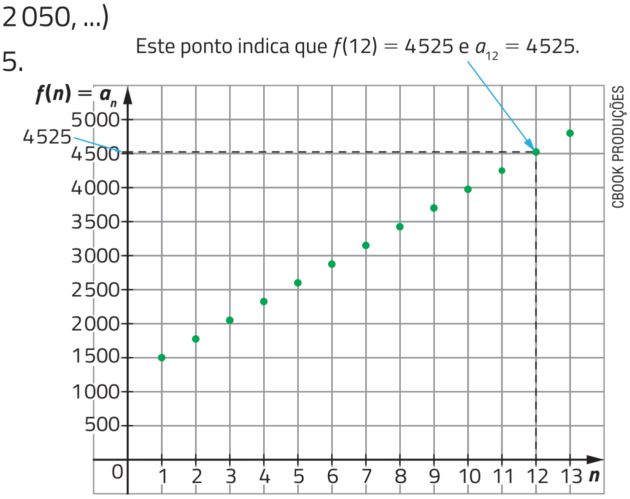
Dica

Os pontos do gráfico não foram ligados, pois o domínio de f é o conjunto dos números naturais positivos.

c) Calculando $f(12)$, obtemos:

$f(12) = 275 \cdot 12 + 1\,225 = 4\,525$

Assim, $f(12) = 4\,525$ e $a_{12} = 4\,525$. O 12º termo da PA representa a quantidade estimada de corridas para serem realizadas no 12º mês de serviço do aplicativo, nesse caso, 4 525 corridas. Observe ao lado o gráfico da função f.



Dica

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.


NUWATPHOTO/SHUTTERSTOCK.COM

R8. (Enem/MEC) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

a) R$ 512.000,00.
b) R$ 520.000,00.
c) R$ 528.000,00.
d) R$ 552.000,00.
e) R$ 584.000,00.

Resolução

Para resolver essa atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

1ª) Compreender o enunciado.

Do enunciado temos que:

- o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça;
- os próximos postes serão colocados sempre a uma distância de vinte metros do anterior;
- o último poste será colocado a 1 380 metros da praça;
- cada poste custa, no máximo, R$ 8.000,00.

2ª) Elaborar um plano.

Primeiro, é necessário obter a quantidade de postes que serão colocados na estrada. Nesse caso, podemos utilizar a fórmula do termo geral de uma PA, uma vez que as distâncias, em metros, dos postes que serão instalados até a praça formam a PA (80, 100, 120, ..., 1 380).

Depois, temos de calcular o valor total, máximo, que a prefeitura poderá gastar multiplicando a quantidade de postes obtida por R$ 8.000,00, que corresponde ao preço máximo a ser pago por poste.

3ª) Executar o plano.

Na PA (80, 100, 120, ..., 1 380), temos $a_1 = 80$, $r = 20$ e $a_n = 1\,380$. Assim, segue que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 1\,380 = 80 + (n - 1) \cdot 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\,380 = 80 + 20n - 20 \Rightarrow 20n = 1\,320 \Rightarrow n = 66$$

Agora, calculamos o maior valor que a prefeitura poderá gastar com a instalação de todos os postes:

$$66 \cdot 8\,000 = 528\,000\text{; ou seja, R\$ 528.000,00.}$$

4ª) Verificar os resultados.

Para verificar o resultado obtido, podemos inicialmente usar a fórmula do termo geral de uma PA para $a_1 = 80$, $r = 20$ e $n = 66$, e verificar se a_{66} é igual a 1 380:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{66} = 80 + (66 - 1) \cdot 20 = 80 + 1\,300 \Rightarrow a_{66} = 1\,380$$

Depois, podemos utilizar a relação entre multiplicação e divisão como operações inversas:

$66 \cdot 8\,000 = 528\,000$

- $528\,000 : 66 = 8\,000$ (preço máximo para instalar cada poste)
- $528\,000 : 8\,000 = 66$ (quantidade de postes a serem instalados)

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

Para pensar

Pense em outra maneira de fazer a verificação dos resultados desta atividade.

Resposta esperada: Considerando $a_1 = 80$, $a_{66} = 1\,380$ e $n = 66$, pode-se verificar que $r = 20$. Em seguida, proceder de maneira análoga à apresentada.

10. Verifique quais sequências a seguir são progressões aritméticas. Justifique sua resposta.

a) (11, 14, 21, 24, 31) **b, c, d**

b) (70, 88, 106, 124, 142)

c) (15, 7, −1, −9, −17)

d) (2,5; 2,5; 2,5; 2,5; 2,5)

- Agora, para cada progressão aritmética, calcule a razão r e classifique-a em decrescente, constante ou crescente.

b: $r = 18$, crescente; **c**: $r = -8$, decrescente; **d**: $r = 0$, constante

11. Escreva uma PA de cinco termos tal que:

a) $a_1 = -2$ e $r = 7$; (−2, 5, 12, 19, 26)

b) $a_3 = 13$ e $r = 21$; (−29, −8, 13, 34, 55)

c) $a_1 = 9$ e $r = \frac{1}{3}$; $\left(9, \frac{28}{3}, \frac{29}{3}, 10, \frac{31}{3}\right)$

d) $a_5 = -3$ e $r = 0$; (−3, −3, −3, −3, −3)

e) $a_4 = 28$ e $r = -4$; (40, 36, 32, 28, 24)

12. Qual das alternativas a seguir apresenta uma PA decrescente? Justifique.

a) $a_1 = 22$ e $a_n = a_{n-1} + 8$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

b) $a_n = 9n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) $a_1 = 16$ e $a_n = a_{n-1} - 6$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

d) $a_n = -n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Alternativa **c**, pois apresenta uma PA de razão negativa $r = -6$.

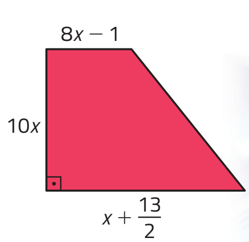
13. Escreva os três primeiros termos de uma PA tal que $a_8 = 47$ e $a_{11} = 65$. 5, 11 e 17

14. Determine a PA de seis termos cuja soma dos três primeiros termos é 12 e dos três últimos é −15. (7, 4, 1, −2, −5, −8)

15. Identifique quais dos números no quadro a seguir são termos de uma PA em que a razão é 7 e $a_{24} = 73$. 17, −60 e 220

17	−60	198
39	152	−75
220	287	4

16. Determine a área do trapézio representado ao lado cujas medidas, em centímetros, da base menor, da altura e da base maior, respectivamente, formam uma PA. 25 cm²



17. Qual é o 72º termo da PA (−20, −27, −34, −41, ...)? −517

18. Em cada item, determine a quantidade de termos da PA finita.

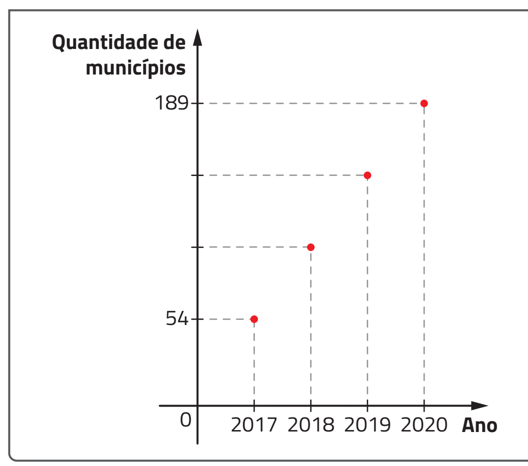
a) (3, 11, 19, ..., 171) 22 termos

b) (10, 29, 48, ..., 1 435) 76 termos

c) (286, 244, 202, ..., −302) 15 termos

19. Em 2017, uma empresa operadora de internet atendia 54 municípios pelo serviço de fibra óptica. Em um plano de expansão, esse serviço foi ampliado de maneira que resultou em um aumento anual de uma mesma quantidade de municípios até 2020. Analise o gráfico e resolva as questões.

» Municípios atendidos pelo serviço de fibra óptica por uma empresa operadora de internet (2017-2020)



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Fonte: Empresa operadora de internet.

a) Determine a quantidade de municípios atendidos pelo serviço de fibra óptica nos anos de 2018 e 2019. 2018: 99 municípios; 2019: 144 municípios

b) Considerando que, com a ampliação desse serviço, o aumento da quantidade de municípios atendidos ocorra da mesma maneira nos próximos anos, em qual ano a empresa ultrapassará 500 municípios atendidos pelo serviço de fibra óptica? 2027

ALPHASPIRIT/SHUTTERSTOCK.COM

20. a) $r = 4$. Resposta esperada: Como devem ser interpolados cinco termos entre -10 e 14, temos que a PA obtida deve ter sete termos, em que $a_1 = -10$ e $a_7 = 14$. Assim, basta fazer $a_7 = -10 + (7 - 1) \cdot r \Rightarrow 14 = -10 + 6r \Rightarrow r = 4$.

24. b) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$, tal que $f(n) = -562n + 8\,200$

20. Junte-se a um colega, leiam as informações a seguir e resolvam as questões.

Interpolar ou inserir **meios aritméticos** significa determinar números reais entre dois números dados (extremos), formando uma sequência numérica que seja uma PA. Por exemplo, ao interpolar cinco meios aritméticos entre -10 e 14 obtemos a PA $(-10, -6, -2, 2, 6, 10, 14)$.

a) Qual a razão da PA obtida na interpolação apresentada? Expliquem como determinar essa razão a partir dos extremos e da quantidade de termos dessa PA.

b) Interpolem oito meios aritméticos entre 77 e -31. $(77, 65, 53, 41, 29, 17, 5, -7, -19, -31)$

c) Quantos meios aritméticos se deve interpolar entre 19 e 264 para que a razão da PA obtida seja igual a 35? 6 meios aritméticos

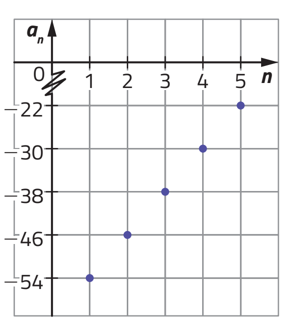
21. Quantos múltiplos de 12 existem entre os números:

a) 45 e 290? 21 múltiplos

b) 105 e 550? 37 múltiplos

c) 640 e 1 146? 42 múltiplos

22. Vanessa representou graficamente os primeiros termos de uma PA. Observe.



CBOOK PRODUÇÕES

Dica
No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

Com base nesse gráfico, resolva as questões e justifique.

a) Classifique essa PA em decrescente, constante ou crescente. crescente

b) O número 106 é um termo dessa PA? Sim, pois $a_{21} = 106$.

c) Em relação a essa PA, determine:

- o 50º termo. 338
- o primeiro termo positivo. 2

d) Defina uma função afim f que possa ser associada a essa PA, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = 8n - 62$

23. Considere a função afim $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = -3n + 1$.

a) Escreva os primeiros termos da PA que pode ser associada a essa função afim, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$ e assim sucessivamente. Qual é o 1º termo e a razão dessa PA? $(-2, -5, -8, \ldots)$. $a_1 = -2$ e $r = -3$.

b) Construa o gráfico de f no plano cartesiano. Resposta nas **Orientações para o professor**.

24. Uma motocicleta nova, de certo modelo, custa R$ 8.200,00. Estima-se que o preço em reais dessa motocicleta, nos primeiros anos de uso, se desvalorize de acordo com os termos da PA $(7\,638, 7\,076, \ldots, 3\,704)$.

a) De acordo com essa PA, o preço dessa motocicleta, em reais, pode ser estimado até quantos anos de uso? 8 anos de uso

b) Defina uma função afim f que possa ser associada a essa PA, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente.

c) Em um plano cartesiano, construa o gráfico de f que você definiu no item anterior. Resposta nas **Orientações para o professor**.

25. Escreva uma PA infinita indicando os primeiros termos dela. Depois, troque a PA que você escreveu com a de um colega para que ele defina uma função afim que possa ser associada a ela e construa seu gráfico, enquanto você faz o mesmo com a PA que recebeu. Juntos, confiram a resolução. Resposta pessoal.

26. De acordo com uma pesquisa realizada por certa companhia de TV por assinatura, estimou-se uma redução constante de 1 620 domicílios com acesso a esse tipo de serviço nos próximos meses em 2019. Analise a tabela.

» Estimativa de domicílios com acesso à TV por assinatura de certa companhia, em 2019

Mês	Quantidade de domicílios
Maio	125 550
Junho	123 930
Julho	122 310

Fonte: Administração da companhia.

a) Escreva a fórmula do termo geral de uma PA que expresse a quantidade mensal de domicílios com acesso à TV por assinatura nessa companhia, considerando maio de 2019 o primeiro mês, junho de 2019 o segundo mês e assim por diante.

b) Estime a quantidade de domicílios com acesso à TV por assinatura nessa companhia em dezembro de 2019. 114 210 domicílios

26. a) $a_n = 125\,550 + (n - 1) \cdot (-1\,620)$ ou $a_n = -1\,620n + 127\,170$

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Em um campeonato de empilhamento de copos, os competidores devem ter bastante disciplina e concentração para realizarem uma boa prova. Em uma competição, depois de definida a quantidade de copos em uma determinada rodada, os competidores devem realizar o empilhamento de modo que no final seja possível observar o seguinte: a 1ª camada (mais acima) deve ter 1 copo e, a partir dela, a quantidade de copos da próxima camada (imediatamente abaixo) deve ter um copo a mais que na camada anterior.

ILUSTRAÇÕES: DANIEL BOGNI

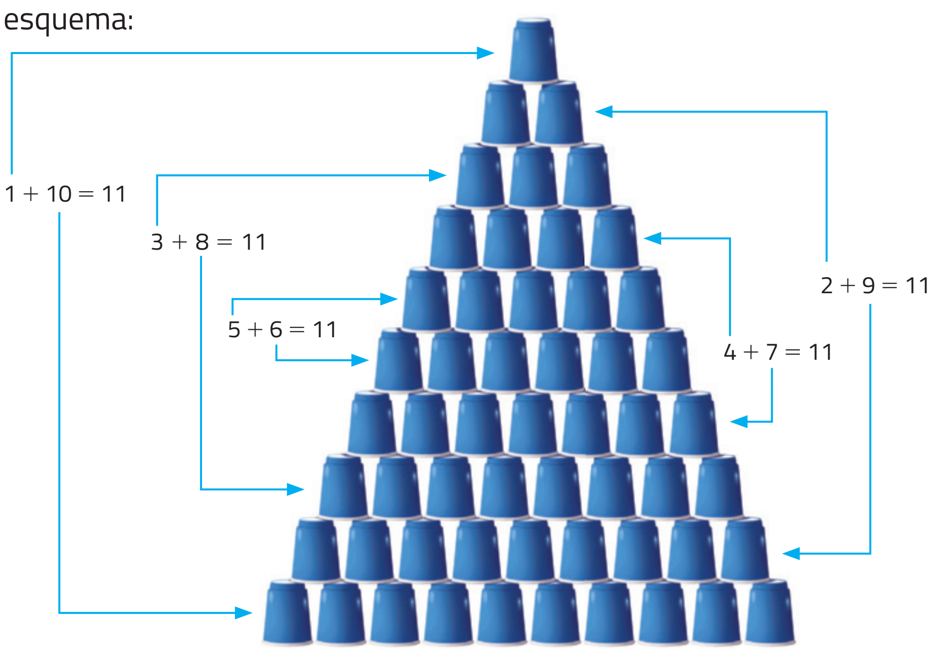
Nessa competição, quantos copos são necessários para formar um empilhamento com 10 camadas? Pense em como você resolveria essa questão e comente com os colegas.

Agora que você já tentou encontrar uma resposta, analise a solução proposta a seguir.

Podemos inicialmente representar a quantidade de copos de cada camada por meio da seguinte PA: (1, 2, 3, ..., 8, 9, 10). Em seguida, realizamos uma adição para obter a soma dos termos dessa PA. Acompanhe.

$$1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 + 10$$

Para resolvermos essa adição, podemos construir o seguinte esquema:



Note que, da maneira que as parcelas foram associadas, temos:

$$1 + 2 + 3 + ... + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot 11 = 55$$

Portanto, para formar um empilhamento com 10 camadas nessa competição, são necessários 55 copos.

Para pensar

Qual é a soma da primeira com a última parcela dessa adição? E da segunda com a penúltima parcela? E da terceira com a antepenúltima parcela? Que regularidade você pôde identificar nesses resultados?

Resposta esperada: As três somas obtidas são iguais a 11.

Para pensar

Você considera a solução proposta por você mais fácil ou mais difícil do que a solução apresentada? Justifique.

Resposta pessoal.

A estratégia utilizada no cálculo da soma dos termos da PA na situação apresentada na página anterior pode ser descrita por meio da propriedade a seguir.

Para pensar

Em relação à propriedade apresentada, mostre que a soma dos termos equidistantes a_2 e a_{n-1} é igual à soma dos extremos a_1 e a_n de uma PA finita.

Em uma PA finita de n termos, a_1 e a_n são chamados **termos extremos**; já os termos a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, e assim por diante, são **termos equidistantes** dos extremos.

A soma de dois termos equidistantes dos extremos em uma PA finita é igual à soma dos extremos.

Resposta esperada: Como $a_2 = a_1 + r$ e $a_n = a_{n-1} + r$, tem-se que: $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + a_{n-1} = a_1 + (a_{n-1} + r) = a_1 + a_n$

Com base nessa propriedade, podemos deduzir uma expressão para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA, indicada por S_n.

1ª Inicialmente, escrevemos a soma dos n primeiros termos da PA de duas maneiras:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \textbf{(I)}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \quad \textbf{(II)}$$

2ª Adicionamos as igualdades **I** e **II** membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + & S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \dots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + (a_n + a_1)}_{n \text{ vezes}} \end{array}$$

3ª Na adição realizada, é possível verificar que são obtidas n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$. Assim, segue que:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

A soma dos n primeiros termos de uma PA pode ser expressa por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Em relação à situação apresentada anteriormente, podemos determinar a quantidade de copos necessários para realizar um empilhamento com 20 camadas, por exemplo, calculando a soma dos termos da PA (1, 2, 3, ..., 18, 19, 20), da seguinte maneira:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + a_{20})}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} = 210$$

Portanto, são necessários 210 copos para formar um empilhamento com 20 camadas.

Atividades resolvidas

R9. Determine a soma dos 40 primeiros termos da PA (46, 55, 64, ...).

Resolução

Nessa PA, temos que $a_1 = 46$ e $r = 55 - 46 = 64 - 55 = 9$.

Assim, inicialmente, determinamos a_{40}:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{40} = 46 + (40 - 1) \cdot 9 = 46 + 351 \Rightarrow a_{40} = 397$$

Em seguida, calculamos a soma dos 40 primeiros termos dessa PA:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{40} = \frac{40 \cdot (46 + 397)}{2} = \frac{40 \cdot 443}{2} = 8\,860$$

Portanto, a soma dos 40 primeiros termos dessa PA é igual a 8 860.

R10. A soma dos 30 primeiros termos de uma PA é −2 145. Determine o 24º termo dessa PA, sabendo que $a_1 = 1$.

Resolução

Das informações apresentadas no enunciado, temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{30} = 1 + (30 - 1) \cdot r \Rightarrow a_{30} = 1 + 29r$$

Assim, segue que:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow -2\,145 = \frac{30 \cdot (1 + \overbrace{a_{30}}^{1+29r})}{2} \Rightarrow -2\,145 = \frac{30 \cdot (2 + 29r)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\,145 = 30 + 435r \Rightarrow r = -5$$

Por fim, determinamos o 24º termo dessa PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{24} = 1 + (24 - 1) \cdot (-5) \Rightarrow a_{24} = -114$$

Portanto, o 24º termo dessa PA é −114.

R11. (Enem/MEC) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

a) 497,25. **b)** 500,85. **c)** 502,87. **d)** 558,75. **e)** 563,25.

Resolução

Como as projeções para produção de arroz no período de 2012 a 2021, naquela região, indicam um crescimento constante, podemos considerar tais projeções, em toneladas, como termos de uma PA finita.

Nessa PA, temos que:

- o primeiro termo corresponde à projeção de produção de arroz em 2012: $a_1 = 50,25$;
- a razão é dada por: $r = 51,50 - 50,25 = 52,75 - 51,50 = 54,00 - 52,75 = 1,25$;
- o último termo é a_{10}, que corresponde à projeção de produção de arroz em 2021.

Assim, calculamos inicialmente a projeção de produção de arroz em 2021:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{10} = 50,25 + (10 - 1) \cdot 1,25 \Rightarrow a_{10} = 61,50$$

Calculando a soma dos termos da PA (50,25; 51,50; 52,75; 54,00; ...; 61,50), obtemos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{10 \cdot (50,25 + 61,50)}{2} = \frac{10 \cdot 111,75}{2} = 558,75$$

Portanto, a alternativa **d** é a correta, pois no período de 2012 a 2021 deverão ser produzidas 558,75 toneladas de arroz.

27. Na página **23**, foi apresentada uma situação na qual, em uma competição, os participantes deveriam empilhar copos em camadas, de maneira que a 1ª camada contivesse 1 copo e, a partir dela, a quantidade de copos da camada seguinte (imediatamente abaixo) contivesse um copo a mais do que a anterior. De acordo com essas informações, resolva os itens a seguir.

DANIEL BOGNI

a) Quantos copos são necessários para formar um empilhamento com 15 camadas? E com 24 camadas? 120 copos. 300 copos.

b) Com 78 copos, quantas camadas no máximo podem ser empilhadas? E com 195 copos? 12 camadas. 19 camadas.

28. Em cada item, calcule a soma dos termos da PA finita.

a) (2, 13, 24, ..., 112) 627

b) (127, 121, 115, ..., −47) 1 200

c) (60, 70, 80, ..., 2 020) 204 880

29. Considere X a soma dos números múltiplos de 5 maiores ou iguais a 10 e menores ou iguais a 150, e Y a soma dos números múltiplos de 3 maiores ou iguais a 150 e menores ou iguais a 200. Qual é o valor de $X + Y$? 5 278

30. Calcule a soma dos 15 primeiros termos de uma PA, tal que $a_1 = 4$ e $r = 68$. 7 200

31. Considere uma PA cuja soma dos 8 primeiros termos é 148 e a soma dos 16 primeiros termos é −280. Escreva os cinco primeiros termos dessa PA. 50, 41, 32, 23 e 14

32. Em certo cinema será construída uma nova sala, na qual as poltronas serão dispostas da seguinte maneira: 17 poltronas na primeira fileira, 19 poltronas na segunda, 21 poltronas na terceira e assim por diante. Quantas poltronas terá nessa sala, sabendo que ao todo serão organizadas 10 fileiras? 260 poltronas

33. Observe a PA indicada em cada ficha a seguir.

I. (8, 12, 16, ...) **II.** (10, 16, 22, ...) **III.** (13, 16, 19, ...)

Considerando essas progressões aritméticas, é possível afirmar que: alternativa **d**

a) a soma dos 20 primeiros termos da PA indicada em **III** é 2 150.

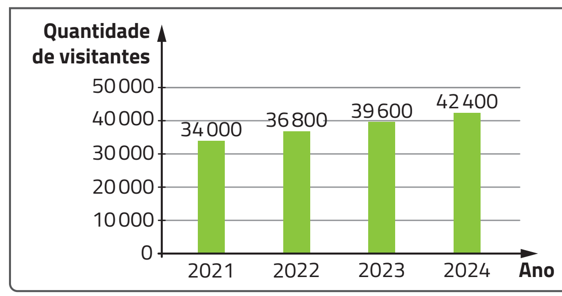
b) a soma dos 10 primeiros termos comuns da PA indicada em **I** e em **II** é 660.

c) o 25º termo da PA indicada em **I** é 108.

d) a soma dos 12 primeiros termos comuns da PA indicada em **II** e em **III** é 588.

34. Um estudo indica que a quantidade anual de visitantes em um museu deve ter crescimento constante nos anos de 2021 até 2024, conforme o gráfico a seguir.

» Estimativa de visitantes no museu (2021-2024)



Fonte: Administração do museu.

Supondo que o crescimento estimado na quantidade anual de visitantes para esse período possa ser estendido até 2030, qual será a quantidade total de visitantes nesse museu de 2021 até 2030? 466 000 visitantes

35. Em uma PA de 50 termos, $a_{15} = -40$ e $a_{45} = 80$. Qual é a soma dos termos dessa PA? 100

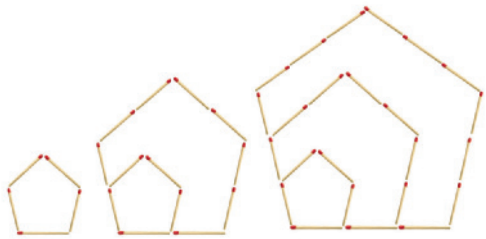
36. As medidas dos ângulos internos do hexágono representado a seguir, em graus, formam uma PA em que o maior termo é 140. Qual é a medida dos demais ângulos internos desse hexágono? 100°, 108°, 116°, 124° e 132°

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Dica

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, podemos decompor essa figura em triângulos.

37. A primeira figura da sequência a seguir representa o contorno de um pentágono regular cuja medida do lado corresponde a 1 palito. A partir da segunda figura, representa-se o contorno de um pentágono regular com 1 palito de lado a mais do que o da figura anterior, aproveitando-se de dois lados dessa figura. Analise.


ARTUR FUJITA

1ª figura 2ª figura 3ª figura ...

Quantos palitos formam a 10ª figura dessa sequência? 185 palitos

38. Determine a razão e o 40º termo da PA cuja soma é dada por $S_n = 4n^2 - 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. razão: 8; $a_{40} = 312$

39. Resolva as equações a seguir, em que as parcelas do 1º membro formam uma PA finita.

a) $\left(x + \frac{1}{3}\right) + (x + 1) + \left(x + \frac{5}{3}\right) + \dots + \left(x + \frac{35}{3}\right) = 378$ $x = 15$

b) $(4m - 27) + (4m - 10) + (4m + 7) + \dots + (4m + 551) = 8\,750$ $m = -3$

c) $(44 + p) + (38 + p) + (32 + p) + \dots + (-70 + p) = 540$ $p = 40$

40. Para financiar certo veículo seminovo, uma empresa está oferecendo as seguintes opções de pagamento.

- Opção **1**: R$ 20.000,00 de entrada mais 60 prestações mensais iguais de R$ 750,00.
- Opção **2**: 48 prestações mensais que formam uma PA decrescente, sendo a primeira parcela no valor de R$ 2.500,00 e a última, de R$ 244,00.

Em relação ao preço final a ser pago pelo veículo, qual dessas opções é a mais vantajosa? Pagam-se quantos reais a menos com essa opção em relação à outra? opção **1**. R$ 856,00.

41. Determine a razão de uma PA cuja soma de a_4 e a_9 é 74 e a soma dos 10 primeiros termos é 330. 4

42. A média aritmética dos 12 primeiros termos de uma PA é 92. Desconsiderando-se os termos a_2 e a_{11} dessa PA, qual é a média aritmética dos termos restantes? 92

43. Você já ouviu falar do papiro de Rhind? Nesse papiro egípcio, que data de cerca de 1650 a.C., foram registrados problemas matemáticos que abordam diferentes conceitos. O texto a seguir corresponde à tradução de um dos problemas encontrados nesse papiro.

> [...] "Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual a soma das duas menores." [...]
>
> EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 84.


VISIOARS/AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

» Papiro de Rhind. Datado de cerca de 1650 a.C.

a) Calcule a razão dessa PA. $\frac{55}{6}$ ou $-\frac{55}{6}$

b) Determine quantos pães cada homem recebeu.

c) O papiro de Rhind foi copiado de um documento ainda mais antigo pelo escriba Ahmes. Nele, são apresentados ao todo 85 problemas matemáticos que abordam diferentes ideias, tanto de geometria como de álgebra. Junte-se a dois colegas e pesquisem sobre outros problemas encontrados no papiro de Rhind. Depois, escolham um dos problemas encontrados e identifiquem quais conceitos matemáticos são abordados nesse problema. Ao final, apresentem a resolução dele aos colegas. Resposta pessoal.

d) Após a apresentação dos grupos, elabore um problema com estrutura parecida com aqueles apresentados no papiro. Em seguida, troque esse problema com um colega para que ele o resolva, enquanto você resolve o dele. Ao final, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

43. b) $\frac{5}{3}$, $\frac{65}{6}$, 20, $\frac{175}{6}$ e $\frac{115}{3}$

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Progressão geométrica (PG)

Os fractais (do latim *fractus*, que significa "quebrar" ou "fragmentar") são formas geométricas que têm como uma de suas características o fato de poderem ser decompostas em partes representativas do todo. Um exemplo de fractal é o Triângulo de Sierpinski, que foi descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Analise as quatro primeiras figuras que podem ser construídas para obter esse fractal. Você consegue perceber alguma regularidade?

EDITORIA DE ARTE

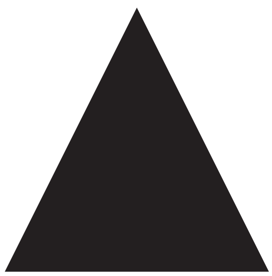


Figura **1**

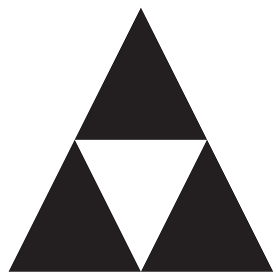


Figura **2**

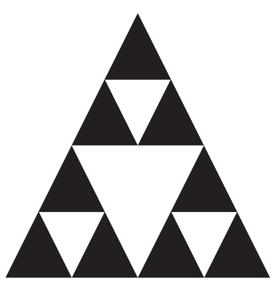
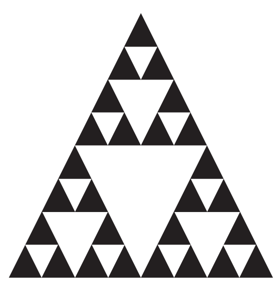


Figura **3**



...

Figura **4**

Dica

O Triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal formado com base em um triângulo equilátero (colorido em preto) em que, a cada etapa de sua construção, os triângulos são decompostos em quatro triângulos equiláteros congruentes, com a "retirada" do triângulo central.

MICHAEL NICHOLSON/ CORBIS/GETTY IMAGES

» Matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Podemos indicar a quantidade de triângulos em preto em cada uma das figuras por meio da seguinte sequência numérica:

$$(1, 3, 9, 27, ...)$$

Note que, a partir do 2º termo dessa sequência, o quociente entre um termo qualquer e o seu antecessor é um valor constante.

$$a_2 : a_1 = 3 : 1 = 3$$
$$a_3 : a_2 = 9 : 3 = 3$$
$$a_4 : a_3 = 27 : 9 = 3$$
$$\vdots$$

Para pensar

Como é possível obter um termo dessa sequência a partir do seu antecessor?

Resposta esperada: A partir do 2º termo dessa sequência, um termo qualquer pode ser obtido multiplicando-se por 3 o seu antecessor.

Sequências com características como a da situação apresentada são denominadas **progressões geométricas** (PG). Em uma PG, chamamos **razão** o quociente entre um termo qualquer, a partir do 2º termo, e seu antecessor. No exemplo do Triângulo de Sierpinski, a razão da PG é igual a 3.

ANGELATRIKS/SHUTTERSTOCK.COM

Denominamos **progressão geométrica (PG)** toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante. Essa constante, que pode ser indicada por q, é a **razão** da PG. Podemos classificar uma PG em:

- **constante**, quando $q = 1$;
- **decrescente**, quando $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$;
- **crescente**, quando $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$;
- **alternante**, quando $q < 0$.

ANGELATRIKS/SHUTTERSTOCK.COM

Analise alguns exemplos de PG.

- $(7, 7, 7, 7, ...)$
  Nessa PG, note que um termo é sempre igual ao seu sucessor. Nela, temos $q = 7 : 7 = 1$. Portanto, essa PG é constante.
- $\left(10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, ...\right)$
  Nessa PG, note que um termo é sempre maior que seu sucessor. Nela, temos $q = 2 : 10 = \frac{2}{5} : 2 = \frac{2}{25} : \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ e $a_1 = 10$. Portanto, essa PG é decrescente.
- $(6, 12, 24, 48, ...)$
  Nessa PG, note que um termo é sempre menor que seu sucessor. Nela, temos $q = 12 : 6 = 24 : 12 = 48 : 24 = 2$ e $a_1 = 6$. Portanto, essa PG é crescente.
- $(-9, 27, -81, 243, ...)$
  Nessa PG, note que o primeiro termo é menor que seu sucessor, o segundo termo é maior que seu sucessor, o terceiro termo é menor que seu sucessor, e assim sucessivamente. Nela, temos $q = 27 : (-9) = (-81) : 27 = 243 : (-81) = -3$.
  Portanto, essa PG é alternante.

Para pensar

Escreva os primeiros termos de uma PG crescente em que $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$ e de uma PG decrescente em que $q > 1$ e $a_1 < 0$.

Resposta pessoal.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ uma PG de razão q, então:

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 : a_1 = q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 : a_2 = q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 : a_3 = q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n : a_{n-1} = q$$
$$\vdots$$

Logo, $a_2 : a_1 = a_3 : a_2 = a_4 : a_3 = ... = a_n : a_{n-1} = ... = q$.

Resposta esperada: Não, pois a divisão de um número por zero não é definida no conjunto dos números reais.

Para pensar

Em uma PG algum termo pode ser zero? Justifique sua resposta.

O enésimo termo de uma PG, sendo a_1 o 1º termo e q a razão, pode ser definido por recorrência da seguinte maneira:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

Também podemos estabelecer uma relação entre três termos consecutivos de uma PG: a_{n-1}, a_n e a_{n+1}. Acompanhe.

Dica

Podemos representar uma PG de razão q e termos desconhecidos de diferentes maneiras, por exemplo:

- para $a_1 = x$, temos $(x, x \cdot q, x \cdot q^2, \ldots)$.
- para $a_1 = \frac{x}{q}$ temos $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q, \ldots\right)$.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três termos consecutivos de uma PG, o termo central a_n pode ser obtido por:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Fórmula do termo geral de uma PG

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ uma PG infinita de razão q. Como cada termo, a partir do 2º, pode ser obtido multiplicando-se o termo anterior por q, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 \cdot q} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 \cdot q^2} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 \cdot q^3} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\vdots$$

Para pensar

Com suas palavras, explique que relação pode ser observada entre os elementos em destaque em cada expressão apresentada?

Resposta esperada: O expoente da razão da PG (q) é uma unidade menor do que o número que indica o índice do termo correspondente da PG.

Note que podemos expressar qualquer termo de uma PG em função de a_1 e q.

A fórmula do termo geral de uma PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

ordem do termo

termo geral (enésimo termo)

razão

primeiro termo

Com base na definição e na fórmula do termo gera l de uma progressão geométrica, podemos associá-la a uma função do tipo exponencial, conforme segue.

Podemos associar uma PG com primeiro termo a_1 e razão q a uma função do tipo exponencial $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente.

Por exemplo, em relação à PG (5, 10, 20, 40, ...), em que $a_1 = 5$ e $q = \frac{10}{5} = 2$, temos:

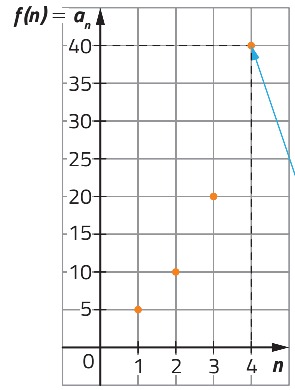
$$f(n) = 5 \cdot 2^{n-1}$$

Portanto, os termos dessa PG podem ser obtidos por meio da função do tipo exponencial $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 5 \cdot 2^{n-1}$.

- $f(1) = 5 \cdot 2^{1-1} = 5 \cdot 2^0 = 5 \cdot 1 = 5$
- $f(2) = 5 \cdot 2^{2-1} = 5 \cdot 2^1 = 5 \cdot 2 = 10$
- $f(3) = 5 \cdot 2^{3-1} = 5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$
- $f(4) = 5 \cdot 2^{4-1} = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$

$\vdots$

Observe ao lado o gráfico da função f.



Este ponto indica que $f(4) = 40$ e $a_4 = 40$.

Dica

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

Atividades resolvidas

R12. Determine a quantidade de termos da PG finita (0,001; 0,1; 10, ..., 1 000 000 000).

Resolução

Nessa PG, note que os termos podem ser expressos como potências de base 10: $(10^{-3}, 10^{-1}, 10^1, ..., 10^9)$. Assim, temos:

$$q = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^1 : 10^{-1} = 10^2$$

Como $a_1 = 10^{-3}$ e considerando $a_n = 10^9$, utilizamos a fórmula do termo geral de uma PG e resolvemos uma equação exponencial:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 10^9 = 10^{-3} \cdot \left(10^2\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10^9}{10^{-3}} = 10^{2n-2} \Rightarrow 10^{12} = 10^{2n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = 2n - 2 \Rightarrow 14 = 2n \Rightarrow n = 7$$

Portanto, essa PG possui 7 termos.

R13. (Unicamp-SP) Dois anos atrás certo carro valia R\$ 50.000,00 e atualmente vale R\$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a:

a) R\$ 25.600,00.
b) R\$ 24.400,00.
c) R\$ 23.000,00.
d) R\$ 18.000,00.

Resolução

Como o valor do carro decresce a uma taxa constante, temos que o valor desse carro a cada ano, em reais, corresponde a termos de uma PG.

Considerando $a_1 = 50\,000$, temos que $a_3 = 32\,000$, e segue que:

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \Rightarrow 32\,000 = 50\,000 \cdot q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{32\,000}{50\,000} \Rightarrow q^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5} \\ \text{ou} \\ q = -\sqrt{\dfrac{16}{25}} = -\dfrac{4}{5} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

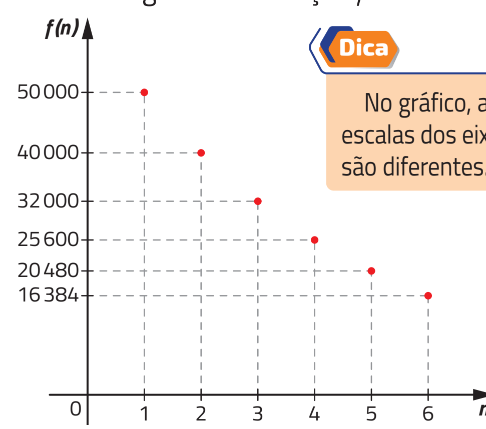
Assim, temos:

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = 32\,000 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow a_4 = 25\,600$$

Portanto, a alternativa **a** é a correta, pois daqui a um ano o valor do carro será igual a R\$ 25.600,00.

Na situação apresentada, podemos escrever a seguinte função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ para indicar o valor do carro a cada ano, em reais, sendo o primeiro ano aquele em que esse carro valia R\$ 50.000,00: $f(n) = 50\,000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

Observe o gráfico da função f.



Dica

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

48. d) PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer da sequência e seu antecessor é igual a uma constante denominada razão. Nesse caso, a razão $q = \frac{1}{2}$.

44. Para cada PG a seguir, calcule a razão e classifique-a em constante, decrescente, crescente ou alternante.

a) $\left(-30, -10, -\frac{10}{3}, \ldots\right)$ $q = \frac{1}{3}$; crescente

b) $\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \ldots\right)$ $q = 1$; constante

c) $(-1, -4, -16, \ldots)$ $q = 4$; decrescente

d) $(-3, 18, -108, \ldots)$ $q = -6$; alternante

e) $\left(2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, \ldots\right)$ $q = 2^{-2}$; decrescente

45. Escreva os quatro primeiros termos de uma PG em que:

a) $a_1 = \sqrt{7}$ e $q = 4\sqrt{7}$ $\sqrt{7}$, 28, $112\sqrt{7}$ e 3 136

b) $a_5 = \frac{1}{40}$ e $q = -\frac{1}{5}$ $\frac{125}{8}, -\frac{25}{8}, \frac{5}{8}$ e $-\frac{1}{8}$

c) $a_3 = 9^5$ e $q = 9^2$. 9, 9^3, 9^5 e 9^7

46. Determine o sétimo termo de uma PG em que $a_4 = -70$ e $q = -\frac{5}{4}$ $\frac{4\,375}{32}$

47. $q = \frac{1}{5}$; $a_1 = 20$

47. Considere uma PG decrescente tal que $a_2 = 4$ e $a_6 = \frac{4}{625}$. Determine a razão e o primeiro termo dessa PG. Justifique sua resposta.

48. No início do estudo de progressão geométrica, foram apresentadas as primeiras figuras que podem ser construídas para obter o fractal conhecido por Triângulo de Sierpinski. De acordo com essas informações, junte-se a um colega e resolvam os itens a seguir.

a) Determinem a quantidade de triângulos em preto que compõem a figura **7** no processo de construção desse fractal. 729 triângulos em preto

b) Qual figura do processo de construção desse fractal é composta por 19 683 triângulos em preto? figura **10**

Dica

Para resolver o item **b**, é possível expressar um número natural por meio de uma ou mais potências e utilizar uma calculadora para decompor tal número natural. Também é possível escrever e resolver uma equação exponencial.

c) Considere que, na figura **1**, o triângulo em preto tem 1 m de lado. Em seguida, escreva os quatro primeiros termos de uma sequência numérica que indique, ordenadamente, a medida do lado dos triângulos em preto que compõem as figuras para construir o Triângulo de Sierpinski. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

d) A sequência que você escreveu no item **c** é uma PA ou uma PG? Justifique.

- Determine a fórmula do termo geral dessa progressão. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) Qual é o perímetro de cada triângulo em preto que compõe a figura **6**? $\frac{3}{32}$ m

49. Leia o trecho a seguir e, com auxílio de uma calculadora, resolva a questão proposta.

> [...] A capital com maior taxa de crescimento geométrico no período 2018-2019 é estimada para Boa Vista, 6,35%, e, a menor, para Porto Alegre, com 0,32% de crescimento. [...]
>
> IBGE divulga as estimativas da população dos municípios para 2019. **Agência IBGE Notícias**. Rio de Janeiro, RJ, 28 ago. 2019. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/25278-ibge-divulga-as-estimativas-da-populacao-dos-municipios-para-2019. Acesso em: 10 ago. 2020.

Em 2019, segundo o IBGE, as estimativas das populações de Boa Vista (RR) e de Porto Alegre (RS) eram, respectivamente, 399 213 e 1 483 771 habitantes. Supondo que essas taxas se mantenham no decorrer dos anos seguintes, podemos afirmar que: alternativa **c**

a) a população de Boa Vista será de aproximadamente 510 687 habitantes em 2026.

b) a população de Porto Alegre ultrapassará 1,6 milhão de habitantes em 2021.

c) a população de Boa Vista corresponderá a cerca de 36% da população de Porto Alegre em 2024.

d) a população de Porto Alegre será de aproximadamente 1 507 664 habitantes em 2023.

53. b) PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer da sequência e seu antecessor é igual a uma constante denominada razão. Nesse caso, a razão $q = 2$.

53. c) $a_n = 40 \cdot 2^{n-1}$

53. d) $f(n) = 40 \cdot 2^{n-1}$ ou $f(n) = 5 \cdot 2^{n+2}$. Resposta nas **Orientações para o professor**.

50. Escreva os cinco primeiros termos da PG $(x - 4, x + 1, 5x + 11, ...)$ cujos termos são números reais e positivos. 1, 6, 36, 216 e 1 296

51. Determine a quantidade de termos da PG finita: $(4, 8, ..., 4^{10})$. 19 termos

52. Em uma PG, temos que $a_2 + a_3 = -\frac{4}{9}$ e $a_5 + a_6 = \frac{12}{343}$. Determine a razão dessa PG. $-\frac{3}{7}$

53. Um microbiologista, ao analisar certa população de bactérias, verificou que a quantidade de indivíduos duplica a cada 3 h, conforme informações do quadro a seguir.

Verificação	Tempo (hora)	Quantidade de bactérias
1	0	40
2	3	80
3	6	160

Considerando que seja mantida a taxa de crescimento da população de bactérias, resolva as questões a seguir.

a) Escreva uma sequência numérica cujos termos correspondam à quantidade de bactérias dessa população ao final de cada período de 3 horas. (40, 80, 160, 320, 640, ...)

b) A sequência que você escreveu no item **a** é uma PA ou uma PG? Justifique.

c) Determine a fórmula do termo geral da sequência que você escreveu no item **a**.

d) Defina uma função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que possa ser associada à sequência que você escreveu no item **a**, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. Depois, em um plano cartesiano, construa o gráfico de f.

e) Após 2 dias do início dessa análise, qual será a quantidade de bactérias dessa população? 2 621 440 bactérias

54. Paulo reservou R$ 1.800,00, correspondentes ao seu 13º salário, para realizar uma aplicação financeira a uma taxa de juro composto mensal de 0,5%. Qual será o montante dessa aplicação ao final de três anos? Se necessário, utilize a calculadora. aproximadamente R$ 2.154,02

Dica

No sistema de juro composto, os juros em cada período são calculados sobre o montante do período anterior.

57. b) Uma resposta possível: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 6\}$, definida por $f(n) = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Temos que $f(4) = 108$ indica que a estimativa de altura dessas árvores, 4 anos após o plantio, seja de 108 cm.

55. Considere a função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = -2 \cdot 3^{n-1}$. 55. a) $(-2, -6, -18, ...)$; $a_1 = -2$ e $q = 3$

a) Escreva os primeiros termos da PG que pode ser associada a essa função, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. Qual é o 1º termo e a razão dessa PG?

b) Construa o gráfico de f no plano cartesiano.

Resposta nas **Orientações para o professor**.

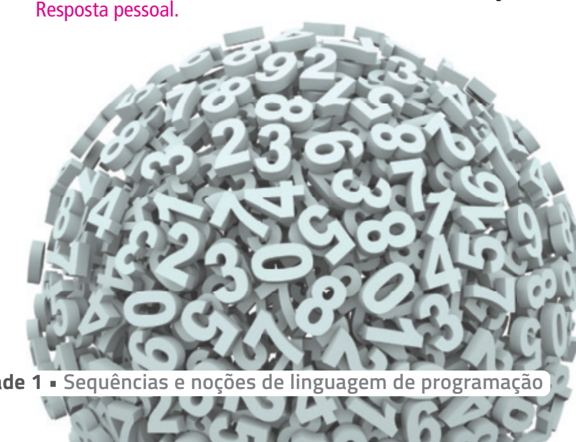
56. Defina uma função f com a qual é possível obter os termos da PG $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, ...\right)$ de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. 57. b) Uma resposta possível: $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(n) = \frac{1}{8} \cdot 4^{n-1}$ ou $f(n) = 2^{2n-5}$.

57. Em uma área de reflorestamento, estão sendo plantadas mudas de certa espécie de árvore. Estima-se que, ao final de cada ano após o plantio, a altura dessas árvores, em centímetros, seja igual a termos de uma PG de primeiro termo 32, segundo termo 48 e último termo 243, quando essas árvores param de crescer dessa maneira.

a) Quantos anos após o plantio estima-se que essas árvores param de crescer da maneira descrita? 6 anos

b) Defina uma função f que pode ser associada a essa PG, de maneira que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. Depois, calcule $f(4)$ e explique o que o resultado obtido representa no contexto da situação apresentada.

58. Junte-se a um colega e escrevam uma PG infinita indicando seus primeiros termos. Depois, troquem a PG que vocês escreveram com a de uma dupla de colegas, para que eles definam uma função do tipo exponencial que pode ser associada a ela, e construam seu gráfico, enquanto vocês fazem o mesmo com a PG que receberam. Juntos, confiram a resolução. Resposta pessoal.



IQONCEPT/SHUTTERSTOCK.COM

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Analise a seguinte igualdade: $\boxed{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1}$

Matemática na História

A igualdade apresentada, indicada em notação atual, foi encontrada pelo matemático e historiador austríaco Otto E. Neugebauer (1899-1990) em uma tábula babilônica datada de cerca de 300 a.C.

Fonte dos dados: EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 62.

MUSEU DO LOUVRE

» Modelo de tábula babilônica de cerca de 300 a.C., estudada por Neugebauer em 1922. Coleção do Museu do Louvre, Paris (França).

Note que as parcelas da adição, no primeiro membro, correspondem aos 10 primeiros termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 2$.

Esse fato é um indício de que a civilização babilônica conhecia estratégias de cálculo da soma dos primeiros termos de uma PG.

a_1	a_2	a_3	...	a_9	a_{10}
1	2	2^2	...	2^8	2^9
$\cdot 2$	$\cdot 2$			$\cdot 2$	

A seguir, vamos deduzir uma expressão com a qual é possível determinar a soma dos *n* primeiros termos de uma PG. Para isso, consideramos a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...)$ de razão q.

1ª Indicamos a soma dos *n* primeiros termos dessa PG por S_n. Assim, temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

2ª Multiplicamos pela razão *q* ambos os membros dessa igualdade.

$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + a_4 \cdot q + ... + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q$

Para pensar

Na igualdade obtida na 2ª etapa, o que aconteceu com o termo a_1 que estava sendo multiplicado pela razão *q*?

Resposta esperada: Ao multiplicar um termo da PG pela razão *q*, obtém-se o termo seguinte. Assim, na 2ª etapa, ao multiplicar a_1 por *q* obteve-se a_2, ou seja, $a_1 \cdot q = a_2$.

3ª Subtraindo, membro a membro, a igualdade obtida na 2ª etapa daquela obtida na 1ª etapa, temos:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} & S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & ... & + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n & & \\ - & S_n \cdot q & = & & & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & ... & + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n & + & a_n \cdot q \\ \hline \end{array}$$

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

4ª Como a fórmula do termo geral de uma PG é dada por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, segue que:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot \underbrace{q^{n-1} \cdot q}_{q^n} \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ com } q \neq 1$$

ALY NAZERALI/SHUTTERSTOCK.COM

A soma dos n primeiros termos de uma PG pode ser expressa por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ com } q \neq 1$$

Para pensar

Mostre que é válida a igualdade $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$.

Resposta esperada: Como as parcelas no 1º membro dessa igualdade correspondem aos 10 primeiros termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 2$, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1$$

Portanto, como $S_{10} = 2^9 + 2^9 - 1$, temos que a igualdade apresentada é válida.

Atividades resolvidas

R14. Determine a soma dos oito primeiros termos da PG (2, −8, 32, ...).

Resolução

Nessa PG, temos $a_1 = 2$ e $q = (-8) : 2 = 32 : (-8) = -4$. Assim:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_8 = \frac{2 \cdot \left[1 - (-4)^8\right]}{1 - (-4)} \Rightarrow S_8 = \frac{2 \cdot (1 - 65\,536)}{5} \Rightarrow S_8 = -26\,214$$

Portanto, a soma dos oito primeiros termos dessa PG é igual a −26 214.

R15. Calcule a soma dos termos da PG finita $\left(800, 400, 200, ..., \frac{25}{2}\right)$

Resolução

Nessa PG, temos $a_1 = 800$ e $q = \frac{400}{800} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$.

Com base nessas informações e considerando $a_n = \frac{25}{2}$, podemos resolver essa atividade de duas maneiras. Acompanhe.

1ª maneira:

Utilizamos a fórmula do termo geral de uma PG e resolvemos uma equação exponencial para determinar a quantidade de termos dessa PG finita.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{25}{2} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{\frac{25}{2}}{800} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow 6 = n - 1 \Rightarrow n = 7$$

Em seguida, calculamos a soma dos 7 termos dessa PG.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_7 = \frac{800 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_7 = \frac{800 \cdot \left(1 - \frac{1}{128}\right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{800 \cdot \frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_7 = \frac{\frac{3\,175}{4}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_7 = \frac{3\,175}{2}$$

2ª maneira:

Utilizando a expressão $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, com $q \neq 1$, obtemos:

$$S_n = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} - 800}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{25}{4} - 800}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3\,175}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{3\,175}{2}$$

Dica

A expressão ao lado é obtida a partir do resultado da 3ª etapa da dedução apresentada na página anterior.

Portanto, a soma dos termos dessa PG finita é $\frac{3\,175}{2}$.

Atividades

59. Com auxílio de uma calculadora, determine a soma dos:

a) 9 primeiros termos da PG $(-1, -5, -25, ...)$; $-488\,281$

b) 6 primeiros termos da PG $\left(\frac{4}{21}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}, ...\right)$; $\frac{208}{3}$

c) 10 primeiros termos da PG $(2, 6, 18, ...)$; $59\,048$

d) 7 primeiros termos da PG $(3, -27, 243, ...)$. $1\,434\,891$

60. Certa empresa de *delivery* de refeições por aplicativo começou a atuar em um município em janeiro de 2020, mês em que realizou 75 000 entregas. A expectativa, naquele ano, era de que a quantidade de entregas aumentasse mensalmente em 12% em relação ao mês anterior. De acordo com essa expectativa, quantas entregas:

a) devem ser realizadas em fevereiro de 2020? 84 000 entregas

b) devem ser realizadas, no total, no primeiro semestre de 2020? aproximadamente 608 639 entregas

61. Em relação à PG $(3, -3, 3, -3, ...)$, podemos afirmar que: alternativa **c**

a) a soma dos 25 primeiros termos é igual a -3;

b) o 38º termo dessa PG é igual a 3;

c) a soma dos 50 primeiros é igual a 0;

d) essa é uma PG constante.

62. O professor de Matemática Júlio César de Mello e Souza (1895-1974) ficou mais conhecido por Malba Tahan, pseudônimo com o qual assinou parte de seus livros. Em **O homem que calculava**, um de seus livros mais famosos, Malba Tahan apresenta um conto sobre a origem do jogo de xadrez. Nesse conto, o jovem Sessa oferece de presente ao rei Iadava um jogo composto por um tabuleiro quadrado e dividido igualmente em 64 casas. Como forma de agradecimento, o rei pede a Sessa que escolha um pagamento. Então, Sessa pede grãos de trigo da seguinte maneira: um grão de trigo pela 1ª casa do tabuleiro, dois pela 2ª casa, quatro pela 3ª casa, e assim sucessivamente, dobrando a quantidade de grãos de uma casa para a próxima, até a 64ª casa do tabuleiro.

ACERVO UH/FOLHAPRESS

» Júlio César de Mello e Souza (1895-1974), mais conhecido por Malba Tahan.

De acordo com esse conto, a quantidade total de grãos de trigo que Sessa deveria receber pode ser expressa por: alternativa **d**

a) 2^{64} **b)** $2^{63} + 1$ **c)** 2^{63} **d)** $2^{64} - 1$

Conexões

Consulte este livro, que apresenta a história de um jovem que utiliza a Matemática para resolver diferentes problemas:

- TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2009.

63. Determine a razão de uma PG cujo primeiro termo é 7, o último termo é $-54\,432$ e a soma de seus termos é $-46\,655$. -6

64. Em uma PG de oito termos, $a_3 = 800$ e $a_8 = \frac{25}{32}$. Qual é a soma dos termos dessa PG? 64. $\frac{546\,125}{32}$

65. Uma bola solta em queda livre, após cada vez que se choca com o solo, atinge apenas 65% da altura atingida anteriormente. Considerando a altura inicial de 20 m, responda às questões a seguir. 65. a) aproximadamente 3,57 m

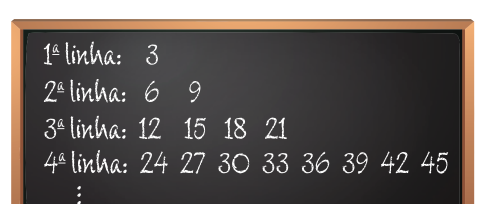
a) Quantos metros de altura, no máximo, a bola atinge após o 4º choque com o solo?

b) Determine quantos metros a bola percorre do momento em que é solta em queda livre até chocar-se com o solo pela:

- 2ª vez; 46 m
- 5ª vez. 81,02525 m

66. Junte-se a um colega para resolver esta atividade.

Na aula de Matemática, a professora escreveu na lousa sequências cujos elementos estão dispostos em linhas de acordo com uma propriedade. Observem.



EDITORIA DE ARTE

a) Expliquem a propriedade que a professora utilizou para escrever essas sequências.

b) De acordo com essa propriedade, determinem a soma dos termos da sequência indicada na 6ª linha. 4 560

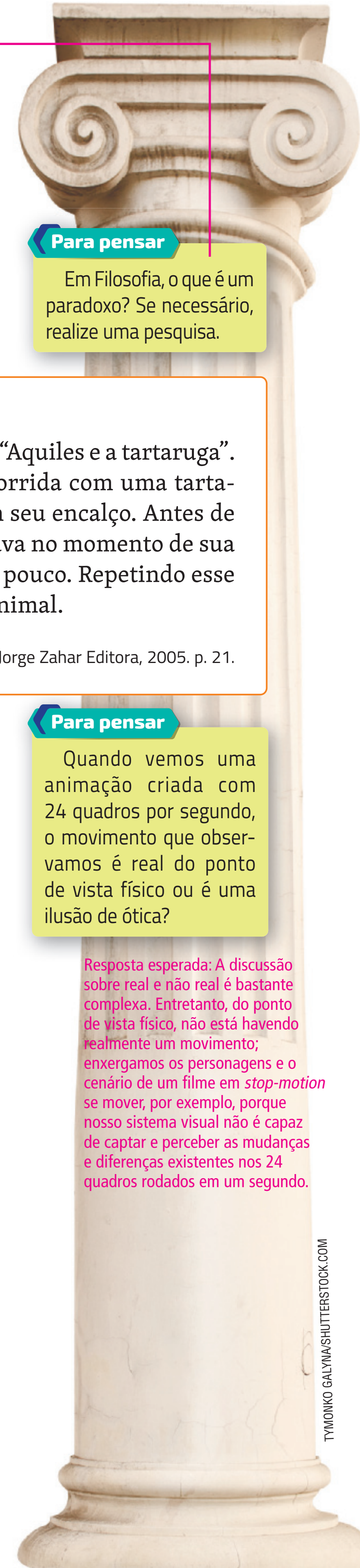
66. a) Resposta esperada: De acordo com a ordem das linhas, o primeiro número das sequências corresponde a um termo de uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = 2$. Já em cada linha, a sequência corresponde a uma PA de razão $r = 3$. Na 1ª linha tem apenas um número e, a partir da 2ª linha, a quantidade de números é o dobro da que tem na linha anterior.

Resposta esperada: Em Filosofia, podemos dizer que um paradoxo corresponde a um tipo de raciocínio/declaração que parece estar bem fundamentado e ser coerente, mas apresenta contradições lógicas e, por isso, não nos faz aceitar sua conclusão.

Soma dos termos de uma PG infinita

Na filosofia grega, Zenão de Eleia (c. 490-430 a.C.), discípulo de Parmênides e da escola Eleata, formulou 4 exemplos paradoxais que buscavam explicar que, do ponto de vista teórico, o movimento era impossível e, portanto, uma ilusão dos sentidos. Entre os exemplos formulados por Zenão para justificar sua tese, um dos mais conhecidos é o paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

Leia o trecho a seguir.



TYMONKO GALYNA/SHUTTERSTOCK.COM

Para pensar

Em Filosofia, o que é um paradoxo? Se necessário, realize uma pesquisa.

Matemática na História

[...]

O mais famoso paradoxo de Zenão é popularmente conhecido como "Aquiles e a tartaruga". Nesse pequeno experimento mental, o herói grego disputava uma corrida com uma tartaruga, que saía primeiro. Depois de um certo tempo, Aquiles partia em seu encalço. Antes de ultrapassar a tartaruga, ele tinha que alcançar o ponto em que ela estava no momento de sua partida. Enquanto fazia isso, a tartaruga, é claro, se afastava mais um pouco. Repetindo esse processo ao infinito, o pobre herói jamais conseguiria ultrapassar o animal.

[...]

CHERMAN, A. **Sobre os ombros de gigantes**: uma história da física. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 2005. p. 21.

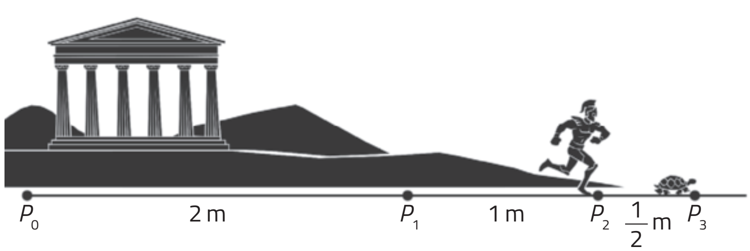
Nesse paradoxo, a ideia de que Aquiles nunca alcançará a tartaruga parece fazer sentido de acordo com a argumentação de Zenão, porém costuma contrariar nosso pensamento, pois sabemos, por observação e experiência prática, que Aquiles alcançará a tartaruga.

Para ilustrá-lo, considere que em um mesmo intervalo de tempo a tartaruga percorra a metade da distância percorrida por Aquiles. Além disso, considere que Aquiles inicia sua corrida na posição P_0 quando a tartaruga está 2 m à frente dele, na posição P_1. De acordo com o paradoxo, quando Aquiles chegar à P_1, a tartaruga estará 1 m à frente dele, na posição P_2; quando Aquiles chegar à P_2, a tartaruga estará $\frac{1}{2}$ m à frente dele, em P_3; e assim sucessivamente.

Para pensar

Quando vemos uma animação criada com 24 quadros por segundo, o movimento que observamos é real do ponto de vista físico ou é uma ilusão de ótica?

Resposta esperada: A discussão sobre real e não real é bastante complexa. Entretanto, do ponto de vista físico, não está havendo realmente um movimento; enxergamos os personagens e o cenário de um filme em *stop-motion* se mover, por exemplo, porque nosso sistema visual não é capaz de captar e perceber as mudanças e diferenças existentes nos 24 quadros rodados em um segundo.



ARTUR FUJITA

Podemos notar que a sequência das distâncias, em metros, entre a tartaruga e Aquiles posicionados em P_k e P_{k-1}, com $k \in \mathbb{N}^*$, corresponde à PG infinita apresentada a seguir, em que $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{2}$.

$$\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$$

Para pensar

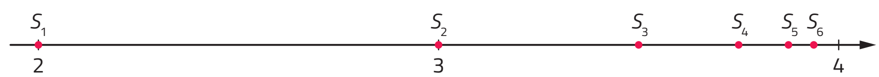
A PG ao lado pode ser associada à função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 2^{-n+2}$. Em uma malha quadriculada ou utilizando um *software* de geometria dinâmica, esboce o gráfico dessa função e analise o que ocorre com o valor de $f(n)$ à medida que aumentamos o valor de n.

Resposta esperada: À medida que aumentamos o valor de n, o valor de $f(n)$ aproxima-se de zero.

Em relação à PG $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ vamos calcular a soma dos:

- dois primeiros termos: $S_2 = 2 + 1 = 3$;
- três primeiros termos: $S_3 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$;
- quatro primeiros termos: $S_4 = \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$;
- cinco primeiros termos: $S_5 = \frac{15}{4} + \frac{1}{8} = \frac{31}{8} = 3{,}875$;
- seis primeiros termos: $S_6 = \frac{31}{8} + \frac{1}{16} = \frac{63}{16} = 3{,}9375$.

Observe como podemos indicar esses resultados na reta real.



EDITORIA DE ARTE

Para pensar

Calcule a soma dos sete primeiros termos dessa PG. Considerando o resultado que você obteve e aqueles apresentados anteriormente, o que você pode perceber?

3,96875. Resposta esperada: À medida que aumentamos o valor de n, ou seja, da quantidade de termos considerados, a soma obtida aproxima-se de 4.

Note que, à medida que aumentamos o valor de n, ou seja, consideramos uma quantidade maior de termos da PG relacionada ao paradoxo de Aquiles e a tartaruga, a soma desses termos se aproxima mais do número 4. Nesse caso, podemos dizer que a soma dos termos dessa PG infinita converge para o número 4.

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 4$$

De modo geral, nas progressões geométricas infinitas de razão q, em que $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$, quanto maior o valor de n considerado, mais próximo de zero é q^n. Nesse caso, dizemos que, quando n tende ao infinito, ou seja, quando o valor de n aumenta indefinidamente, temos que o limite de q^n é igual a zero.

Assim, considerando a expressão $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$, com $q \neq 1$, podemos calcular o limite de S_n, quando n tende ao infinito, da seguinte maneira:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 \cdot (1 - 0)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dada uma PG infinita cujo primeiro termo é a_1 e a razão é q, com $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$, podemos determinar o limite da soma desses infinitos termos da seguinte maneira:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Resposta esperada: Não, pois após uma quantidade indefinida de deslocamentos sucessivos realizados pelos dois personagens, Aquiles alcança a tartaruga após ambos percorrerem 4 m.

Em relação à PG infinita $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ apresentada anteriormente, temos que o limite da soma de seus termos é dado por:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Para pensar

Com base no que foi estudado, Zenão estava certo ao supor que Aquiles nunca alcançaria a tartaruga? Justifique sua resposta.

Portanto, nas condições consideradas, é possível supor que Aquiles deve alcançar a tartaruga após ambos terem percorrido 4 m, o que contraria o paradoxo apresentado.

Atividade resolvida

R16. Obtenha a fração geratriz da dízima periódica $2,\overline{16}$

Resolução

$$2,\overline{16} = 2,161616... = 2 + 0,16 + 0,0016 + 0,000016 + ... = 2 + \frac{16}{100} + \frac{16}{10000} + \frac{16}{1000000} + ...$$

Na adição, a partir da 2ª parcela, podemos notar que as parcelas correspondem aos termos de uma PG infinita em que:

- $a_1 = \dfrac{16}{100}$
- $q = \dfrac{\frac{16}{10\,000}}{\frac{16}{100}} = \dfrac{1}{100}$

Calculando o limite da soma dos termos dessa PG, obtemos:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\frac{16}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{16}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{16}{99}$$

Assim, segue que:

$$2,\overline{16} = 2 + \overbrace{\frac{16}{100} + \frac{16}{10\,000} + \frac{16}{1\,000\,000} + ...}^{\frac{16}{99}} = 2 + \frac{16}{99} = \frac{214}{99}$$

Portanto, $2,\overline{16} = \dfrac{214}{99}$.

Para pensar

Com uma calculadora, verifique a igualdade $\dfrac{214}{99} = 2,\overline{16}$. Resposta pessoal.

Atividades

68. b) $\frac{8\,104}{999}$

Não escreva no livro

67. Calcule o limite da soma dos termos da PG infinita indicada em cada item.

$-\frac{16}{5}$ **a)** $\left(-4, 1, -\frac{1}{4}, ...\right)$

c) $\left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{21}, ...\right)$ $\frac{9}{28}$

$\frac{3\,125}{4}$ **b)** (625, 125, 25, ...)

$\frac{2\,500}{99}$ **d)** (25; 0,25; 0,0025; ...)

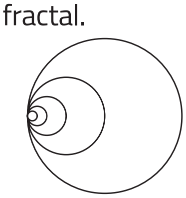
68. Obtenha a fração geratriz da dízima periódica indicada em cada item.

$\frac{16}{9}$ **a)** 1,7777... **b)** $8,\overline{112}$ **c)** $-0,9191...$ $-\frac{91}{99}$ **d)** $2,\overline{39}$ $\frac{79}{33}$

- Agora, escreva duas dízimas periódicas e troque-as com um colega, para que um determine a fração geratriz das dízimas periódicas do outro. Depois, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

69. Certo fractal é formado por infinitas circunferências justapostas, de maneira que tenham em comum um único ponto. Nesse fractal, a 1ª circunferência tem o maior raio, com o dobro da medida do raio da 2ª circunferência, que, por sua vez, tem o raio com o dobro da medida do raio da 3ª circunferência, e assim por diante.

Observe as primeiras circunferências que formam esse fractal.



CBOOK PRODUÇÕES

Considerando que a maior dessas circunferências tenha 10 cm de raio, podemos afirmar que a soma dos perímetros das infinitas circunferências que compõem esse fractal, em centímetros, é: alternativa **d**

a) 10π **b)** 20π **c)** 30π **d)** 40π **e)** 50π

Dica

Lembre-se! O perímetro de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$.

70. Resolva a equação $x + \dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{25} + ... = 30$, sabendo que as parcelas no 1º membro correspondem a termos de uma PG infinita. $x = 24$

Integrando

O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**, da competência específica **5** e das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Demografia

Você sabe o que é demografia? Leia o texto a seguir.


ARTHIMEDES/SHUTTERSTOCK.COM

» Imagem ilustrativa, representando parte da dinâmica populacional brasileira.

[...]

A Demografia é uma ciência que tem por finalidade o estudo de populações humanas, enfocando aspectos tais como sua evolução no tempo, seu tamanho, sua distribuição espacial, sua composição e características gerais.

Uma preocupação fundamental no estudo das populações humanas é com o seu tamanho em determinado momento e com os possíveis fenômenos que determinam ou afetam esse tamanho, tais como os nascimentos, os óbitos e fenômenos migratórios. É importante investigar de que modo cada um desses componentes pode ser afetado por mudanças nos demais e como esses fenômenos se relacionam entre si.

Além da preocupação com o tamanho e crescimento da população, é de fundamental importância em Demografia o estudo da composição da população por idade e sexo, principalmente pela sua repercussão sobre os fenômenos demográficos, sociais e econômicos. [...]

O tamanho e a composição são considerados aspectos estáticos de uma população. No entanto, a Demografia trata também dos aspectos dinâmicos das populações, ou seja, das mudanças e inter-relações entre as variáveis demográficas básicas – fecundidade, mortalidade e migração.

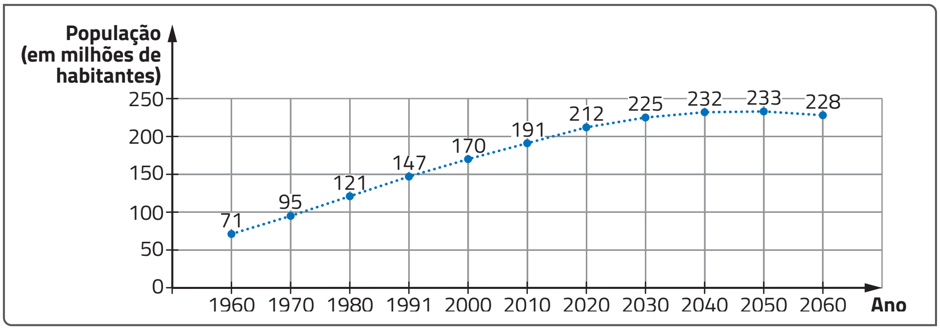
[...]

CERQUEIRA, C. A.; GIVISIEZ, G. H. N. Conceitos básicos em demografia e dinâmica demográfica brasileira. **ABEP**, [20--]. Disponível em: www.abep.org.br/~abeporgb/publicacoes/index.php/livros/article/viewFile/150/148. Acesso em: 2 set. 2020.

Estimar ou projetar a variação do tamanho de uma população humana ao longo do tempo sempre foi um desafio e motivo de grande interesse para cientistas, governantes e diferentes tipos de organizações. Para se ter precisão em estimativas desse tipo, é necessário considerar diferentes tipos de variáveis (taxas de natalidade e mortalidade, migração etc.). Atualmente, com o avanço da tecnologia, que facilita o acesso e o armazenamento de dados, e o desenvolvimento de modelos matemáticos, há diferentes métodos para realizar essas estimativas.

No gráfico a seguir, os dados da população brasileira de 1960 até 2010 correspondem a resultados de censos realizados. Já os dados da população a partir de 2020 correspondem a estimativas (ou projeções) calculadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

» População aproximada do Brasil (1960-2060)



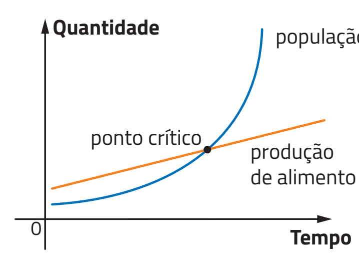
Fontes: IBGE. **Sinopse do Censo Demográfico 2010**: Brasil. Rio de Janeiro, RJ, [ca. 2010]. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=8. IBGE. Projeções da população. **Projeções da população por sexo e idades**. Rio de Janeiro, RJ, [entre 2018 e 2020]. Disponível em: www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?=&t=resultados. Acessos em: 2 set. 2020.

Pensando no assunto

Não escreva no livro

1. Explique, com suas palavras, um dos objetivos da Demografia. Resposta pessoal.
2. Há quanto tempo você mora no mesmo município? Nesse período, você percebeu mudanças na quantidade de habitantes? Justifique. Respostas pessoais.
3. Em relação ao gráfico apresentado, responda.
   a) Que tipo de gráfico foi utilizado para representar as informações? gráfico de segmentos
   b) Qual o período de tempo correspondente aos dados apresentados no gráfico? Nesse período, que parte dos dados correspondem a estimativas? De 1960 até 2060. A população brasileira de 2020 até 2060.
   c) A partir de qual década estima-se que a população brasileira vai começar a diminuir? década de 2050
4. Junte-se a um colega e leiam o texto a seguir.

Thomas Robert Malthus (1776-1834) é uma referência quando estudamos ciência da população. No ano de 1798, Malthus publicou, em sua obra **Ensaio sobre a população**, a teoria de que a população mundial cresceria em um ritmo mais acelerado do que a oferta de alimentos, o que resultaria em problemas como a fome e a miséria. Mais especificamente, Malthus propôs que a população cresceria em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos cresceria em progressão aritmética. Analise a representação das curvas do crescimento populacional e da produção de alimentos, segundo a teoria de Malthus.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Fonte dos dados: SOUZA, L. E. S. de; PREVIDELLI, M. F. S. C. Algumas considerações sobre a contribuição de Malthus ao Pensamento Econômico. *In*: XII CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA ECONÔMICA. 13ª Conferência Internacional de História Econômica. **Anais** [...]. Niterói: ABPHE, 2017. Disponível em: www.abphe.org.br/uploads/ABPHE%202017/8%20Algumas%20considera%C3%A7%C3%B5es%20sobre%20a%20contribui%C3%A7%C3%A3o%20de%20Malthus%20ao%20Pensamento%20Econ%C3%B4mico.pdf.
GENNARI, A. M. **Duas teorias da população no pensamento clássico**: Karl Marx e Thomas Malthus. Campinas: Unicamp: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, 2009. Disponível em: www.ifch.unicamp.br/formulario_cemarx/selecao/2009/trabalhos/duas-teorias-da-populacao-no-pensamento-classico-karl-marx.pdf. Acessos em: 2 set. 2020.

   a) Agora, investiguem como a teoria de Malthus se relaciona ou diverge de outras teorias demográficas, como a neomalthusiana, a reformista e a de transição demográfica, por exemplo. Registrem as informações obtidas, inclusive indicando as fontes de pesquisa. Resposta pessoal.
   b) Investiguem também os motivos pelos quais essa teoria de Malthus não se confirmou na prática, até esse momento, destacando questões sociais e tecnológicas envolvidas. Depois, divulguem suas produções por meio de alguma mídia digital, por exemplo, publicando um texto em uma rede social ou blogue, gravando e compartilhando um vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) etc.
   Resposta pessoal.

VALEX/SHUTTERSTOCK.COM

5. Acompanhe como é possível estimar a população de um município para períodos futuros até 2060, com base em diferentes métodos matemáticos e dados de dois censos demográficos.

5. b) método aritmético: 24 000 hab.; método geométrico: aproximadamente 35 832 hab

5. c) Resposta esperada: Não, pois nas estimativas realizadas a população não cresce igualmente em valores absolutos nem a uma mesma taxa de crescimento.

População do município
Censo 2000: 10 000 hab.
Censo 2010: 12 000 hab.

Método aritmético

1º) Calculamos a diferença entre as populações no período considerado:

$$12\,000 - 10\,000 = 2\,000$$

2º) Considera-se que, em períodos de 10 anos, essa população cresce igualmente em valores absolutos.

Ano	População	
2000	10 000	+2 000
2010	12 000	+2 000
2020	14 000	+2 000
2030	16 000	+2 000
2040	18 000	+2 000
2050	20 000	+2 000
2060	22 000	

Método geométrico

1º) Calculamos a taxa de crescimento da população no período:

$$\frac{12\,000}{10\,000} = 1{,}2$$

2º) Considera-se que, em períodos de 10 anos, essa população cresce a essa mesma taxa.

Ano	População	
2000	10 000	·1,2
2010	12 000	·1,2
2020	14 400	·1,2
2030	17 280	·1,2
2040	20 736	·1,2
2050	24 883	·1,2
2060	29 860	

5. a) método geométrico. método aritmético

a) Em qual desses métodos a população varia de acordo com uma PG? E de acordo com uma PA?

b) Estime a população desse município para o ano 2070 utilizando cada um desses métodos.

c) Observando os dados apresentados no gráfico sobre a população brasileira, é correto afirmar que as estimativas foram realizadas com base em um desses métodos? Justifique.

6. Nesta questão, exploraremos a seguinte situação-problema.

Qual é a estimativa da população para o ano de 2060 no munícipio em que você mora?

Junte-se a dois colegas e façam o que se pede em cada um dos itens.

a) Vocês acham que em 2060 a população do município em que vocês moram será maior ou menor do que a população atual? Justifiquem. Respostas pessoais.

b) Pesquisem, nos dois últimos censos realizados, a população do município em que vocês moram e registrem. Utilizando cada um dos métodos apresentados na atividade anterior e os dados pesquisados, estimem a população do município em períodos de tempos iguais e equivalentes ao período entre os dois censos pesquisados. Façam a estimativa até o ano de 2060.
Resposta pessoal.

c) Investiguem se institutos de pesquisa ou outras organizações já fizeram alguma estimativa da população do município no ano de 2060. Pesquisem como foi feito o tratamento das informações e, se possível, qual foi o método utilizado. Depois, produzam um texto relacionando as informações levantadas e os resultados obtidos no item anterior. Resposta pessoal.

VALEX/SHUTTERSTOCK.COM

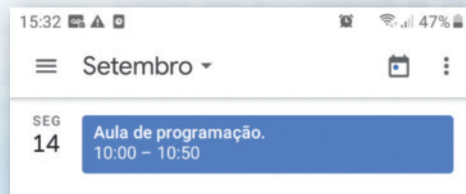
O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Noções de linguagem de programação

Você já reparou que, no dia a dia, programamos diferentes aparelhos eletrônicos para realizarem uma determinada tarefa? Observe os exemplos.


PPART/SHUTTERSTOCK.COM

» Programar, em um forno elétrico, a temperatura e o tempo de cozimento de certo alimento.



GOOGLE AGENDA

» Agendar um compromisso no *smartphone*, como despertar em horário e dia estabelecidos.


HURST PHOTO/SHUTTERSTOCK.COM

» Indicar a potência e o tempo de preparo do alimento no micro-ondas.


PRIMASTOCKPHOTO/SHUTTERSTOCK.COM

» Indicar o modo de lavagem e o nível de água na máquina de lavar roupas.

É importante notarmos que esses e outros aparelhos eletrônicos, como computador, *tablet* e *videogame*, apenas executam tarefas e processam dados conforme instruções que recebem. Programar ou codificar significa escrever um conjunto de instruções para um aparelho, de maneira que ele as compreenda e as execute.

Para pensar

Cite outros aparelhos que você conhece que necessitam de alguma programação para executar determinada função. Depois, descreva uma função que cada aparelho desses executa de acordo com a instrução do usuário.

Respostas pessoais.

VERTICALARRAY/SHUTTERSTOCK.COM

ALAMY/FOTOARENA

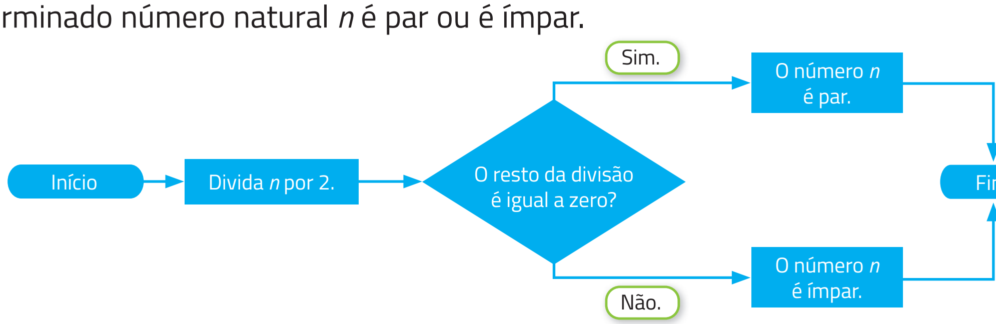
» Konrad Zuse (1910-1995), criador da primeira linguagem de programação de alto nível, denominada Plankalkul. Desenvolvida em 1942, é considerada uma revolução na dinâmica das linguagens de programação da época.

Para inserir instruções em um computador (ou outro aparelho eletrônico que possa ser programado), de forma organizada, é necessário utilizar uma linguagem específica. As chamadas **linguagens de programação** permitem a escrita de comandos que utilizam palavras, regras e pontuações. Esses comandos, ao serem estruturados de maneira lógica e compreensível à linguagem de programação escolhida, formam os **códigos** ou **algoritmos computacionais** necessários para determinar a realização de uma ação específica. Atualmente, existem muitas linguagens de programação e cada uma é mais, ou menos, indicada de acordo com o que se deseja realizar.

De maneira geral, um **algoritmo** corresponde a uma sequência de passos finitos e ordenados, necessários para realizar determinada tarefa, não apenas relacionada à programação de uma máquina. Por exemplo, uma receita de salada de frutas corresponde a um algoritmo para preparar essa salada.

DANIEL BOGNI

Para expressar os passos de um algoritmo, também podemos utilizar um **fluxograma**. Observe, por exemplo, um algoritmo representado por meio de um fluxograma para verificar se determinado número natural *n* é par ou é ímpar.



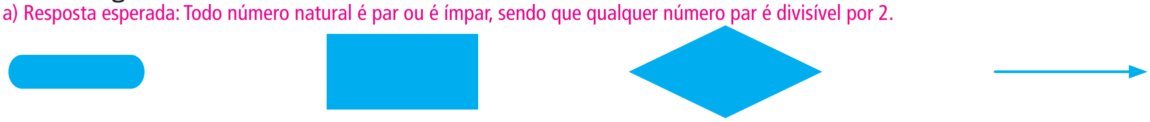
EDITORIA DE ARTE

Atividades

72. b) Resposta esperada: Não, além da análise de currículo, também são analisadas as referências pessoais e profissionais do candidato e realizada uma entrevista para indicação de um candidato apto ao cargo.

71. Em um fluxograma, as figuras utilizadas para apresentar a sequência de passos de um procedimento possuem significados de acordo com seu formato. Observe.

71. a) Resposta esperada: Todo número natural é par ou é ímpar, sendo que qualquer número par é divisível por 2.



EDITORIA DE ARTE

Indica o início ou o término dos passos.

Indica uma operação a ser realizada.

Indica uma decisão a ser tomada.

Indica o sentido da sequência dos passos.

Agora, de acordo com o fluxograma apresentado anteriormente, resolva as questões a seguir.

a) Que conceitos matemáticos fundamentam o algoritmo representado por esse fluxograma?

b) Há algum passo correspondente à tomada de decisão? Qual? Sim. O passo que questiona se a divisão, realizada no passo anterior, tem resto igual a zero.

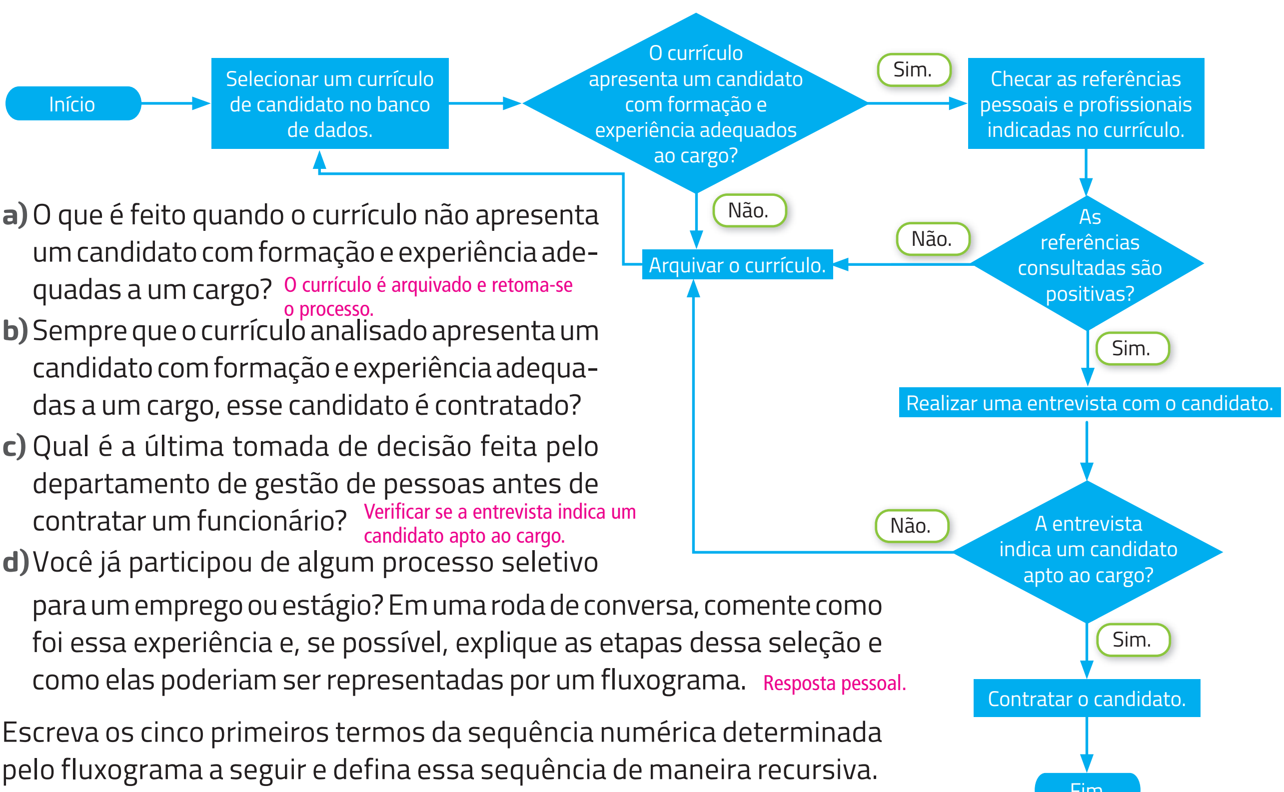
c) Descreva os procedimentos realizados para verificar se cada número natural indicado a seguir é par ou é ímpar, de acordo com esse fluxograma.

- 237 Primeiro realizamos a divisão $237 : 2 = 118$, com resto 1. Como o resto da divisão não é igual a zero, concluímos que 237 é ímpar.
- 108 Primeiro realizamos a divisão $108 : 2 = 54$, com resto zero. Como o resto da divisão é igual a zero, concluímos que 108 é par.

d) Pense em um outro algoritmo, que também possa ser utilizado para verificar se determinado número natural *n* é par ou é ímpar. Depois, represente esse algoritmo por um fluxograma.

Uma resposta possível nas **Orientações para o professor.**

72. O departamento de gestão de pessoas de uma empresa utiliza um fluxograma sempre que tem de contratar um novo funcionário para determinado cargo. Observe.



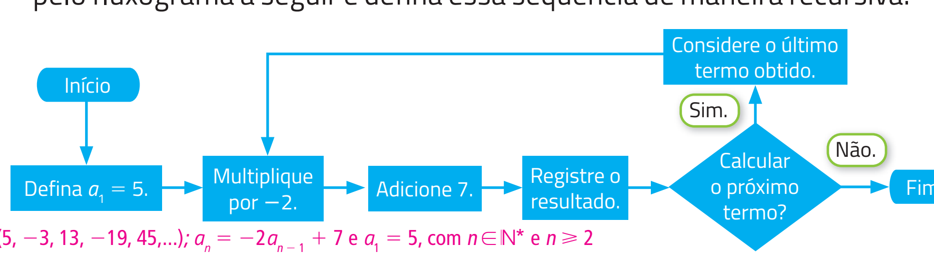
a) O que é feito quando o currículo não apresenta um candidato com formação e experiência adequadas a um cargo? O currículo é arquivado e retoma-se o processo.

b) Sempre que o currículo analisado apresenta um candidato com formação e experiência adequadas a um cargo, esse candidato é contratado?

c) Qual é a última tomada de decisão feita pelo departamento de gestão de pessoas antes de contratar um funcionário? Verificar se a entrevista indica um candidato apto ao cargo.

d) Você já participou de algum processo seletivo para um emprego ou estágio? Em uma roda de conversa, comente como foi essa experiência e, se possível, explique as etapas dessa seleção e como elas poderiam ser representadas por um fluxograma. Resposta pessoal.

73. Escreva os cinco primeiros termos da sequência numérica determinada pelo fluxograma a seguir e defina essa sequência de maneira recursiva.



EDITORIA DE ARTE

$(5, -3, 13, -19, 45, ...)$; $a_n = -2a_{n-1} + 7$ e $a_1 = 5$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$

74. e - a - d - f - c - b. Resposta esperada nas **Orientações para o professor**.

74. Nas fichas a seguir estão indicados, fora de ordem, os passos de um algoritmo para a construção de um hexágono regular usando régua e compasso. Ordene esses passos e, depois, siga-os para construir um hexágono regular com régua e compasso.

a. Com abertura de medida *AB*, fixar a ponta-seca do compasso em *A* e traçar uma circunferência.

b. Com a régua, traçar $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$. Por fim, colorir a região interna da figura obtida.

c. Com a mesma abertura, fixar a ponta-seca do compasso em *C*, traçar um arco que cruza a última circunferência traçada e marcar o ponto *D*. De maneira análoga, fixar a ponta-seca do compasso em *F* e marcar o ponto *E*.

d. Com a mesma abertura, fixar a ponta-seca do compasso em *B* e traçar outra circunferência. Marcar o ponto *O* em um dos cruzamentos das circunferências.

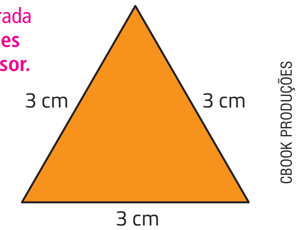
e. Utilizar a régua para traçar $\overline{AB}$, um dos lados do hexágono.

f. Com a mesma abertura, fixar a ponta-seca do compasso em *O* e traçar uma circunferência. No cruzamento dessa circunferência com a de centro *B* e com a de centro *A*, marcar os pontos *C* e *F*, respectivamente.

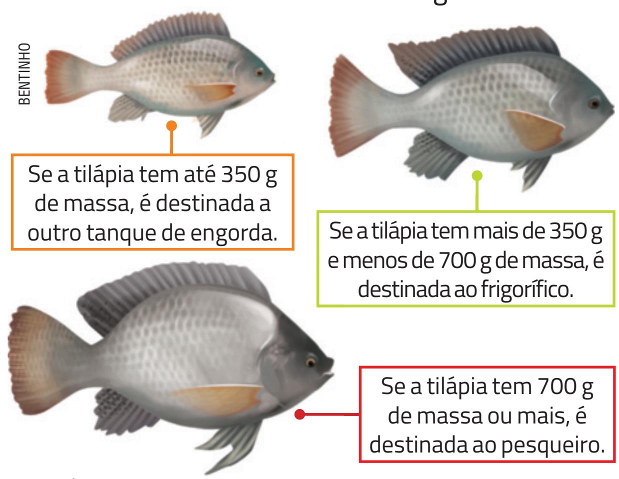
» Instrumentos usados na construção geométrica.

75. Escreva os passos de um algoritmo que possa ser utilizado para construir um triângulo equilátero com 3 cm de lado com régua e compasso.

Resposta esperada nas **Orientações para o professor.**



76. Um piscicultor cria tilápias que são vendidas para frigoríficos e pesqueiros. A cada 170 dias, as tilápias são pesadas e destinadas de acordo com os critérios indicados a seguir.



a) Após uma pesagem, para onde é destinada uma tilápia com massa igual a:

- 495 g? frigorífico
- 810 g? pesqueiro
- 309 g? tanque de engorda

b) No caderno, desenhe um fluxograma para representar os passos utilizados pelo piscicultor na destinação das tilápias após as pesagens. Resposta esperada nas **Orientações para o professor**.

77. Analise a sequência numérica a seguir.

(7, −13, −33, −53, ...)

a) Construa um fluxograma que represente os procedimentos para obter, de maneira recursiva, os termos da sequência numérica apresentada. Resposta esperada nas **Orientações para o professor**.

b) Determine o 9º termo dessa sequência. −153

78. Junte-se a dois colegas e escolham algum processo que vocês realizam no dia a dia, ou alguma atividade que alguém precise programar e que pode ser descrita por um algoritmo. Em seguida, construam um fluxograma para representar esse algoritmo. Resposta pessoal.

79. Você já ouviu falar em Portugol? O Portugol é uma pseudolinguagem de programação que permite ao usuário desenvolver algoritmos estruturados em português de forma simples e intuitiva. Seu objetivo é facilitar o aprendizado de lógica de programação e algoritmos para estudantes não habituados com programação. Os algoritmos escritos em Portugol costumam ter a estrutura apresentada ao lado.

```
Início
<declaração das variáveis>
<comandos>
Fim
```

Para "declarar as variáveis", devemos identificar quais variáveis serão utilizadas (área; nota; *A*; *x*; soma etc.) e indicar os tipos de dados correspondentes às variáveis utilizadas, conforme apresentado a seguir.

- Inteiro: qualquer número inteiro. Exemplos: -20; -10; 0; 5; 10.
- Real: qualquer número real. Exemplos: -8; $-3{,}5$; 0; 6; 10,18; pi.

Em comandos, desenvolvemos o algoritmo. Para isso, podemos utilizar comandos de entrada e alguns operadores, conforme os exemplos abaixo.

- Comando de entrada:
  - Escreva: o programa escreve valores informados ou obtidos;
  - Leia: o programa recebe dados digitados pelo usuário.
- Operadores:
  - Aritméticos: $+$, $-$, $*$, $/$, raiz(), $\wedge$, sen(), cos(), mod, div, ...;
  - Lógicos: e, ou, não;
  - Relacionais: $=$, $\neq$, $>$, $\geqslant$ (ou $>=$), $<$, $\leqslant$ (ou $<=$).

c) Resposta esperada: No exemplo **1**, o algoritmo realiza a adição de dois números inteiros predefinidos, 10 e 5; já no exemplo **2**, o algoritmo realiza a adição de dois números quaisquer do tipo real, que devem ser inseridos ao executar o algoritmo.

Observe, nos exemplos a seguir, dois algoritmos escritos em Portugol.

Exemplo 1

```
Início
inteiro: x, y, z
x = 10
y = 5
z = x + y
escreva ("A soma de ", x, "e", y, " é ", z.)
Fim
```

- inteiro: *x*, *y*, *z* — Declaramos as variáveis inteiras *x*, *y* e *z*.
- $x = 10$ — Atribuímos o valor 10 para a variável *x*.
- $y = 5$ — Atribuímos o valor 5 para a variável *y*.
- $z = x + y$ — Atribuímos o valor $x + y$ para a variável *z*.
- escreva (...) — O algoritmo retorna os textos indicados entre aspas, substituindo os valores das variáveis pelos valores atribuídos ou obtidos. Nesse caso: A soma de 10 e 5 é 15.

Exemplo 2

```
Início
real: a, b, soma
escreva ("Digite o primeiro número: ")
leia(a)
escreva ("Digite o segundo número: ")
leia(b)
soma = a + b
escreva ("A soma dos números é igual a: ", soma)
Fim
```

Fontes dos dados: BARBOSA, L. L.; COUTO, C. M. S.; TERRA, R. PortuCol: uma pseudolinguagem inspirada em C ANSI para o ensino de Lógica de Programação e Algoritmos. *In*: WORKSHOP SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO, 24. **Anais** [...]. Lavras: Universidade Federal de Lavras, 2016. Disponível em: https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/9678/9579. CÁMARA-CHÁVEZ, G. **BCC 201**: Introdução à Programação Portugol. UFOTP, [20--]. Disponível em: www.decom.ufop.br/guillermo/BCC201/slides/Portugol_BCC201_2.pdf. Acessos em: 22 abr. 20.

De acordo com as informações e exemplos apresentados, resolva as questões a seguir.

Exemplo **1**: variáveis: *x*, *y*, *z*; operadores: $+$, $=$. Exemplo **2**: variáveis: *a*, *b*, soma; operadores: $+$, $=$.

a) Quais variáveis aparecem em cada exemplo? E quais operadores?

b) O que é realizado ao se executar o algoritmo do exemplo **1**? É calculada a soma $10 + 5 = 15$.

c) Qual é a principal diferença entre os cálculos realizados pelos algoritmos do exemplo **1** e do exemplo **2**?

d) De maneira análoga à apresentada nos exemplos, em dupla, escrevam um algoritmo em Portugol para calcular o produto de três números reais quaisquer, que devem ser digitados por quem executar o algoritmo. Uma resposta possível nas **Orientações para o professor**.

Linguagem de programação

Atualmente, estão disponíveis inúmeras linguagens de programação. Neste tópico, em particular, iremos apresentar e utilizar o **Scratch**, uma linguagem de programação gratuita e *on-line*, desenvolvida por um grupo de pesquisadores do Massachusetts Institute of Technology (MIT-USA), em Cambridge, nos Estados Unidos. Essa linguagem foi projetada especialmente para atender a um público com idade entre 8 e 16 anos e para possibilitar o aprendizado de programação com base em conceitos elementares. Por ser uma linguagem bastante dinâmica e interativa, pode ser utilizada por qualquer pessoa que queira se iniciar no mundo da programação, independentemente de sua faixa etária ou nível de escolaridade.

Analise uma animação programada na linguagem Scratch, na qual o personagem (gato) desloca-se de maneira a traçar o contorno de um quadrado com 200 unidades de comprimento de lado.

Para pensar

Explique com suas palavras o raciocínio utilizado no algoritmo apresentado. Você escreveria esse algoritmo de uma outra maneira? Qual?

Respostas pessoais.

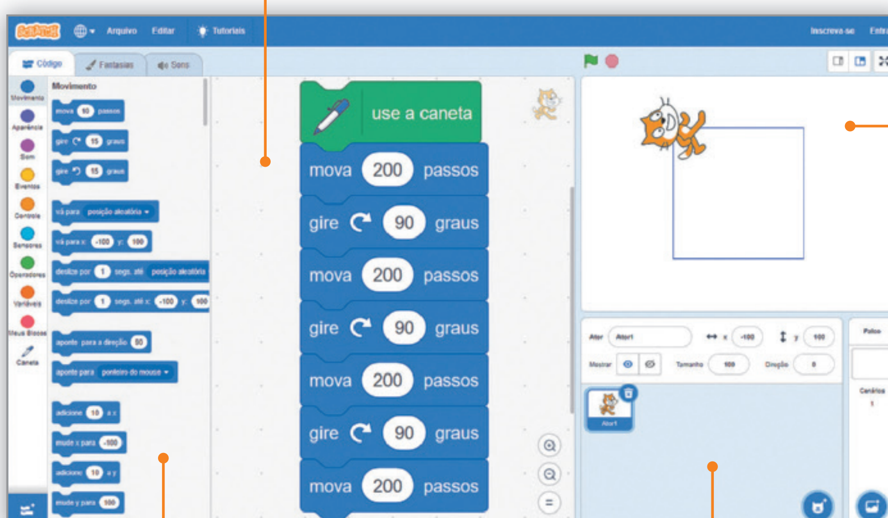
Dica

No *menu* do Scratch, selecione o idioma **Português brasileiro** na opção .

Utilizando a opção é possível adicionar a categoria **Caneta**.

Aqui ficam indicados os blocos de comando selecionados para o algoritmo.

Aqui é possível observar os resultados da programação correspondente ao algoritmo criado.



Aqui ficam disponíveis as categorias e os blocos de comando.

Aqui ficam expostos os personagens utilizados.

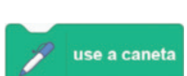
FUNDAÇÃO SCRATCH/LIFELONG KINDERGARTEN NO MIT MEDIA

Conexões

Acesse este *site* para utilizar e obter mais informações sobre a linguagem de programação Scratch:

- SCRATCH. Disponível em: https://scratch.mit.edu/. Acesso em: 10 ago. 2020.

Nesse caso, foram utilizados os seguintes blocos de comando na construção do algoritmo:



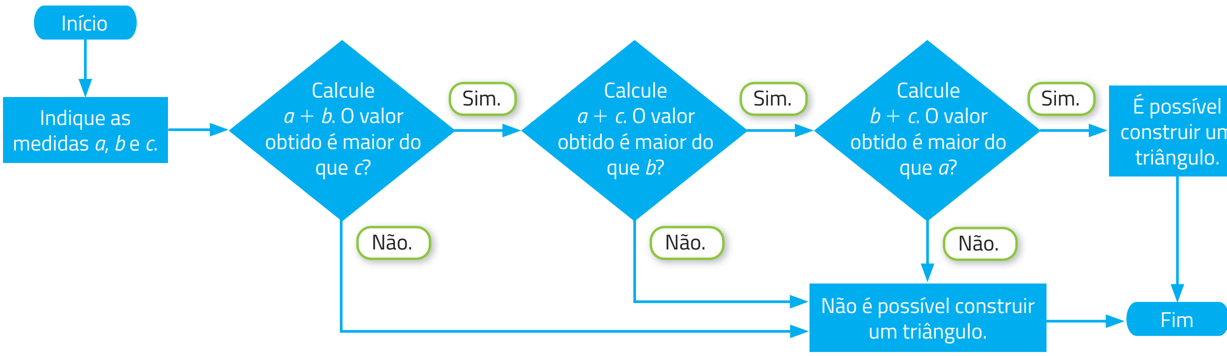
» Indica que será desenhada uma linha pelo caminho que o personagem percorrer.

» Indica que o personagem irá se deslocar 200 unidades de comprimento para a frente, a partir de sua posição atual.

» Indica que o personagem irá girar 90 graus para a direita (sentido horário) a partir de sua posição atual.

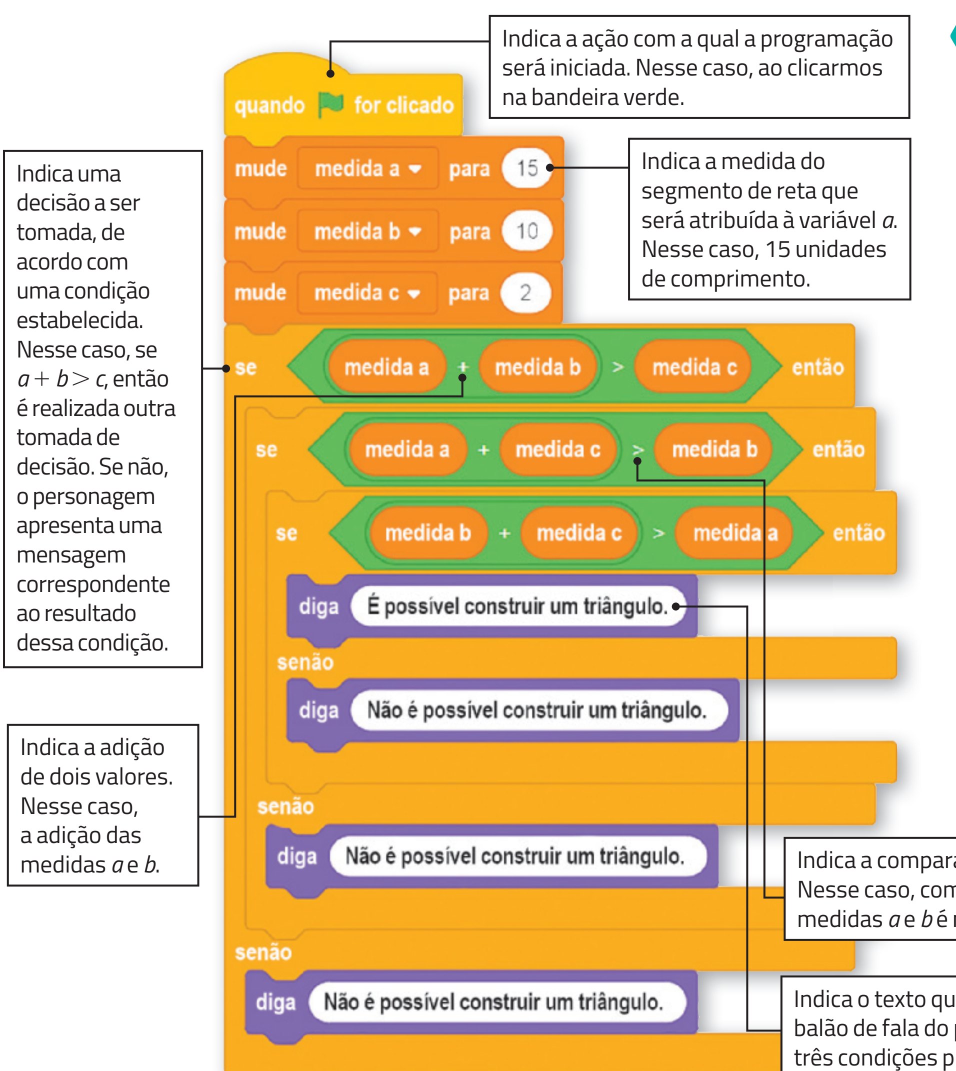
FUNDAÇÃO SCRATCH/LIFELONG KINDERGARTEN NO MIT MEDIA

Também podemos utilizar o Scratch para analisar dados e apresentar respostas. No fluxograma a seguir, está representado um algoritmo para determinar se, sendo dadas as medidas de três segmentos de reta, é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas.



EDITORIA DE ARTE

Podemos representar esse fluxograma, no Scratch, com o algoritmo a seguir. Com ele, o resultado da possibilidade de se construir um triângulo com as medidas indicadas é apresentado no balão de fala do personagem.



Não é possível construir um triângulo.
É possível construir um triângulo.

Para pensar

No exemplo ao lado, com as medidas indicadas para a, b e c, qual será a fala do personagem ao clicarmos na bandeira verde? E qual será sua fala se ajustarmos as medidas de a, b e c para, respectivamente, 12, 10 e 8?

FUNDAÇÃO SCRATCH/ LIFELONG KINDERGARTEN NO MIT MEDIA

Atividades

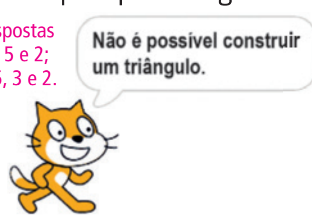
80. Considerando o algoritmo escrito na linguagem Scratch apresentado na página anterior, resolva as questões.

a) Em quais dos itens estão indicadas medidas que, ao serem atribuídas às variáveis *a*, *b* e *c*, resultam na seguinte mensagem apresentada pelo personagem? itens **I** e **III**

I. 10, 18 e 26
II. 7, 9 e 1
III. 3, 4 e 5
IV. 13, 21 e 8

b) Escreva três medidas que, ao serem indicadas no algoritmo, determinam o resultado apresentado pelo personagem a seguir.

Algumas respostas possíveis: 9, 5 e 2; 15, 1 e 17; 5, 3 e 2.



81. Observe o algoritmo e o resultado de uma programação realizada no Scratch. alternativa **d**

Dica

No comando em verde desse algoritmo, o símbolo / indica uma divisão.

Esse algoritmo pode ser utilizado para:

a) verificar se dois números dados são pares;
b) calcular o termo central de três termos consecutivos de uma PG, dados o maior e o menor termos;
c) calcular a área de um retângulo, dadas as medidas do maior e do menor lado;
d) calcular o termo central de três termos consecutivos de uma PA, dados o maior e o menor termos.

Para pensar

Você consegue pensar em alguma outra utilização para o algoritmo proposto?

Resposta possível: O algoritmo proposto também pode ser utilizado para calcular a média aritmética de dois números.

82. No início do estudo sobre linguagem de programação, utilizamos um algoritmo escrito na linguagem Scratch para representar o contorno de um quadrado com 200 unidades de comprimento de lado. Analise a seguir outro algoritmo, nessa mesma linguagem de programação, para obter essa representação.

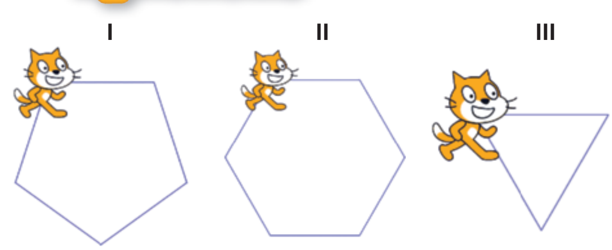
Esse comando possibilita repetir sucessivamente uma sequência de comandos uma quantidade definida de vezes. Neste exemplo, a sequência de comandos em azul é repetida 4 vezes.

a) Determine qual das figuras corresponde ao resultado da programação do seguinte algoritmo. Justifique sua resposta. figura **II**

Para pensar

Por que um dos comandos indica um giro de medida "60 graus"?

Resposta esperada: Porque essa é a medida de cada ângulo externo de um hexágono regular.

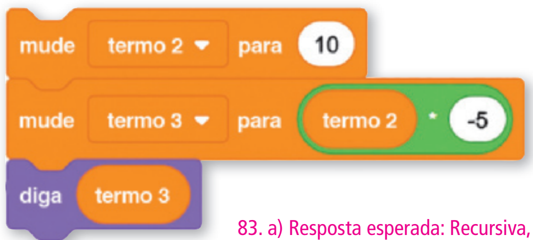


b) Utilizando o comando apresentado no algoritmo do item anterior, com o qual é possível repetir uma sequência de comandos, escreva outro algoritmo para construir cada figura que você não indicou como resposta naquele item. Considere que ambas as figuras têm lados com medida de 150 unidades. Justifique sua resposta.

Resposta esperada: **I** – Use a caneta; repita 5 vezes (mova 150 passos; gire 72 graus para a direita). **III** – Use a caneta; repita 3 vezes (mova 150 passos; gire 120 graus para a direita).

IMAGENS: FUNDAÇÃO SCRATCH/LIFELONG KINDERGARTEN NO MIT MEDIA

83. Analise o algoritmo, na linguagem Scratch, utilizado para obter o terceiro termo de uma PG e resolva as questões.



FUNDAÇÃO SCRATCH/LIFELONG KINDERGARTEN NO MIT MEDIA

83. a) Resposta esperada: Recursiva, pois, para obter esse termo, o termo anterior é multiplicado por -5.

Dica

No comando em verde desse algoritmo, o símbolo * indica uma multiplicação.

a) De acordo com esse algoritmo, o terceiro termo da PG é obtido de maneira recursiva ou não recursiva? Justifique.

b) Qual é a razão dessa PG? E qual é o primeiro termo? -5. -2.

c) Escreva uma expressão para determinar o enésimo termo dessa PG de maneira:

- recursiva; $a_n = -5 \cdot a_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$ e $a_1 = -2$
- não recursiva. $a_n = -2 \cdot (-5)^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}^*$

84. Os comandos a seguir, indicados fora de ordem, foram utilizados por Rafaela para construir um algoritmo no Scratch que determina o valor de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para um determinado número x.

Uma resposta possível: **III**, **V**, **II**, **IV** e **I**.

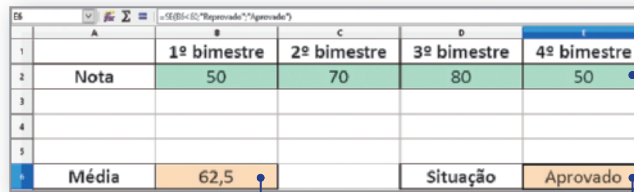
a) Ordene os comandos apresentados de maneira a obter o algoritmo construído por Rafaela.

b) Qual será a fala do personagem ao clicarmos na bandeira verde? Uma resposta possível: 24.

c) Escreva a lei de formação da função f.
Uma resposta possível: $f(x) = 2(x + 10)$ ou $f(x) = 2x + 20$.

85. Algumas ideias iniciais sobre linguagem de programação podem ser usadas em programas de computador. As planilhas eletrônicas, por exemplo, permitem a utilização de diferentes fórmulas matemáticas e comandos que envolvem lógica. Observe uma planilha eletrônica utilizada por um professor para verificar se um estudante foi aprovado ou reprovado.

Nas células **B2**, **C2**, **D2** e **E2**, o professor digita as notas do estudante em cada bimestre.



LIBREOFFICE CALC

Na célula **B6**, foi digitada a fórmula =(B2+C2+D2+E2)/4. O valor obtido e apresentado nessa célula corresponde à média aritmética das notas do estudante.

Na célula **E6** foi digitada a fórmula =SE(B6<60; "Reprovado"; "Aprovado"). Com isso, se a média calculada na célula **B6** for menor do que 60, apresenta-se o texto "Reprovado"; senão, apresenta-se o texto "Aprovado".

85. c) Uma resposta possível nas **Orientações para o professor.**

a) Qual foi a média das notas bimestrais apresentadas no exemplo anterior? O estudante que obteve essas notas foi aprovado ou reprovado? 62,5. Aprovado.

b) Considere um estudante cujas notas bimestrais digitadas nessa planilha foram 45, 66, 50 e 63. O que aparecerá na célula **B6**? E na célula **E6**? 56. Reprovado.

c) Represente o algoritmo da planilha utilizando um fluxograma e a linguagem de programação Scratch disponível em <https://scratch.mit.edu/> (acesso em: 18 maio 2020).

d) Pense em um algoritmo que possa ser utilizado para classificar uma PA em crescente, decrescente ou constante dados dois termos consecutivos. Depois, represente esse algoritmo por um fluxograma e faça a construção correspondente em uma planilha eletrônica.
Resposta nas **Orientações para o professor.**

86. Junte-se a um colega e pensem em uma situação que envolva algum conceito matemático que vocês já tenham estudado. Elaborem um problema envolvendo esse conceito e listem os passos necessários para resolvê-lo. Depois, representem essa sequência de passos por meio de um fluxograma. Em um computador, utilizem a linguagem de programação Scratch para construir um algoritmo que represente o fluxograma elaborado. Por fim, realizem testes para verificar se esse algoritmo apresenta as soluções esperadas.
Respostas pessoais.

O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **5** e das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Estudando PA na planilha eletrônica

Podemos utilizar a planilha eletrônica **LibreOffice Calc** para estudar uma PA, obtendo alguns de seus termos, a soma desses termos e representando esses valores no plano cartesiano. O **LibreOffice Calc** e os demais programas de escritório da LibreOffice estão disponíveis para *download* em <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/> (acesso em: 18 maio 2020).

Para estudar uma PA na planilha eletrônica, vamos considerar a questão a seguir, que foi apresentada na atividade **R11** da página **25**.

(Enem/MEC) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

a) 497,25.
b) 500,85.
c) 502,87.
d) 558,75.
e) 563,25.

IL67/SHUTTERSTOCK.COM

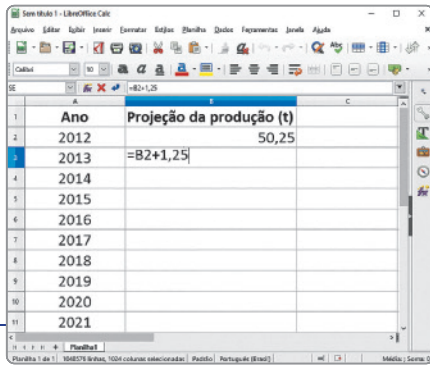
Na situação descrita nessa atividade, como a perspectiva de crescimento da produção de arroz a cada ano é constante, temos que a variação da projeção da produção, em toneladas, de um ano para o próximo é dada por:

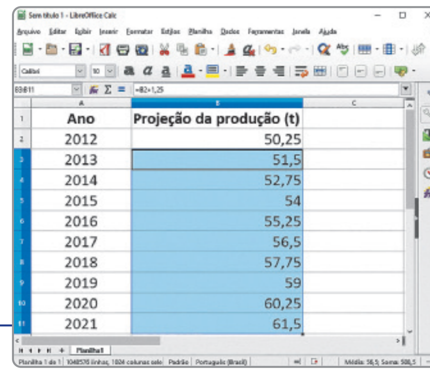
$$51{,}50 - 50{,}25 = 1{,}25$$

Para resolver essa questão podemos obter, na planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, as projeções da produção de arroz, em toneladas, para os anos de 2012 até 2021 e, em seguida, a soma desses valores da seguinte maneira.

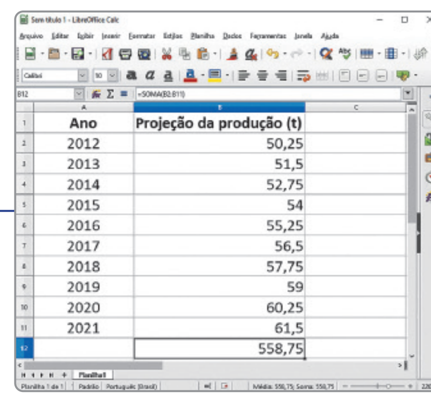
1. a) $a_n = 50{,}25 + 1{,}25(n - 1)$ ou $a_n = 1{,}25n + 49$, com $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{15} = 67{,}75$. Na situação apresentada, esse valor corresponderia à projeção da produção de arroz, em toneladas, para 2026, caso a perspectiva de crescimento se mantenha constante até esse ano.

A Nas células **A1** e **B1**, escrevemos Ano e Projeção da produção (t), respectivamente. Em seguida, nas células **A2:A11** escrevemos os anos de 2012 até 2021 e indicamos o valor da projeção da produção para 2012 na célula **B2**. Na célula **B3**, escrevemos =B2+1,25 para obter o valor da projeção da produção para 2013, e pressionamos a tecla ***Enter***. Por fim, selecionamos a célula **B3**, clicamos na opção ☐ e, com o botão esquerdo do *mouse* pressionado, arrastamos até a célula **B11** para obter os valores das projeções da produção de arroz até 2021.





B Pra obter a soma dessas projeções, digitamos =SOMA(B2:B11) na célula **B12** e pressionamos a tecla ***Enter***.



LIBREOFFICE CALC

Assim, podemos concluir que a alternativa **d**, da questão proposta, é a correta.

1. b) Respostas nas **Orientações para o professor**. Resposta esperada: Esse gráfico pode ser associado a uma função afim $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1{,}25x + 49$.

Mãos à obra

Não escreva no livro

1. Em relação à situação apresentada, considere uma sequência numérica em que a_1 corresponde à projeção da produção de arroz, em toneladas, para 2012; a_2 para 2013; a_3 para 2014; e assim sucessivamente.

a) Escreva a fórmula do termo geral dessa sequência. Em seguida, calcule o valor de a_{15} e explique o que ele representa em relação à situação apresentada na questão da página anterior.

b) Na planilha **LibreOffice Calc**, construa um gráfico de dispersão para representar os termos dessa PA. Para isso, utilize a opção **Inserir gráfico** do *menu*. Nesse gráfico, os pontos de coordenadas (x, y) indicam os termos de posição x e valor y da PA.

- Esse gráfico pode ser associado a que tipo de função: afim, modular, quadrática, do tipo exponencial ou logarítmica? Justifique.

2. Considere uma PG em que $a_1 = -1$ e $a_2 = -2$. Utilizando procedimentos análogos aos apresentados no exemplo e com auxílio da planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, determine os 10 primeiros termos dessa PG. Em seguida, resolva os itens a seguir. $(-1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, -512, \ldots)$

a) Escreva a fórmula do termo geral dessa PG. $a_n = -1 \cdot 2^{(n-1)}$

b) Na planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, construa um gráfico de dispersão para representar os termos dessa PG. Esse gráfico pode ser associado a que tipo de função: afim, modular, quadrática, do tipo exponencial ou logarítmica? Justifique. Respostas nas **Orientações para o professor**. Resposta esperada: Esse gráfico pode ser associado a uma função do tipo exponencial $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1 \cdot 2^{(x-1)}$.

O QUE ESTUDEI

Respostas pessoais.

Não escreva no livro

1 Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão. Depois, responda se você: **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações.

- Ouvi com atenção as explicações do professor.
- Quando precisei, pedi ajuda ao professor.
- Auxiliei o professor quando ele me pediu.
- Participei das discussões propostas à turma.
- Fiz as atividades propostas na sala de aula.
- Fiz as atividades escolares propostas para casa.
- Respeitei meus colegas nas atividades em grupo.
- Auxiliei meus colegas quando eles tiveram dúvidas.
- Levei para a sala de aula os materiais necessários.

2 Nas fichas a seguir, estão indicados os principais conceitos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum conceito para melhor compreendê-lo. Resposta pessoal.

- Noções de linguagem de programação.
- Relação entre PG e função do tipo exponencial.
- Progressão geométrica (PG).
- Sequência numérica.
- Progressão aritmética (PA).
- Fórmula do termo geral de uma PG.
- Fórmula do termo geral de uma PA.
- Soma dos *n* primeiros termos de uma PG.
- Algoritmo e fluxograma.
- Relação entre PA e função afim.
- Soma dos *n* primeiros termos de uma PA.
- Soma dos termos de uma PG infinita.

3 Junte-se a dois colegas e escolham três conceitos entre os que foram listados na atividade anterior. Depois, conversem entre si sobre as aprendizagens e conhecimentos relacionados a esses conceitos e pensem em uma maneira de compartilhar essas informações com os colegas da turma. Vocês podem utilizar diferentes linguagens e ferramentas, como: a escrita de um texto em uma rede social ou blogue, a elaboração de um cartaz ou de uma apresentação visual (*slides*), a produção de um vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) etc. Resposta pessoal.

4 Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre a técnica de filmagem *stop-motion*. Agora, vamos retomar esse contexto nas questões a seguir.

a) A animação **A noiva cadáver** rompeu os padrões de filmagem da época – em que as animações, em quase sua totalidade, eram feitas em computador – ao utilizar a técnica de filmagem *stop-motion*. Observe algumas informações sobre essa produção.

WARNER BROS.

A noiva cadáver

Gênero: Animação, fantasia, família, romance, comédia musical

Lançamento: 21 de outubro de 2005

Duração: 1h15min

Direção: Mike Johnson e Tim Burton

Elenco: Johnny Depp, Helena Bonham Carter, Emily Watson

Nacionalidade: EUA

Classificação: Livre

DIGITAL GENETICS/SHUTTERSTOCK.COM

4. a) I. 1 440, 2 880, 4 320, 5 760 e 7 200. PA.

I. Considerando que nessa animação foram utilizados 24 quadros por segundo, escreva os cinco primeiros termos de uma sequência que expresse a quantidade de quadros utilizados até completar cada minuto do filme. Classifique essa sequência em PA ou PG.

II. Escreva a lei de formação de uma função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que possa ser associada à sequência que você indicou no item anterior, sendo $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. $f(n) = 1\,440n$

III. Qual o total de quadros utilizados na produção dessa animação? 108 000 quadros

b) Utilizando *softwares* e técnicas de programação, uma pessoa faz pequenos filmes, com duração de 5 min, utilizando comandos predefinidos para os personagens. Para filmes com 1 personagem, ele utiliza 2 000 comandos; para 2 personagens, 4 000 comandos; para 3 personagens, 8 000 comandos; e assim sucessivamente, até 10 personagens, que correspondem ao máximo que ele consegue utilizar de comandos em seus filmes. 4. b) I. Uma resposta possível: PG de 10 termos em que $a_1 = 2\,000$ e $q = 2$.

I. Defina a sequência correspondente à quantidade de comandos necessários, de acordo com a quantidade de personagens utilizados e classifique-a em PA ou PG.

II. Escreva a lei de formação de uma função $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$ que possa ser associada à sequência que você indicou no item anterior, $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, e assim sucessivamente. $f(m) = 1\,440m$

c) A animação **A fuga das galinhas**, que ilustra a abertura desta Unidade, tem no enredo algumas questões sociais, como a exploração do trabalho das galinhas em uma granja de ovos. Junte-se a um colega e pesquisem outra animação elaborada com a técnica de *stop-motion* e com alguma temática social. Em um texto, descrevam características técnicas dessa animação, como a quantidade de quadros por segundo, e como a questão social é abordada. Por fim, compartilhem com os colegas o texto produzido.
Resposta pessoal.

UNIDADE 2

Relações métricas e trigonometria no triângulo

O trabalho com esta abertura de Unidade favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC:

Competências gerais: 1, 2, 5 e 7

Matemática e suas Tecnologias
Competência específica: 3
Habilidade: EM13MAT308

Ciências da Natureza e suas Tecnologias
Competência específica: 1

O texto integral das competências e das habilidades citadas encontra-se no final deste livro do estudante.

Métodos científicos

Em geral, para determinar a validade de determinado fato, pesquisadores utilizam algum método científico, por exemplo, o **método científico indutivo** e o **método científico dedutivo**.

O método indutivo parte de um caso particular para obter um resultado generalizado e pode ser desenvolvido de acordo com quatro etapas: observação, estabelecimento de hipóteses, experimentação e conclusão.

Veja a seguir um exemplo de aplicação do método científico indutivo.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens abaixo.

- Qual é o objetivo dos métodos científicos apresentados?
- Como é obtida uma conclusão no método indutivo? E no método dedutivo?
- Pense em algum conceito matemático que possa ser estudado por meio do método dedutivo. Explique com suas palavras como seriam as etapas de desenvolvimento metodológico.

Veja os comentários sobre a abordagem desses itens nas **Orientações para o professor.**

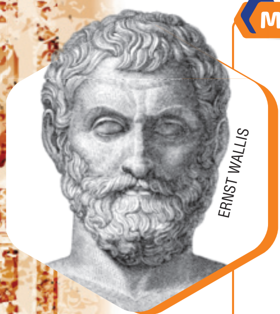
Por sua vez, o método dedutivo parte de uma ou mais premissas gerais, tidas como verdadeiras e amplamente aceitas, para obter conclusões a respeito de um resultado particular. Esse método é mais utilizado em áreas como a Física e a Matemática, para demonstrar leis e propriedades, e pode ser desenvolvido, em geral, de acordo com três etapas: definição de premissas, previsão de um resultado e conclusão.

Veja a seguir um exemplo de aplicação do método científico dedutivo.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Teorema de Tales

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas informações sobre dois métodos científicos, entre eles, o método dedutivo, normalmente utilizado na Matemática. Há indícios de que a característica demonstrativa da Matemática tenha se iniciado com Tales de Mileto (c. 640 a.C.-564 a.C.). Uma de suas principais contribuições à Matemática é o conhecido **teorema de Tales**.



» Tales de Mileto.

Matemática na História

[...]

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra [...]. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. [...]

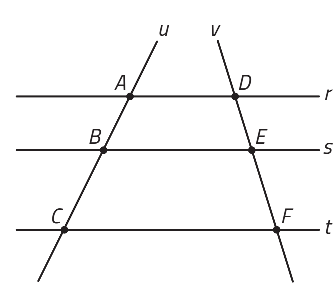
EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 95.

Teorema de Tales

Denominamos feixe de retas paralelas um conjunto de retas de um mesmo plano e paralelas entre si.

Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais, segmentos de reta ordenadamente proporcionais.

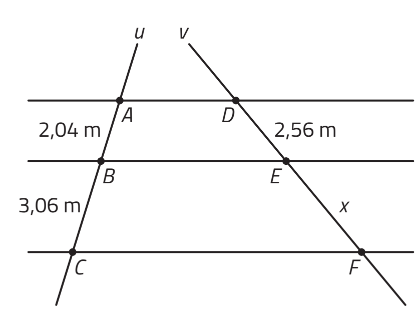
De acordo com esse teorema, ao considerar um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t* e duas retas, *u* e *v*, transversais a esse feixe, podemos escrever as seguintes proporções:



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}} \qquad \boxed{\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}} \qquad \boxed{\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}}$$

Observe, por exemplo, a representação de um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t* e de duas retas transversais a esse feixe, *u* e *v*.



IRINA-PITTORE/SHUTTERSTOCK.COM

Utilizando o teorema de Tales, podemos determinar a medida x de $\overline{EF}$.

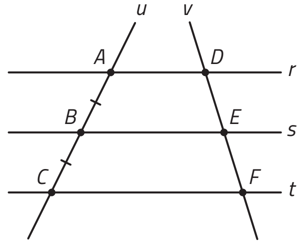
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \frac{2{,}04}{3{,}06} = \frac{2{,}56}{x} \Rightarrow 2{,}04x = 7{,}8336 \Rightarrow x = \frac{7{,}8336}{2{,}04} = 3{,}84$$

Portanto, $\overline{EF}$ mede 3,84 m.

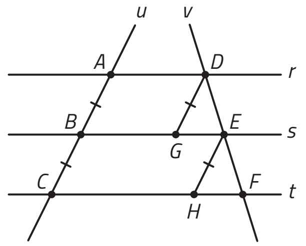
Podemos verificar a validade do teorema de Tales por meio de dois casos: quando um feixe de retas paralelas determina, em uma reta transversal, segmentos de reta congruentes (caso **1**); e quando esse feixe determina, nessa reta transversal, segmentos de reta com medidas racionais quaisquer (caso **2**). Acompanhe.

Caso 1:

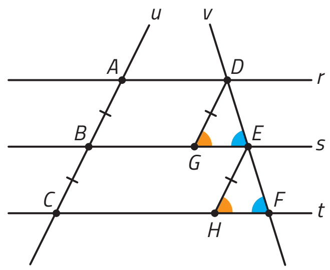
Seja um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que determina na reta transversal *u* os segmentos de reta congruentes *AB* e *BC*. Uma outra reta transversal *v* cruza esse mesmo feixe de retas nos pontos *D*, *E* e *F*.



Traçando dois segmentos de reta *DG* e *EH*, paralelos à reta *u*, obtemos os paralelogramos *ABGD* e *BCHE*, nos quais $\overline{AB} \equiv \overline{DG}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EH}$. Assim, $\overline{DG} \equiv \overline{EH}$.



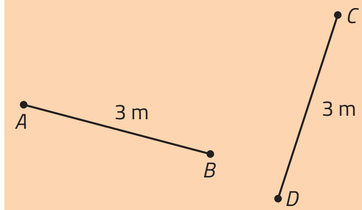
Como as retas *DG* e *EH* são paralelas e cruzam as retas paralelas *s* e *t*, os ângulos $D\hat{G}E$ e $E\hat{H}F$ são congruentes. Note que o par de ângulos $G\hat{E}D$ e $H\hat{F}E$ também são congruentes, pois são correspondentes.



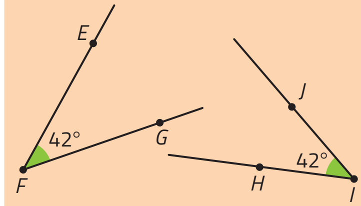
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Dica

Em Matemática, dizemos que existe congruência entre duas figuras se elas são idênticas no formato e no tamanho. Em particular, dois segmentos de reta são congruentes quando possuem medidas iguais. O mesmo ocorre com os ângulos. Analise os exemplos.



- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos de reta congruentes, o que pode ser indicado da seguinte maneira: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

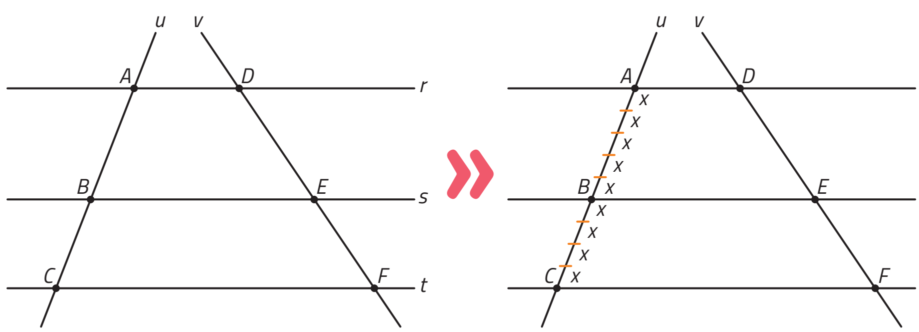


- $E\hat{F}G$ e $H\hat{I}J$ são ângulos congruentes, o que pode ser indicado da seguinte maneira: $E\hat{F}G \equiv H\hat{I}J$.

Assim, pelo caso de congruência entre triângulos LAA_o, os triângulos *DGE* e *EHF* são congruentes. Logo, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$. Além disso, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF} = 1$, ou seja, os segmentos de reta *AB* e *BC* são proporcionais aos segmentos de reta *DE* e *EF*.

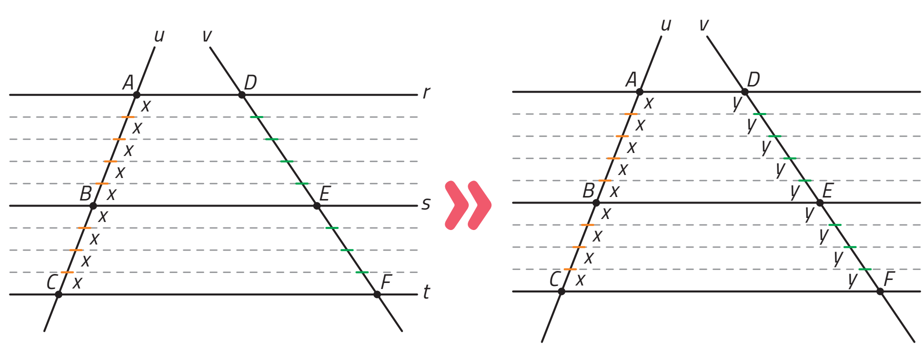
Caso 2:

Seja um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que determina em uma reta transversal *u* os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ com medidas racionais quaisquer. Dessa maneira, é possível dividir *AB* e *BC* em *m* e *n* segmentos de reta de medida *x*, respectivamente. Isso ocorre porque nesse caso pode-se estabelecer um número racional positivo *x* que divida *AB* e *BC* em quantidades inteiras de partes.



Traçando retas paralelas às do feixe, passando pelas extremidades dos segmentos de reta de medida *x* determinados em $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, obtemos *m* segmentos de reta dividindo $\overline{DE}$ e *n* segmentos de reta dividindo $\overline{EF}$, respectivamente, na reta transversal *v*.

Pelo caso **1**, como temos um feixe de retas paralelas que determina na reta transversal *u* segmentos de reta congruentes de medida *x*, os segmentos de reta determinados em *v* também são congruentes entre si, de medida *y*, por exemplo.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Assim, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{mx}{nx} = \dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{my}{ny} = \dfrac{m}{n}$; ou seja, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Dica

Nesse caso, consideramos $m = 5$ e $n = 4$, ou seja, os segmentos de reta *AB* e *BC* divididos em 5 partes e em 4 partes de medida *x*, respectivamente. Porém, é possível utilizar esses mesmos procedimentos para quaisquer *m* e *n* naturais positivos, de modo que *x* seja uma medida racional.

Para pensar

Explique como dois segmentos de reta *GH* e *IJ*, medindo 5 cm e 3,4 cm respectivamente, podem ser divididos igualmente em partes inteiras.

Uma resposta possível: Podemos considerar um número racional positivo $x = 0{,}2$ e dividir os segmentos de reta *GH* e *IJ* em 25 partes e 17 partes de medida 0,2 cm, respectivamente.

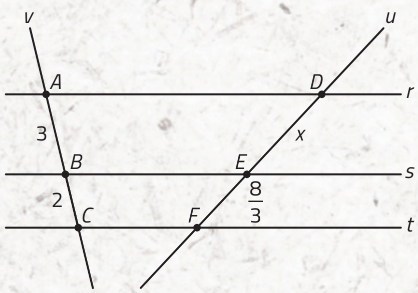
Dica

O teorema de Tales também é válido para os segmentos de reta *AB* e *BC* com medidas irracionais. Porém, optamos por não explicitar e/ou demonstrar tal afirmação nesta coleção.

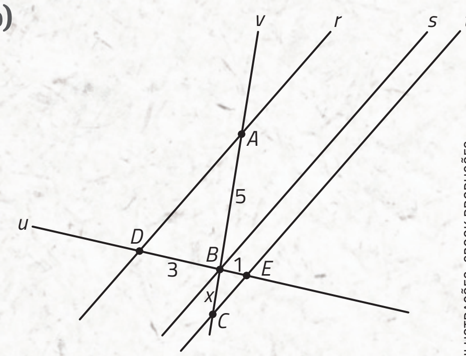
Atividades resolvidas

R1. Em cada item, determine o valor de x considerando que as retas r, s e t são paralelas.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Resolução

a) Como as retas v e u são transversais que intersectam o feixe de retas paralelas r, s e t, podemos utilizar o teorema de Tales para escrever a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{\frac{8}{3}} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $x = 4$.

b) De maneira análoga ao item anterior, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BE} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Portanto, $x = \frac{5}{3}$.

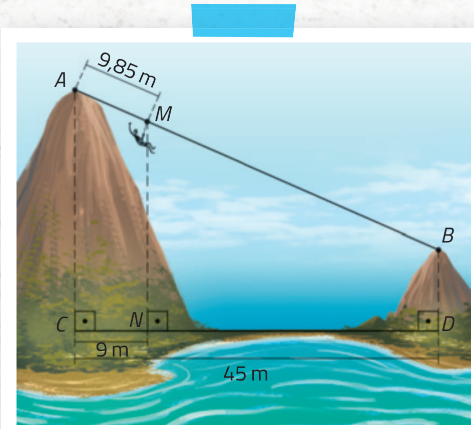
Dica

Note que os segmentos de reta DB e BE estão contidos em u e os segmentos de reta AB e BC estão contidos em v.

R2. Você sabe o que é tirolesa? Leia o texto a seguir.

> [...]
>
> A tirolesa saiu do montanhismo. É uma técnica para o alpinista transpor obstáculos com abismo. O participante voa, preso a um cabo aéreo conectado a uma roldana. [...]
>
> DUARTE, O. **História dos esportes**. São Paulo: Editora Senac, 2019.

Com o objetivo de praticar tirolesa, um cabo de aço foi completamente esticado, com as extremidades fixadas no topo de dois montes (pontos A e B), conforme representado no esquema ao lado. Considerando uma pessoa que se encontrava no ponto M dessa tirolesa, quantos metros essa pessoa ainda deve percorrer para completar o trajeto?



ARTUR FUJITA

ARIGATO/SHUTTERSTOCK.COM

Resolução

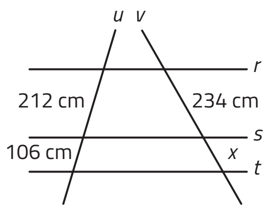
Observando o esquema, podemos notar que os segmentos de reta AC, MN e BD são paralelos. Assim, aplicando o teorema de Tales, temos que:

$$\frac{CN}{ND} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{45-9} = \frac{9{,}85}{MB} \Rightarrow 9MB = 354{,}6 \Rightarrow MB = 39{,}4$$

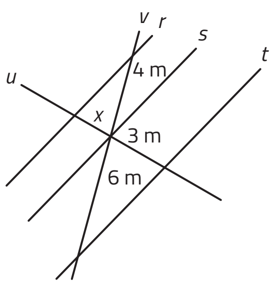
Portanto, essa pessoa ainda deve percorrer 39,4 m para completar o trajeto da tirolesa.

1. Em cada item, determine o valor de x, sabendo que as retas r, s e t são paralelas.

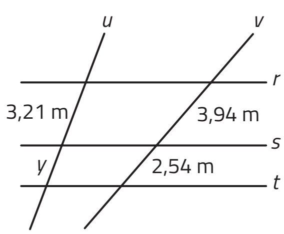
a) $x = 117$ cm



b) $x = 2$ m



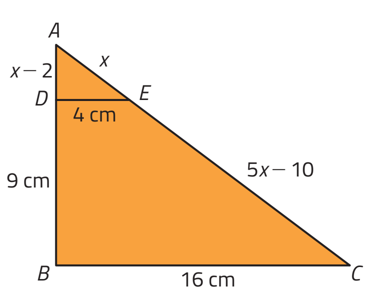
2. Na figura a seguir, as retas u e v intersectam as retas r, s e t, que são paralelas entre si.



Se um triângulo com 5 m de base possui altura igual à medida y, indicada na figura, podemos afirmar que sua área é, em metros quadrados, aproximadamente: alternativa **a**

a) 5,17;
b) 6,32;
c) 4,14;
d) 10,35.

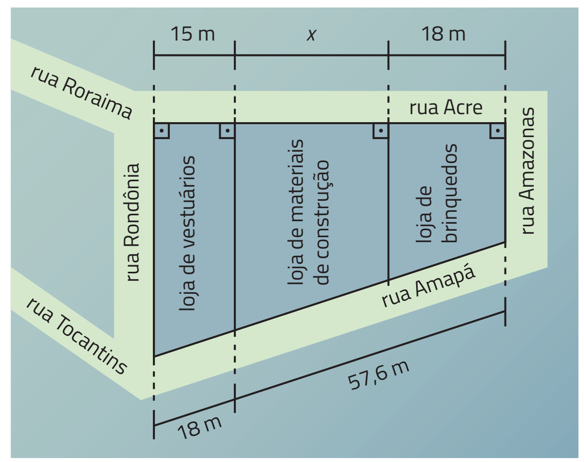
3. Analise a figura a seguir, cujas medidas estão expressas em centímetros.



Sabendo que os segmentos de reta DE e BC são paralelos, é possível afirmar que o perímetro do triângulo ABC é: alternativa **a**

a) 48 cm;
b) 46 cm;
c) 148 cm;
d) 24 cm.

4. Marina é proprietária de uma loja de materiais de construção, situada na rua Amapá e vizinha a duas lojas: uma de vestuário e outra de brinquedos. Em uma reforma, Marina pretende construir um novo muro no fundo do terreno da loja, que faz frente com a rua Acre. Observe a representação do quarteirão onde se situam essas lojas.



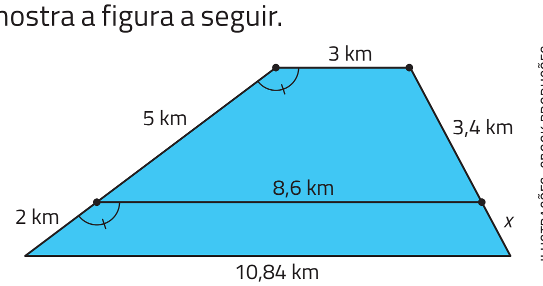
ALAN CARVALHO

alternativa **b**

Qual é o comprimento do muro a ser construído?

a) 18 m **b)** 30 m **c)** 26 m **d)** 34 m

5. Uma propriedade rural, que tem formato de trapézio, será totalmente cercada. Além disso, será construída uma cerca dividindo essa propriedade em dois lotes menores, conforme mostra a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Considerando que a cada metro de cerca construída tem-se um custo de R$ 0,20, calcule o custo total para cercar essa propriedade conforme descrito. R$ 6.840,00

6. Junte-se a um colega e elaborem um problema em que seja necessário utilizar o teorema de Tales para resolvê-lo. Esse problema pode conter uma ilustração ou um esquema. Em seguida, troquem esse problema com o de outra dupla para que uma resolva o da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas.

Resposta pessoal.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Semelhança de polígonos

Você já assistiu a filmes em que apareciam faixas pretas nas partes superior e inferior ou na lateral da imagem em um televisor? Isso acontece porque há diferentes formatos de vídeos que precisam ser adaptados quando reproduzidos em algumas telas. Essas faixas possuem a função de manter a proporção da imagem original do vídeo, sem que haja distorções. Um dos formatos de vídeo mais utilizados é o *widescreen*, em que as imagens têm formato retangular, cuja razão entre o maior e o menor lado é 16 : 9. Quando uma tela não possui medidas nessa razão, a imagem do padrão *widescreen* é adaptada com as faixas pretas.

Fonte dos dados: AUSTRÁLIA. National Film and Sound Archive of Australia. **Aspect ratio**. Canberra, [20--]. Disponível em: https://nfsa.gov.au/preservation/preservation-glossary/aspect-ratio. Acesso em: 18 nov. 2019.

INAINA/SHUTTERSTOCK.COM; AAMARTINEZ/SHUTTERSTOCK.COM

» Televisor de 29" com tela em formato 4 : 3 e imagem em formato *widescreen*.

RUSLAN IVANTSOV/SHUTTERSTOCK.COM

» Televisor de 32" com tela e imagem em formato *widescreen*.

Note que as imagens em cada televisor ao lado têm tamanhos diferentes, mas possuem o mesmo formato. A adaptação de uma imagem em diferentes tamanhos, de maneira que seu formato se mantenha sem distorções, pode ser utilizada para compreendermos a ideia de **semelhança de polígonos**.

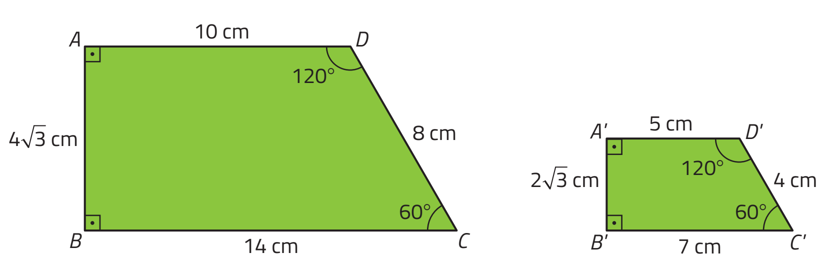
Dois polígonos são semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. A razão k entre as medidas de dois lados correspondentes de polígonos semelhantes é chamada de **razão de semelhança**.

Para pensar

Você sabe o que significa dizer que um televisor tem 29 ou 32 polegadas? Explique a um colega.

Resposta pessoal.

Analise, por exemplo, os polígonos representados a seguir.



CBOOK PRODUÇÕES

Podemos afirmar que esses polígonos são semelhantes, pois:

- os ângulos internos correspondentes são congruentes:

$$A\hat{B}C \equiv A'\hat{B'}C',\ A\hat{D}C \equiv A'\hat{D'}C',\ B\hat{A}D \equiv B'\hat{A'}D' \text{ e } B\hat{C}D \equiv B'\hat{C'}D';$$

- os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{14}{7} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2.$$

Para pensar

As razões de semelhança entre os polígonos *A'B'C'D'* e *ABCD*, nessa ordem, e na ordem contrária, ou seja, *ABCD* e *A'B'C'D'*, são iguais? Justifique.

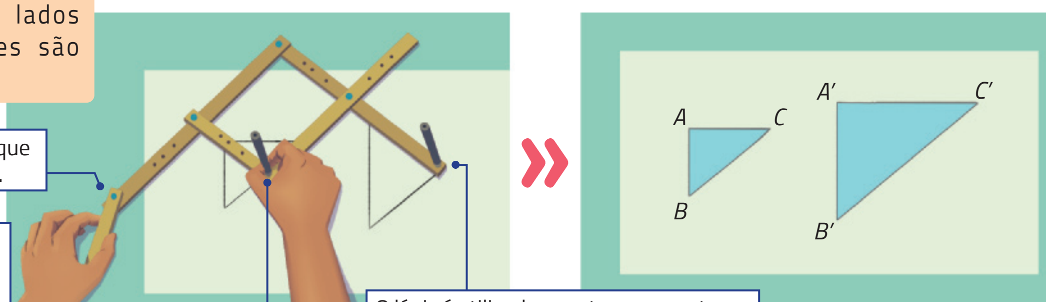
Resposta esperada: Não, pois a razão de semelhança entre os polígonos *A'B'C'D'* e *ABCD* é $\frac{1}{2}$, enquanto a razão de semelhança entre os polígonos *ABCD* e *A'B'C'D'* é 2.

Dica

Ao ampliar o triângulo ABC com o pantógrafo, obtém-se o triângulo semelhante $A'B'C'$, pois os ângulos internos correspondentes desses triângulos são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Semelhança de triângulos

Utilizando um instrumento chamado pantógrafo, é possível obter ampliações ou reduções de figuras. Nesse caso, como apenas o tamanho da figura é ajustado, mantendo-se seu formato, a figura original e a figura obtida são semelhantes. Acompanhe como obter a ampliação de um triângulo ABC utilizando um pantógrafo.



ALAN CARVALHO

Dica

Indicamos que esses triângulos são semelhantes da seguinte maneira: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Na página anterior, vimos que, para dois polígonos serem semelhantes, é necessário que seus ângulos internos correspondentes sejam congruentes e que seus lados correspondentes sejam proporcionais. Nesse caso, como os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, temos:

- $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B'}C'$, $A\hat{C}B \equiv A'\hat{C'}B'$ e $B\hat{A}C \equiv B'\hat{A'}C'$;
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

Para pensar Resposta pessoal.

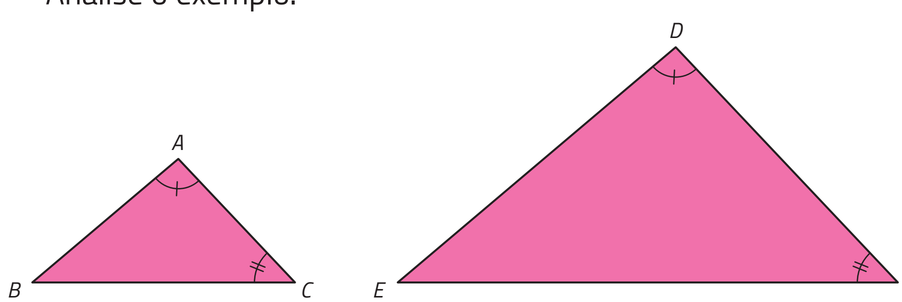
Os três casos de semelhança de triângulos enunciados a seguir podem ser demonstrados. Junte-se a dois colegas, escolham um desses casos, pesquisem e analisem uma demonstração da validade do caso de semelhança de triângulos escolhido. Depois, apresentem essa demonstração aos colegas.

Agora, estudaremos casos que permitem garantir que dois triângulos são semelhantes sem, necessariamente, conhecer as medidas de cada um de seus lados e de seus ângulos internos.

1º caso – Ângulo, ângulo (AA)

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois ângulos internos correspondentes congruentes.

Analise o exemplo.



CBOOK PRODUÇÕES

Como $B\hat{A}C \equiv E\hat{D}F$ e $A\hat{C}B \equiv D\hat{F}E$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Para pensar

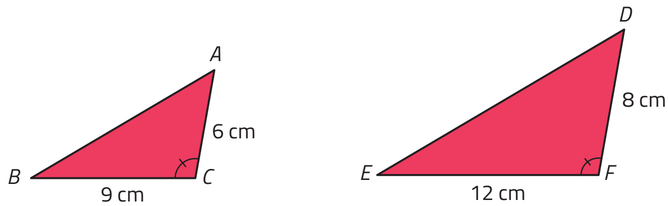
Para verificar esse caso de semelhança de triângulos, desenhe no **GeoGebra** dois triângulos quaisquer que possuam dois ângulos internos congruentes. Depois, faça medições e confirme se os triângulos construídos são semelhantes.

Resposta pessoal.

2º caso – Lado, ângulo, lado (LAL)

Dois triângulos são semelhantes se possuem dois lados correspondentes proporcionais e se os ângulos internos formados por esses lados são congruentes.

Analise o exemplo.

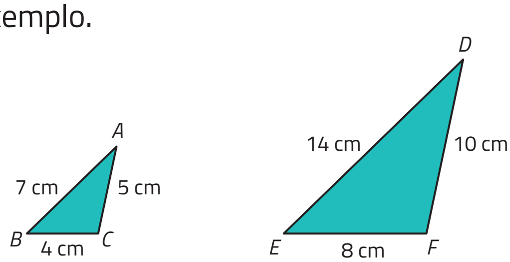


Como $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{3}{4}$ e $B\hat{C}A \equiv E\hat{F}D$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

3º caso – Lado, lado, lado (LLL)

Dois triângulos são semelhantes se possuem três lados correspondentes proporcionais.

Analise o exemplo.



Como $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{1}{2}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Para pensar

Para verificar esse caso de semelhança de triângulos, desenhe no **GeoGebra** dois triângulos quaisquer que possuam dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos internos, formados por esses lados, congruentes. Depois, faça medições e confirme se os triângulos construídos são semelhantes.

Resposta pessoal.

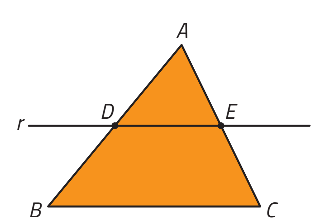
Para pensar

Para verificar esse caso de semelhança de triângulos, desenhe no **GeoGebra** dois triângulos quaisquer que possuam os três lados correspondentes proporcionais. Depois, faça medições e confirme se os triângulos construídos são semelhantes.

Resposta pessoal.

Teorema fundamental da semelhança

Observe na figura ao lado a representação de uma reta *r*, paralela ao lado *BC* de um triângulo *ABC*, que intersecta os lados *AB* e *AC* nos pontos *D* e *E*, respectivamente.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Como a reta *r* é paralela ao lado *BC*, temos, pelo teorema de Tales, que:

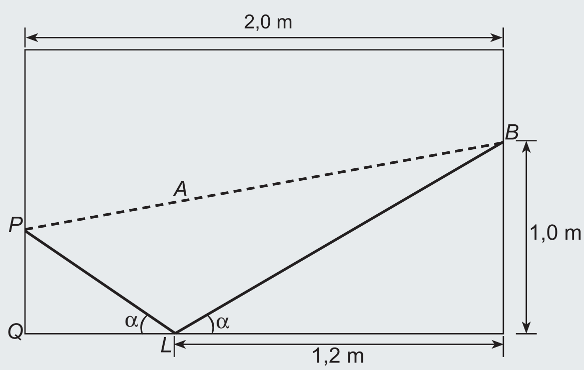
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Sabemos que $D\hat{A}E$ e $B\hat{A}C$ são ângulos coincidentes e, portanto, congruentes. Assim, pelo caso de semelhança de triângulos *LAL*, temos que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Toda reta, paralela a um dos lados de um triângulo e que intersecta os outros lados em dois pontos distintos, define outro triângulo, que é semelhante ao triângulo original.

Atividade resolvida

R3. (Cefet-MG) A ilustração a seguir representa uma mesa de sinuca retangular, de largura e comprimento iguais a 1,5 e 2,0 m, respectivamente. Um jogador deve lançar a bola branca do ponto *B* e acertar a preta no ponto *P*, sem acertar nenhuma outra, antes. Como a amarela está no ponto *A*, esse jogador lançará a bola branca até o ponto *L*, de modo que a mesma possa rebater e colidir com a preta.



Se o ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e o ângulo de rebatimento são iguais, como mostra a figura, então a distância de *P* a *Q*, em cm, é aproximadamente

a) 67
b) 70
c) 74
d) 81

Resolução

Para resolver essa atividade, podemos realizar as seguintes etapas.

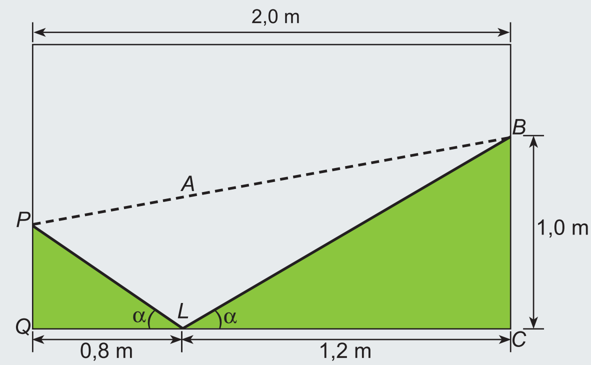
1ª) Compreender o enunciado.

Do enunciado, temos que:

- a largura e o comprimento do retângulo, que representa a mesa, são 1,5 m e 2,0 m, respectivamente;
- a bola branca, no ponto *B*, deverá atingir a bola preta, no ponto *P*, passando pelo ponto *L*;
- as medidas do ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e do ângulo de rebatimento são iguais;
- precisamos determinar a distância entre *P* e *Q*.

2ª) Elaborar um plano.

Considerando a figura apresentada, podemos destacar dois triângulos e indicar a medida *QL*.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Pelo caso de semelhança de triângulo *AA* (ângulos de medidas α e 90°), podemos afirmar que os triângulos *PQL* e *BCL* são semelhantes. Nesse caso, temos que os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais e, então, é possível determinar a medida *PQ* escrevendo essa proporção.

3ª) Executar um plano.

Como $\Delta PQL \sim \Delta BCL$, temos que:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{QL}{CL} \Rightarrow \frac{PQ}{1} = \frac{0{,}8}{1{,}2} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3} \simeq 0{,}67$$

Portanto, a distância *PQ* é de aproximadamente 0,67 m ou 67 cm.

4ª) Verificar os resultados.

Para verificar o resultado obtido, podemos considerar $\frac{2}{3}$ como o valor de *PQ* e verificar se as razões $\frac{PQ}{BC}$ e $\frac{QL}{CL}$ formam uma proporção.

- $\frac{PQ}{BC} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$
- $\frac{QL}{CL} = \frac{0{,}8}{1{,}2} = \frac{2}{3}$

Assim, $\frac{PQ}{BC} = \frac{QL}{CL}$.

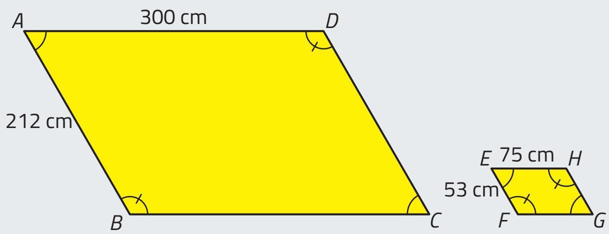
Portanto, a alternativa **a** é a correta.

11. b) Resposta esperada: Sim, elas têm formatos de polígonos semelhantes quando obtidas nas resoluções **A**, **B** e **D** e quando obtidas nas resoluções **C** e **E**. Nessas situações, possuem, respectivamente, ângulos internos congruentes (ângulos retos) e lados correspondentes proporcionais.

Atividades

Não escreva no livro

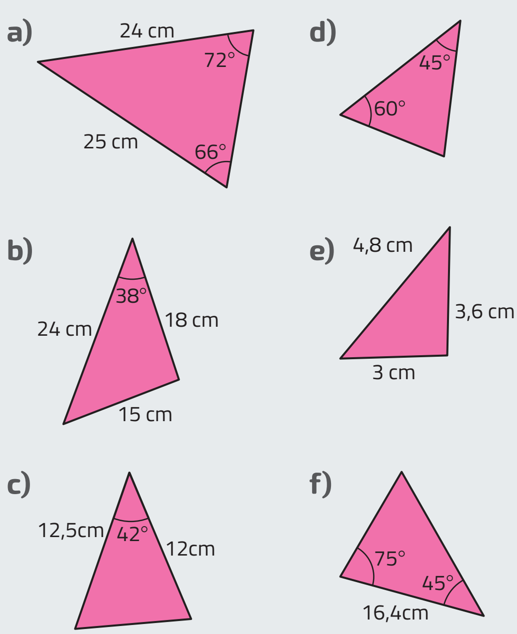
7. Os paralelogramos *ABCD* e *EFGH* representados a seguir são semelhantes? Caso sejam semelhantes, determine a razão de semelhança. sim. 4



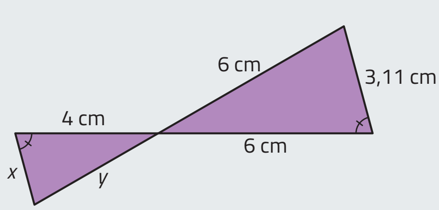
8. Identifique quais pares de triângulos representados a seguir são semelhantes e registre qual caso de semelhança você utilizou para identificá-los. **a** e **c**: caso **LAL**; **b** e **e**: caso **LLL**; **d** e **f**: caso **AA**

Dica

As figuras não são proporcionais entre si.



9. Determine os valores de *x* e *y*, considerando que os ângulos de mesma marcação na figura a seguir são congruentes. $x \simeq 2{,}07$ cm e $y = 4$ cm



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

10. a) Resposta nas **Orientações para o professor**.

10. Uma escada rolante de 10 m de extensão possui seu ponto mais alto situado a 5 m do solo. Ao subir essa mesma escada, partindo de seu ponto mais baixo, Pablo percorreu certa distância *x* e atingiu um ponto que se situa a 2 m do solo.

a) Desenhe uma figura para representar a situação descrita anteriormente.

b) Qual é a distância *x* percorrida por Pablo? 4 m

11. Leia o texto a seguir.

> Você já percebeu que existem variados formatos de tela. Dentre eles, destacam-se o formato de DVD padrão e o *widescreen*. As razões entre duas dimensões desses formatos (maior e menor) são, respectivamente 4 : 3 e 16 : 9.
>
> Fonte dos dados: ARTIS, A. Q. **Silêncio**: filmando! Rio de Janeiro: Elvesier, 2011. p. 154.

Observe algumas das resoluções, em formato retangular, disponíveis para reprodução em computadores.

Resolução de imagem **A**: 800 : 600 pixels.
Resolução de imagem **B**: 1 600 : 1 200 pixels.
Resolução de imagem **C**: 1 280 : 720 pixels.
Resolução de imagem **D**: 1 024 : 768 pixels.
Resolução de imagem **E**: 1 600 : 900 pixels.

a) Determine quais dessas resoluções são utilizadas em formato:

- de DVD padrão; **A**, **B** e **D**
- *widescreen*. **C** e **E**

b) Imagens retangulares obtidas nas resoluções apresentadas têm formato de polígonos semelhantes? Comente.

12. Ainda sobre o contexto apresentado na atividade anterior, reúna-se a um colega e realizem uma pesquisa sobre outros formatos de tela e, com base nessas informações, elaborem um problema que envolva a ideia de semelhança de figuras. Em seguida, troquem esse problema com outra dupla para que uma resolva o da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

OLEYNIK ALINE/SHUTTERSTOCK.COM

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias.

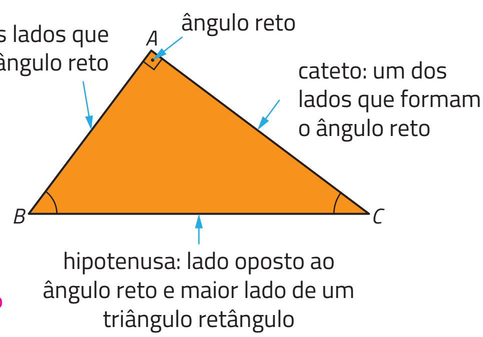
Relações métricas no triângulo retângulo

Você provavelmente já estudou que todo triângulo com um ângulo interno reto é denominado **triângulo retângulo**. O lado oposto a esse ângulo reto é a **hipotenusa** e os outros dois lados são os **catetos** do triângulo retângulo. Analise o triângulo retângulo *ABC*.

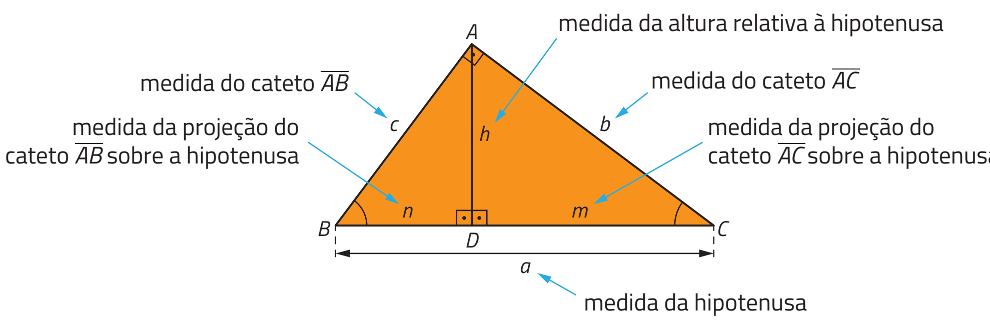
Para pensar

Os demais ângulos internos de um triângulo retângulo, além do ângulo reto, podem ser classificados de que maneira: agudo, reto, obtuso ou raso? Por que a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo? Justifique as respostas.

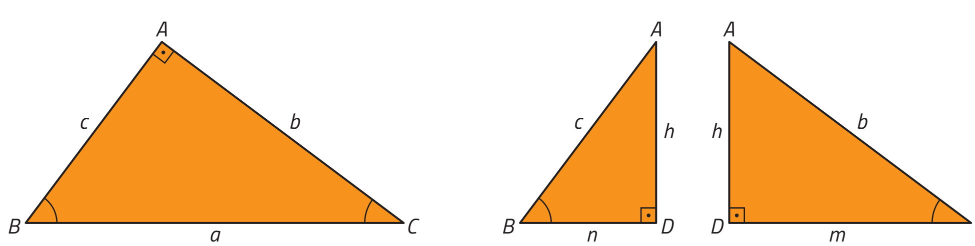
Resposta esperada: Agudo, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° e, subtraindo desse valor a medida do ângulo reto, temos que a soma dos demais ângulos internos tem de ser igual a 90°. Resposta esperada: Porque a hipotenusa é o lado oposto ao maior ângulo interno do triângulo retângulo (ângulo reto).



Agora, indicamos nesse triângulo retângulo a medida *a* da hipotenusa e as medidas *b* e *c* dos catetos. Além disso, traçamos o segmento de reta *AD* de medida *h*, correspondente à altura desse triângulo relativa à hipotenusa, e determinamos os segmentos de reta *BD* e *DC* de medidas *n* e *m*, respectivamente.



Considerando essa representação, podemos destacar três triângulos retângulos: *ABC*, *DBA* e *DAC*. Observe.



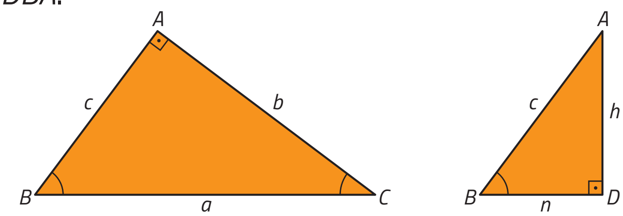
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

> Em um triângulo retângulo *ABC* qualquer, ao traçarmos sua altura relativa à hipotenusa, obtemos dois triângulos semelhantes, que também são semelhantes ao triângulo *ABC*.

Podemos verificar que esses triângulos são semelhantes dois a dois e, com base nessas semelhanças, escrever proporções envolvendo as medidas dos lados desses triângulos.

Analise cada caso.

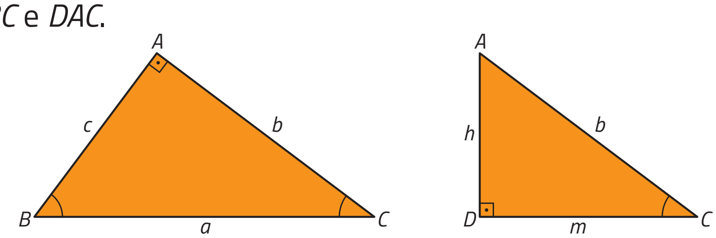
- Triângulos *ABC* e *DBA*.



Esses triângulos possuem dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes: ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}A$ (ângulos retos) e ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{B}A$ (ângulos com vértice em B). Portanto, pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, temos que $\Delta ABC \sim \Delta DBA$. Assim:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c} \quad \boxed{\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n} \quad \boxed{\frac{b}{h} = \frac{c}{n} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot n}$$

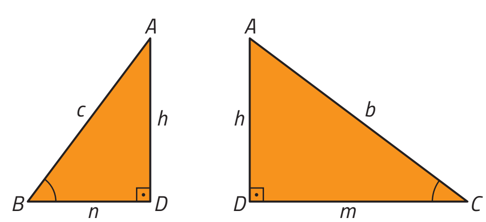
- Triângulos *ABC* e *DAC*.



Esses triângulos possuem dois pares de ângulos internos correspondentes congruentes: ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ (ângulos retos) e ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}A$ (ângulos com vértice em C). Portanto, pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, temos que $\Delta ABC \sim \Delta DAC$. Assim:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c} \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m} \quad \boxed{\frac{c}{h} = \frac{b}{m} \Rightarrow c \cdot m = b \cdot h}$$

- Triângulos *DBA* e *DAC*.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Conforme as etapas anteriores, cada um desses dois triângulos é semelhante ao triângulo *ABC*. Portanto, podemos afirmar que $\Delta DBA \sim \Delta DAC$. Assim:

$$\boxed{\frac{c}{b} = \frac{h}{m} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot m} \quad \boxed{\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n} \quad \boxed{\frac{c}{b} = \frac{n}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot n}$$

Organizando as relações obtidas, temos:

$a = m + n$ $\quad$ $c^2 = a \cdot n$ $\quad$ $c \cdot h = b \cdot n$ $\quad$ $a \cdot h = b \cdot c$

$b \cdot h = c \cdot m$ $\quad$ $h^2 = m \cdot n$ $\quad$ $b^2 = a \cdot m$

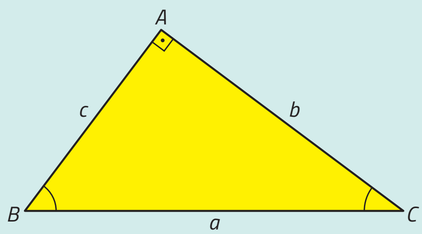
As relações apresentadas são válidas porque derivam de razões entre lados correspondentes dos triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC*, que, por sua vez, são semelhantes entre si.

Para pensar

Explique com suas palavras essas relações e o motivo pelo qual elas são verdadeiras.

Adicionando membro a membro as relações $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$, podemos determinar outra relação envolvendo as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Acompanhe.

$$a \cdot m + a \cdot n = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot (m + n) = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot a = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Essa relação consiste em um dos teoremas mais conhecidos na Matemática: o **teorema de Pitágoras**.

Matemática na História

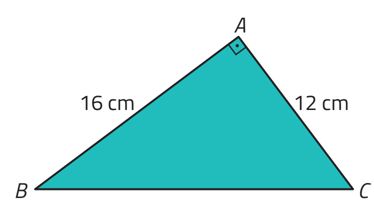
O teorema de Pitágoras é uma das produções matemáticas gregas mais famosas. Seu nome é uma homenagem a Pitágoras de Samos (c. 589 a.C.-c. 500 a.C.), considerado o primeiro a verificar a validade dessa propriedade para qualquer triângulo retângulo. No entanto, há indícios de que ideias desse teorema, com base em medições, já eram conhecidas pelos babilônios cerca de um milênio antes do tempo de Pitágoras.

Fonte dos dados: EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 103-104.

Atividades resolvidas

R4. Observe o triângulo *ABC* e determine a medida:

a) da hipotenusa;
b) da altura relativa à hipotenusa;
c) das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Resolução

a) Representando a medida da hipotenusa por a, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow a_2 = 400 \Rightarrow a = \pm\sqrt{400} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ \quad \text{ou} \\ a = -20 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a hipotenusa desse triângulo mede 20 cm.

b) Representando por h, b e c, respectivamente, as medidas da altura relativa à hipotenusa, do cateto de 12 cm e do cateto de 16 cm, temos:

$a \cdot h = b \cdot c \Rightarrow 20 \cdot h = 12 \cdot 16 \Rightarrow 20h = 192 \Rightarrow h = 9{,}6$

Portanto, a altura desse triângulo relativa à hipotenusa é 9,6 cm.

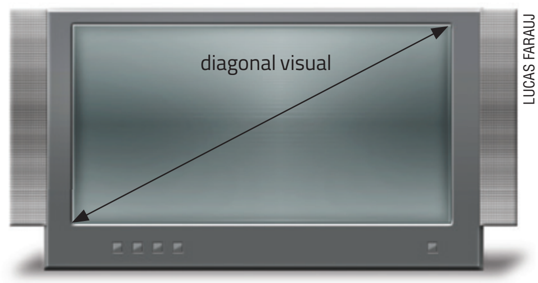
c) Representando por m e n, respectivamente, as projeções sobre a hipotenusa dos catetos de 12 cm e de 16 cm, temos:

- $b^2 = a \cdot m \Rightarrow 12^2 = 20 \cdot m \Rightarrow 144 = 20m \Rightarrow m = 7{,}2$
- $c^2 = a \cdot n \Rightarrow 16^2 = 20 \cdot n \Rightarrow 256 = 20n \Rightarrow n = 12{,}8$

Portanto, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 7,2 cm e 12,8 cm.

R5. Você possivelmente já notou que uma informação a se considerar no momento de comprar um televisor é a medida indicada em **polegadas**. Essa medida corresponde ao comprimento da diagonal visual do televisor, ou seja, da diagonal da região retangular que o telespectador efetivamente enxerga como imagem. Uma polegada, indicada por 1″, equivale a aproximadamente 2,54 cm.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Economia. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. **Dimensões de tela de televisores**. Brasília, DF, [20--]. Disponível em: http://inmetro.gov.br/consumidor/produtos/tela_tv.asp. Acesso em: 7 set. 2020.



LUCAS FARAUJ

Um determinado modelo de televisor tem a região retangular visual com 68 cm de comprimento e 45 cm de altura. Assim, podemos indicar que esse modelo de televisor tem uma tela de aproximadamente:

a) 29″; **b)** 32″; **c)** 39″; **d)** 42″; **e)** 55″.

Resolução

Com base nas informações do enunciado e representando a medida da diagonal da tela desse televisor por *a*, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar essa medida.

$$a^2 = 45^2 + 68^2 \Rightarrow a^2 = 6\,649 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{6\,649} \Rightarrow \begin{cases} a \simeq 81{,}5 \\ \quad \text{ou} \\ a \simeq -81{,}5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, a diagonal da tela desse televisor mede aproximadamente 81,5 cm. Convertendo essa medida para polegadas, obtemos:

$$81{,}5 : 2{,}54 \simeq 32$$

Portanto, a alternativa **b** é a correta, pois a diagonal da tela desse televisor mede aproximadamente 32″.

Para pensar

Como visto anteriormente, algumas telas de televisores têm um formato padrão chamado *widescreen*, em que é mantida a proporção 16 : 9 entre as medidas das dimensões da tela retangular. Pesquise a medida da diagonal, em polegadas, de um televisor com tela nesse formato e, por meio de cálculos, determine as medidas aproximadas do comprimento e da altura dessa tela.

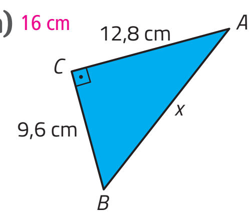
Resposta pessoal.

Atividades

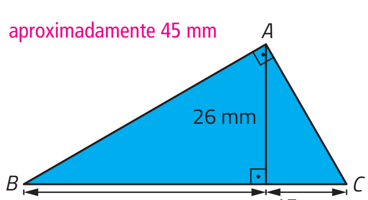
Não escreva no livro

13. Nos triângulos retângulos representados a seguir, determine o valor da medida *x*.

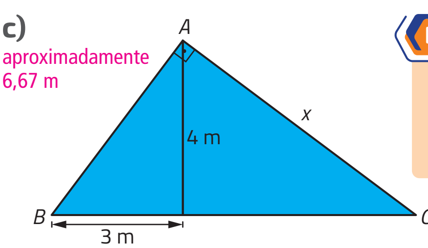
a) 16 cm



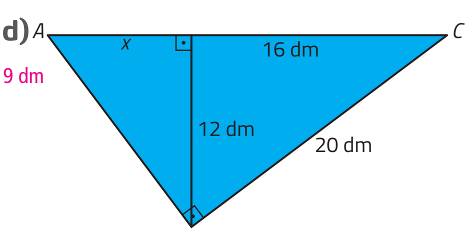
b) aproximadamente 45 mm



c) aproximadamente 6,67 m



d) 9 dm

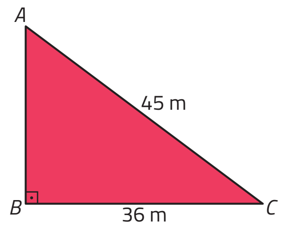


Dica

As figuras não estão proporcionais.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

14. Observe o triângulo retângulo representado a seguir.



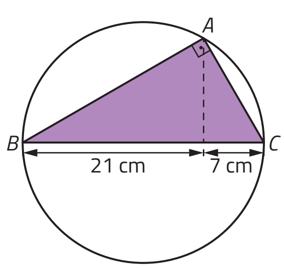
É possível afirmar que o produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa desse triângulo, em metros, é aproximadamente: alternativa **a**

a) 467;
b) 972;
c) 1 239;
d) 1 620.

15. Um triângulo retângulo possui a hipotenusa e um cateto medindo 6 cm e 3,6 cm, respectivamente. Determine:

a) a medida do outro cateto; 4,8 cm
b) a medida da altura relativa à hipotenusa; 2,88 cm
c) as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. 2,16 cm e 3,84 cm

16. Na figura a seguir, o triângulo *ABC* está inscrito em uma circunferência.



Dica

Chamamos de ângulo inscrito todo ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e os lados passam por outros pontos distintos dessa circunferência.

Sabendo que a hipotenusa desse triângulo coincide com um diâmetro da circunferência, determine:

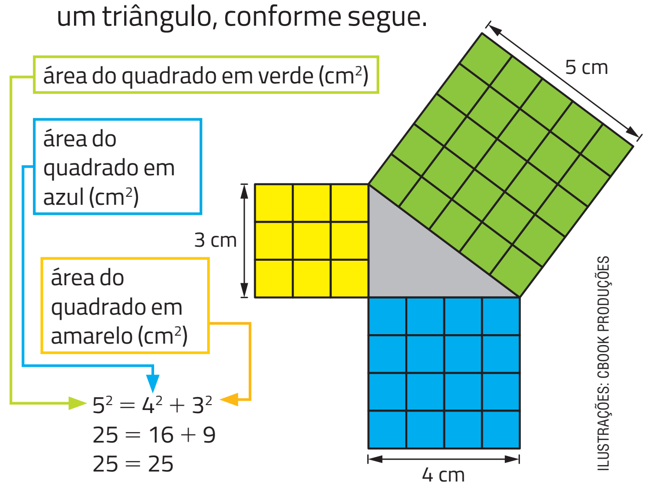
a) o comprimento dessa circunferência; **a)** 28π cm ou aproximadamente 87,92 cm
b) a área desse triângulo. $98\sqrt{3}$ cm² ou aproximadamente 169,74 cm²

17. Considere uma progressão aritmética (PA) cujo primeiro termo é 6 e a razão, 3. O 59º e 79º termo dessa sequência determinam, em centímetros, as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Qual é a medida da hipotenusa desse triângulo? 300 cm

18. Você sabe o que é um terno pitagórico? Leia o texto a seguir.

> [...]
> Estreitamente ligado ao teorema de Pitágoras está o problema de encontrar inteiros *a*, *b* e *c* que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Um terno de números dessa espécie recebe a designação de **terno pitagórico** [...]
>
> EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 104.

Um exemplo de terno pitagórico é o terno formado pelos números 3, 4 e 5. Podemos verificar essa propriedade geometricamente a partir das áreas de três quadrados construídos sobre os lados de medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm de um triângulo, conforme segue.



Junte-se a um colega e façam o que se pede.

a) Expliquem como a propriedade dos ternos pitagóricos foi verificada geometricamente no exemplo apresentado anteriormente.

b) Investiguem outros ternos pitagóricos e construam figuras como a apresentada para fazer a verificação. Vocês podem utilizar malha quadriculada ou programas de computador como o **GeoGebra**. Resposta pessoal.

c) Elaborem um problema que envolva um desses ternos pitagóricos e troque-o com outra dupla para que uma resolva o problema elaborado pela outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

18. a) Resposta esperada: Como a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados do triângulo é igual à área do quadrado construído sobre o maior lado, pode-se concluir que as medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo e que os números 3, 4 e 5 formam um terno pitagórico.

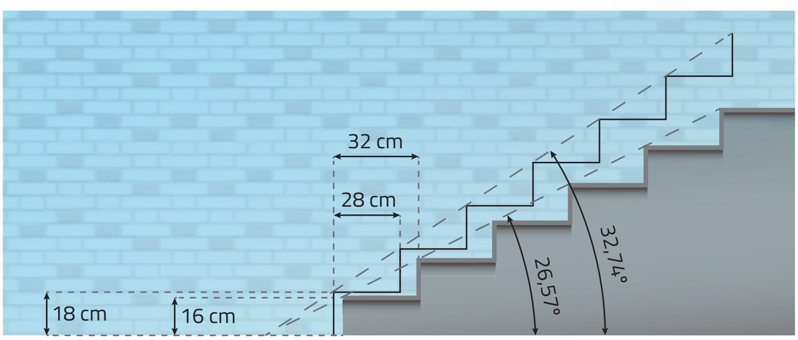
O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **1**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

A Associação Brasileira de Normas e Técnicas (ABNT) estabelece alguns critérios e regras que devem ser seguidos em construções civis. O cumprimento dessas normas possibilita que o maior número de pessoas consiga utilizar esses espaços de maneira autônoma. Para a construção de escadas, por exemplo, são estabelecidos alguns padrões de medidas: ângulo de inclinação entre 26,57° e 32,74°, comprimento do **piso** entre 28 cm e 32 cm e altura do **espelho** entre 16 cm e 18 cm.

Piso: região horizontal onde se pisa ao subir uma escada.

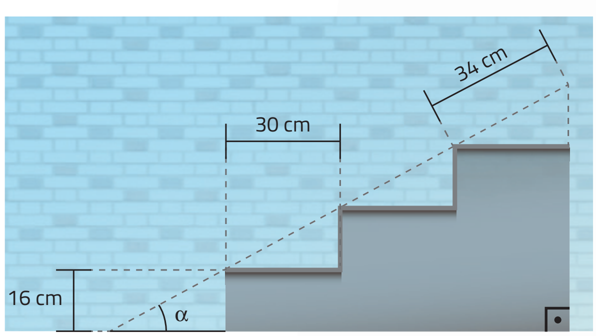
Espelho: região vertical entre um piso e outro.



BENTINHO

Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT 9050**, 2004. Disponível em: www.aracaju.se.gov.br/userfiles/emurb/2011/07/Normas_NBR9050_AcessibilidadeEdificacoes.pdf. Acesso em: 7 set. 2020.

Analise, por exemplo, o projeto para a construção de uma escada cujas medidas estão adequadas aos padrões descritos anteriormente.



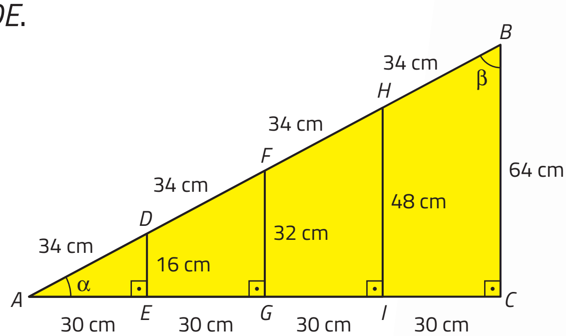
BENTINHO

Dica

A medida α do ângulo de inclinação dessa escada é tal que $26{,}57° < \alpha < 32{,}74°$.

SILVERCIRCLE/SHUTTERSTOCK.COM

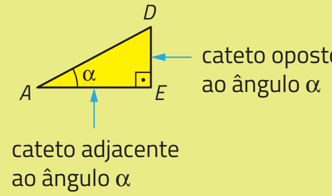
Podemos representar esse projeto considerando os espelhos da escada, de maneira a obter os seguintes triângulos retângulos: *ABC*, *AHI*, *AFG* e *ADE*.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Para pensar

No triângulo *ADE*, dizemos que $\overline{DE}$ é o **cateto oposto** ao ângulo α e que $\overline{AE}$ é o **cateto adjacente** ao ângulo α.



No triângulo *AFG*, qual é o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α?

cateto oposto: $\overline{FG}$; cateto adjacente: $\overline{AG}$

Pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, podemos afirmar que os triângulos *ABC*, *AHI*, *AFG* e *ADE* são semelhantes, uma vez que possuem dois ângulos internos congruentes (ângulo α e ângulo reto). Assim, para esses triângulos, temos que:

- as razões entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa são iguais.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{HI}{AH} = \frac{FG}{AF} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{64}{136} = \frac{48}{102} = \frac{32}{68} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

A razão entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa é denominada **seno** de α, indicada por **sen α**. Neste caso, sen $\alpha = \frac{8}{17}$.

- as razões entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa são iguais.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{AG}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{120}{136} = \frac{90}{102} = \frac{60}{68} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

A razão entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa é denominada **cosseno** de α, indicada por **cos α**. Neste caso, cos $\alpha = \frac{15}{17}$.

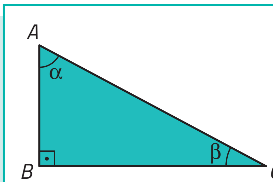
- as razões entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α são iguais.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{HI}{AI} = \frac{FG}{AG} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{64}{120} = \frac{48}{90} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α é denominada **tangente** de α, indicada por **tg α**. Neste caso, tg $\alpha = \frac{8}{15}$.

O seno, o cosseno e a tangente são **razões trigonométricas**. O campo da Matemática que estuda essas razões, entre outros conceitos, é a **Trigonometria**.

Seja o triângulo retângulo *ABC* com ângulos internos de medida α, 90° e β.



CBOOK PRODUÇÕES

Em relação ao ângulo α, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{BC}{AB}$$

Em relação ao ângulo β, temos:

$$\text{sen}\,\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\,\beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{AB}{BC}$$

Para pensar

Resposta pessoal.

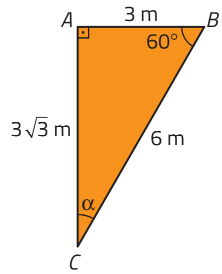
Considerando as razões apresentadas, o que você pode concluir? Represente um triângulo retângulo qualquer e estabeleça conjecturas. Por fim, discuta com os colegas sua produção.

T.SUMAETHO/SHUTTERSTOCK.COM

Atividades resolvidas

R6. Observe o triângulo retângulo *ABC* representado a seguir e determine:

a) sen 60°, cos 60° e tg 60°; **b)** o valor de α; **c)** sen α, cos α e tg α.



Resolução

a)
- $\text{sen } 60° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Portanto, $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ e $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$.

Para pensar

Você notou alguma relação entre as razões obtidas? Comente com os colegas.

Resposta esperada: $\text{tg } 60° = \dfrac{\text{sen } 60°}{\cos 60°}$.

b) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, temos que:

$$\alpha + 60° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + 150° = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 150° = 30°$$

Portanto, $\alpha = 30°$.

c) Como $\alpha = 30°$, temos de calcular sen 30°, cos 30° e tg 30°.

- $\text{sen } 30° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto, $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Para pensar

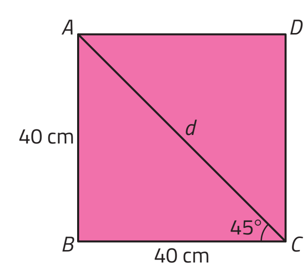
Você notou alguma relação entre as razões obtidas? Comente com os colegas.

Resposta esperada: $\text{tg } 30° = \dfrac{\text{sen } 30°}{\cos 30°}$.

R7. Observe ao lado o quadrado e resolva as questões.

a) Qual é a medida da diagonal desse quadrado?

b) Calcule sen 45°, cos 45° e tg 45°.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Resolução

a) Considerando o triângulo retângulo *ABC* e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

- $d^2 = 40^2 + 40^2 \Rightarrow d^2 = 3\,200 \Rightarrow d = \pm\sqrt{3\,200} \Rightarrow \begin{cases} d = 40\sqrt{2} \\ \quad\text{ou} \\ d = -40\sqrt{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$

Portanto, a diagonal desse quadrado mede $40\sqrt{2}$ cm.

b) Considerando novamente o triângulo retângulo *ABC* e o resultado obtido no item anterior, temos:

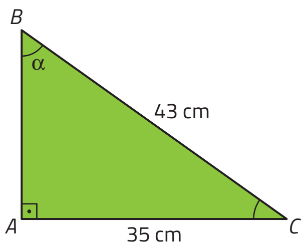
- $\text{sen } 45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{40}{40\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{40}{40\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{40}{40} = 1$

Portanto, $\text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{tg } 45° = 1$.

Atividades

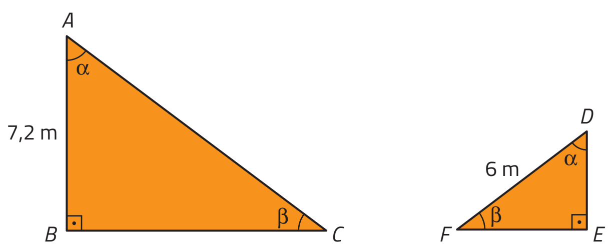
19. Analise o triângulo retângulo representado a seguir e determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α.

$\text{sen } \alpha = \frac{35}{43}$; $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{39}}{43}$; $\text{tg } \alpha = \frac{35\sqrt{39}}{156}$



20. Os triângulos *ABC* e *DEF* representados a seguir são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES



Determine:

triângulo *ABC*: 28,8 m; triângulo *DEF*: 14,4 m

a) o perímetro de cada triângulo;

b) sen α, cos α e tg α;

c) sen β, cos β e tg β.

21. Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo tal que $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$, calcule:

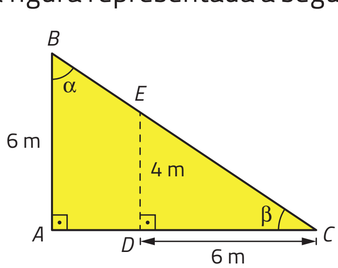
a) sen α; $\frac{12}{13}$

b) cos α; $\frac{5}{13}$

c) $(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$. 1

- Agora, responda: Quantos triângulos retângulos, com um ângulo agudo α cuja $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$, você acredita que possam ser construídos? Resposta esperada: Infinitos triângulos retângulos semelhantes, cujos ângulos agudos medem α e $90° - \alpha$.

22. Analise a figura representada a seguir.



a) Determine tg β. $\text{tg } \beta = \frac{2}{3}$

b) Quanto mede o segmento de reta *AD*? 3 m

c) Qual é a área do triângulo *ABC*? 27 m²

23. Durante um jogo de vôlei de praia, quando a bola estava a uma altura de 3,65 m, um jogador realizou um ataque, que resultou em um ponto para seu time. O trajeto da bola nessa jogada está descrito conforme o esquema a seguir.

ARTUR FUJITA

Considerando $\text{tg } \alpha = 1{,}37$, qual é a distância percorrida pela bola do início do ataque até atingir o solo? aproximadamente 6,19 m

24. Determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos internos agudos de um triângulo retângulo isósceles qualquer.

seno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cosseno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tangente: 1

Dica

Triângulo isósceles é um triângulo que possui ao menos dois lados congruentes.

25. Utilize instrumentos de desenho e represente um triângulo retângulo qualquer. Nesse triângulo, indique os ângulos internos agudos α e β e as medidas de cada lado. Depois, troque seu desenho com um colega e determine o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos α e β indicados no triângulo que você recebeu. Ao final, juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

20. b) $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$

20. c) $\text{sen } \beta = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $\text{tg } \beta = \frac{3}{4}$

Tabela trigonométrica

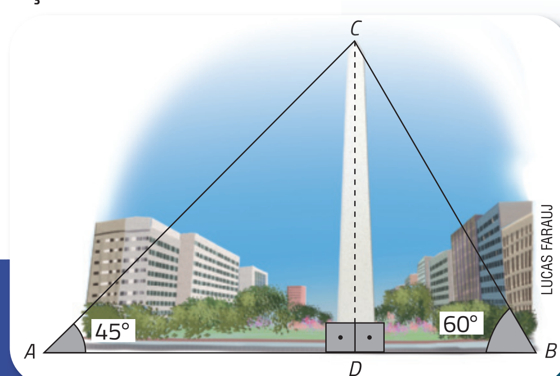
Determinamos nas atividades resolvidas **R6** e **R7** o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Ângulos com essas medidas aparecem frequentemente no estudo da Trigonometria e são denominados **ângulos notáveis**. Podemos organizar tais valores em uma tabela trigonométrica a fim de serem utilizados na resolução de diferentes problemas.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Atividade resolvida

R8. O obelisco de Buenos Aires é considerado um dos principais emblemas da capital argentina. Inaugurado em 1936, o obelisco tem 67,5 m de altura e é, além de um patrimônio histórico de Buenos Aires, um ponto de reunião para manifestações políticas e comemorações.

Considere que no solo sejam marcados os pontos A e B, formando com o ponto mais alto do obelisco (C) ângulos de 45° e 60°, respectivamente, conforme ilustra esta figura ao lado.



Qual é a distância entre os pontos:
a) A e B? **b)** B e C?

Fonte dos dados: BUENOS AIRES CIDADE. **Obelisco**, [20--]. Disponível em: https://turismo.buenosaires.gob.ar/br/otros-establecimientos/obelisco. Acesso em: 16 set. 2019.

Resolução

a) Como $CD = 67{,}5$ m, correspondente à altura do obelisco, e $AB = AD + BD$, temos:

- $\text{tg } 45° = \frac{CD}{AD} \Rightarrow 1 = \frac{67{,}5}{AD} \Rightarrow AD = 67{,}5$
- $\text{tg } 60° = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{67{,}5}{BD} \Rightarrow BD = \frac{67{,}5}{\sqrt{3}} \simeq 38{,}97$
- $AB = AD + BD \Rightarrow AB \simeq 67{,}5 + 38{,}97 \Rightarrow AB \simeq 106{,}47$

Portanto, a distância de A até B é cerca de 106,47 m.

b) Do triângulo BCD, temos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{67{,}5}{BC} \Rightarrow BC = \frac{135}{\sqrt{3}} \simeq 77{,}94$$

Portanto, a distância de B até C é cerca de 77,94 m.

» Monumento histórico em Buenos Aires, Argentina. Fotografia de 2019

Na tabela trigonométrica a seguir, estão organizados os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos de medidas inteiras, em graus, que variam de 1° a 89°.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,331
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	1,000	0,017	57,290

Para pensar

Resposta esperada: Em geral, os valores apresentados na tabela são aproximados para o milésimo mais próximo; enquanto, na calculadora, os valores obtidos são aproximados para mais de três casas decimais.

Escolha três medidas inteiras de ângulos, em graus, e, com uma calculadora científica, determine o seno, o cosseno e a tangente desses ângulos, utilizando as teclas sin, cos e tan. Depois, compare os resultados obtidos com os valores correspondentes na tabela. O que você observa?

Atividade resolvida

R9. A bandeira do Rio Grande do Sul foi adotada como símbolo desse estado brasileiro em 1891.
Essa bandeira deve ter comprimento e largura proporcionais a 200 e 140, respectivamente. A medida do menor lado das regiões triangulares corresponde à metade da largura da bandeira.

Fonte dos dados: RIO GRANDE DO SUL. **Lei n. 5.213, de 5 de janeiro de 1966.** Dispõe sobre a forma e a apresentação dos símbolos do Estado do Rio Grande do Sul e dá outras providências. Rio Grande do Sul: Assembleia Legislativa, 1966. Disponível em: www.al.rs.gov.br/filerepository/repLegis/arquivos/05.213.pdf. Acesso em: 7 set. 2020.

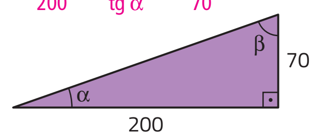

ATLASPIX/SHUTTERSTOCK.COM

Quais são as medidas dos ângulos internos agudos das regiões triangulares que compõem a bandeira do Rio Grande do Sul? Resposta esperada: Porque $\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$.

Resolução

Como essa bandeira deve ter dimensões proporcionais a 200 e 140 e a medida do menor lado da região triangular é proporcional a 70 (140 : 2 = 70), podemos representar uma das regiões triangulares conforme apresentado ao lado:

Resposta esperada: Isso ocorre porque $\text{tg}\,\alpha = \frac{70}{200} \Rightarrow \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{200}{70} = \text{tg}\,\beta$.



Para pensar

Por que podemos afirmar que α e β são ângulos complementares? Você notou que tg α e tg β são números inversos? Por que isso ocorre?

Calculando a tangente dos ângulos internos agudos, obtemos:

- $\text{tg}\,\alpha = \frac{70}{200} = 0{,}35$
- $\text{tg}\,\beta = \frac{200}{70} \simeq 2{,}857$

Podemos consultar a tabela trigonométrica para identificar quais medidas de ângulos α e β mais se aproximam dos valores de tangente encontrados: $\text{tg}\,\alpha = 0{,}35$ e $\text{tg}\,\beta \simeq 2{,}857$.

Nesse caso, temos:

- $\text{tg}\,19° \simeq 0{,}344$ e $\text{tg}\,20° \simeq 0{,}364$; logo $\alpha \simeq 19°$.
- $\text{tg}\,70° \simeq 2{,}747$ e $\text{tg}\,71° \simeq 2{,}904$; logo $\beta \simeq 71°$.

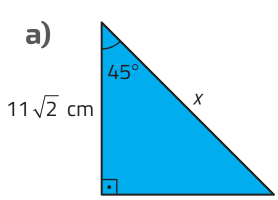
Portanto, as medidas desses ângulos internos são aproximadamente 19° e 71°.

Atividades

Não escreva no livro

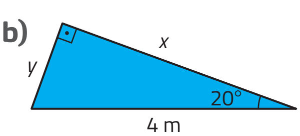
26. Em cada item, determine as medidas x e y.

a)



$x = 22$ cm e $y = 11\sqrt{2}$ cm

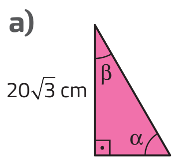
b)



$x \simeq 3{,}76$ m e $y \simeq 1{,}37$ m

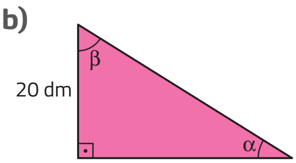
27. Determine as medidas α e β indicadas em cada triângulo representado a seguir.

a)



$\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$

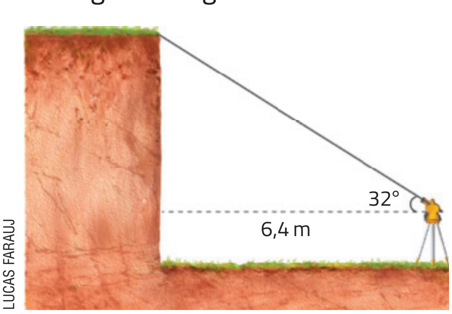
b)



$\alpha \simeq 32°$ e $\beta \simeq 58°$

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

28. Para realizar algumas medições, um topógrafo posicionou um teodolito de 120 cm de altura a 6,4 m de distância de um barranco, conforme mostra a figura a seguir.



LUCAS FARAUJ

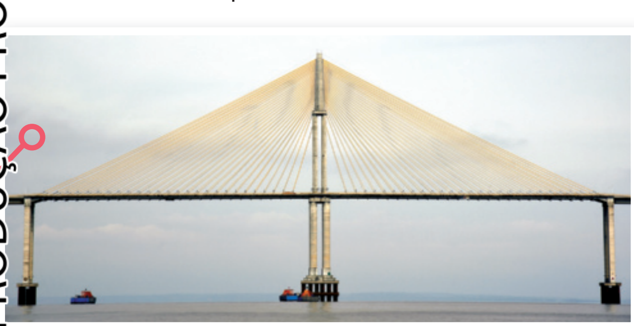
Qual é a altura, em metros, desse barranco, em relação ao plano horizontal sobre o qual está apoiado o teodolito? aproximadamente 5,2 m

29. Na pista de um aeroporto, logo que um avião deixou de tocar o solo na decolagem, seguiu uma trajetória de 2 200 m, que pode ser considerada retilínea, formando um ângulo de 45° com o solo.

a) Represente essa situação por meio de uma figura. Resposta nas **Orientações para o professor**.

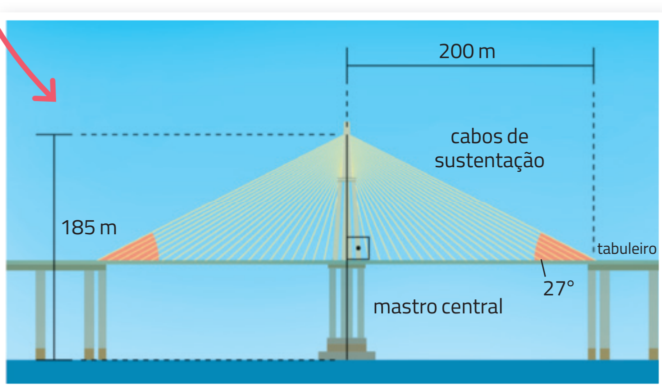
b) A que altura esse avião está, em relação ao solo, após percorrer essa trajetória de 2 200 m? aproximadamente 1 555,63 m

30. A ponte Jornalista Phelippe Daou, em Manaus (AM), foi construída em uma estrutura estaiada, em que cabos de sustentação são fixados do mastro central ao tabuleiro. O mastro central, por sua vez, possui 185 m de altura e apoia dois vãos de 200 m para cada lado. O último cabo de sustentação, com uma das extremidades no topo do mastro central, forma um ângulo de aproximadamente 27° com o tabuleiro. Analise o esquema que representa essa ponte.



ISMAR INGBER/SHUTTERSTOCK.COM

A ponte Jornalista Phelippe Daou é uma ponte estaiada que atravessa o rio Negro, no estado brasileiro do Amazonas. Fotografia de 2015.



ALAN CARVALHO

» Imagem sem escala; cores-fantasia.

Fonte dos dados: AMAZONAS. **Governo do Amazonas inaugura ponte Rio Negro, um marco para a integração da Região Metropolitana de Manaus**. Amazonas, 2011. Disponível em: www.amazonas.am.gov.br/2011/10/governo-do-amazonas-conclui-ponte-rio-negro-um-marco-para-a-integracao-da-regiao-metropolitana-de-manaus. Acesso em: 28 nov. 2019.

31. b) mínimo: aproximadamente 3,89 m; máximo: aproximadamente 5 m

Considerando as informações apresentadas, responda às questões a seguir.

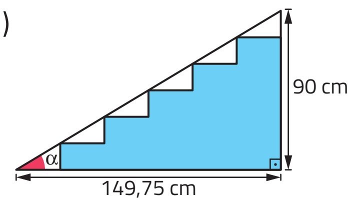
a) Qual é o comprimento do último cabo de sustentação? aproximadamente 224,47 m

b) A quantos metros de altura o topo do mastro central está acima do tabuleiro? aproximadamente 102 m

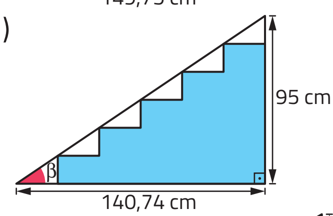
31. Na página **73**, vimos que existem algumas normas da ABNT que devem ser consideradas na construção de escadas. Uma dessas normas indica que a medida do ângulo de inclinação da escada deve ter entre 26,57° e 32,74°.

a) Analise alguns esboços de projetos de construção de escada e identifique aqueles que atendem a essa norma. I e III

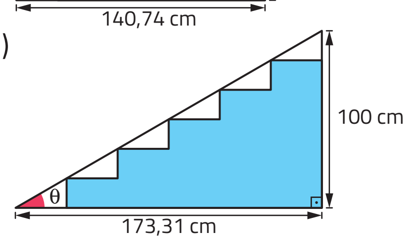
I)



II)



III)



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

b) Uma escada deve ser projetada de maneira a ligar dois pisos de um edifício comercial com desnível de 2,5 m de altura entre eles. Qual deve ser o comprimento mínimo e máximo da projeção horizontal, de maneira que essa escada atenda à norma indicada anteriormente? Considere que os valores aproximados da tangente de 26,57° e 32,74° são, respectivamente, 0,500 e 0,643.

c) Junte-se a um colega e escolham uma escada que eventualmente vocês utilizam no dia a dia. Depois, investiguem se essa escada atende aos padrões de medidas do ângulo de inclinação, do comprimento do piso e da altura do espelho. Ao final, elaborem um relatório com os resultados da investigação e, no caso de não atendimento de algum padrão, proponham adequações que possam ser realizadas.
Resposta pessoal.

32. Uma escada rolante com ângulo de inclinação igual a 32° e extensão de 25 m liga os pisos 1 e 2 de um *shopping center*.

a) Represente essa situação por meio de um desenho. Resposta nas **Orientações para o professor**.

b) Qual é o comprimento da projeção horizontal dessa escada? aproximadamente 21,20 m

c) Quantos metros de altura tem o desnível entre os dois pisos ligados por essa escada? aproximadamente 13,25 m

33. Certo lago tem um trecho em que suas margens são paralelas. Um barco percorreu 136 m em linha reta para ir de uma margem à outra nesse trecho. Considerando que a trajetória realizada pelo barco formou um ângulo de 45° com a margem de partida, determine a largura do lago nesse trecho. aproximadamente 96,17 m

34. Uma pessoa observou o topo de um edifício de 16 andares sob um ângulo de 28° em relação à horizontal. Considerando que a altura dos olhos dessa pessoa até o solo seja de 1,5 m e que cada andar desse edifício tem 3 m de altura, determine a quantos metros do edifício essa pessoa se encontra. aproximadamente 87,4 m

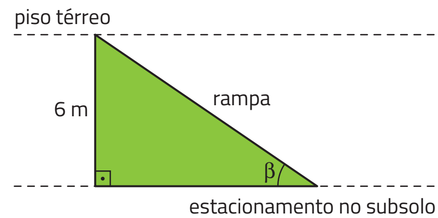
35. Um poste de 15 m de altura instalado em solo plano projeta, em diferentes momentos do dia, sombras com comprimentos distintos. Determine a medida do ângulo que os raios solares formam com o solo, quando a sombra tiver:

a) 9 m de comprimento; aproximadamente 59°

b) 18 m de comprimento; aproximadamente 40°

c) 15 m de comprimento. 45°

36. No croqui de construção de determinado prédio, foi projetado um estacionamento no subsolo. Para ligar o piso térreo ao estacionamento, será necessária a construção de uma rampa, conforme representado a seguir.



CBOOK PRODUÇÕES

Nesse croqui, foi indicado que o ângulo de inclinação dessa rampa deverá ter medida entre 29° e 37°. Quantos metros de extensão, aproximadamente, poderá ter essa rampa? de 10 m até 12,4 m

37. Para investigar relações entre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos menores do que 90°, Mônica utilizou uma planilha eletrônica. Junte-se a um colega e analisem partes dessa planilha.

A	B	C	D	E	F	G
	Seno		**Cosseno**		**Tangente**	
α (em graus)	**sen α**	**sen (90° − α)**	**cos α**	**cos (90° − α)**	**tg α**	**tg (90° − α)**
1	0,017	1,000	1,000	0,017	0,017	57,290
2	0,035	0,999	0,999	0,035	0,035	28,636
3	0,052	0,999	0,999	0,052	0,052	19,081
4	0,070	0,998	0,998	0,070	0,070	14,301
40	0,643	0,766	0,766	0,643	0,839	1,192
41	0,656	0,755	0,755	0,656	0,869	1,150
42	0,669	0,743	0,743	0,669	0,900	1,111
43	0,682	0,731	0,731	0,682	0,933	1,072

LIBREOFFICE CALC

a) Com base nas informações apresentadas, elaborem conjecturas estabelecendo uma relação entre:

- o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo;
- o seno e o cosseno de ângulos complementares.

b) Agora, tentem demonstrar matematicamente as conjecturas que vocês indicaram no item anterior. Se julgarem necessário, podem representar um triângulo retângulo. Resposta pessoal.

Dica

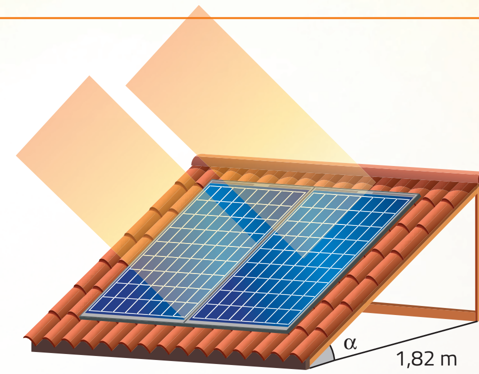
Dizemos que dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90°.

37. a) Respostas esperadas: $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, com $0° < \alpha < 90°$; $\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$, com $0° < \alpha < 90°$.

38. Um painel solar fotovoltaico é utilizado para converter energia solar em energia elétrica, sendo uma opção sustentavelmente favorável ao meio ambiente. A inclinação com a qual esse painel é instalado influencia na qualidade da obtenção da energia solar. Leia o texto a seguir.

> [...]
>
> [...] para maximizar o aproveitamento da radiação solar, pode-se ajustar a posição do coletor ou painel solar de acordo com a latitude local e o período do ano em que se requer mais energia. No Hemisfério Sul, por exemplo, um sistema de captação solar fixo deve ser orientado para o Norte, com ângulo de inclinação similar ao da latitude local.
>
> [...]

BRASIL. Agência Nacional de Energia Elétrica. Ministério de Minas e Energia. **Energia solar**. Brasília, DF, [20--]. Disponível em: www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia_Solar(3).pdf. Acesso em: 3 out. 2019.



BENTINHO

» Representação de um painel solar fotovoltaico (imagem sem escala; cores-fantasia).

JACOB_09/SHUTTERSTOCK.COM

O painel solar representado anteriormente é composto por duas placas retangulares de dimensões 1 m e 2 m e foi instalado sobre uma superfície plana seguindo as orientações indicadas no texto acima.

a) Qual é a área desse painel solar? $4\ m^2$

b) Analise as coordenadas geográficas de alguns municípios brasileiros (latitude e longitude) e indique em qual deles é mais provável que esse painel solar tenha sido instalado. Justifique sua resposta. Guarapuava (PR)

- Manaus (AM): 3° 6′ 26′ S e 60° 1′ 34′ O.
- Salvador (BA): 12° 58′ 13′ S e 38° 30′ 45′ O.
- Guarapuava (PR): 25° 23′ 42′ S e 51° 27′ 28′ O.
- Palmas (TO): 10° 10′ 8′ S e 48° 19′ 54′ O.

c) Pesquise a coordenada geográfica do município onde você vive e calcule a altura recomendada para um suporte de painel solar, semelhante ao apresentado no enunciado. Resposta pessoal.

d) Agora, realize uma pesquisa sobre o que é importante considerar antes de instalar um sistema de energia solar, como as condições necessárias para a instalação e seu uso, vantagens, custos, eficiência, manutenção, entre outros. Em seguida, escreva um texto apresentando sua opinião e justificativas para responder à seguinte pergunta: Resposta pessoal.

É vantajoso investir na instalação de um sistema de energia solar residencial?

Conexões

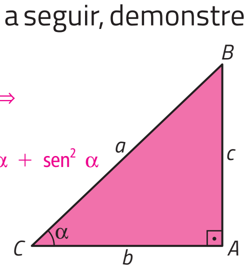
Acesse o programa SunData para descobrir a média mensal de irradiação solar diária em qualquer região do território nacional a partir de suas coordenadas geográficas:

- CRESESB. **Potencial Solar – SunData v 3.0**. Rio de Janeiro, c2014. Disponível em: www.cresesb.cepel.br/index.php?section=sundata. Acesso em 27 maio 2020.

39. Considerando o triângulo retângulo a seguir, demonstre que $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, com $0° < \alpha < 90°$.

Resposta esperada: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow 1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha$



CBOOK PRODUÇÕES

Dica

Para realizar essa demonstração, é possível utilizar o teorema de Pitágoras.

Acessibilidade

O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2** e **7**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Leia o texto a seguir.

Acessibilidade, direito de todos de ir e vir

[...]

Desenvolver a acessibilidade em um ambiente é promover condições de mobilidade com autonomia, eliminando as barreiras arquitetônicas e urbanísticas nas cidades. A acessibilidade é um direito de todos, de ir e vir, uma conquista social salientando a cidadania de cada um.

Quando um espaço é construído acessível [...] é capaz de oferecer oportunidades iguais a todos. [...] Devemos lembrar que a dificuldade não é só ao usuário de cadeiras de rodas.

Existem pessoas com mobilidade reduzida e temporária, gerada por diversos fatores, tais como: idade, gravidez, deficiência auditiva ou visual e acidentes [...]

[...]

ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

» Calçada acessível, com piso tátil e guia rebaixada. Fotografia de 2018.

CREA-SC. **Acessibilidade, direito de todos de ir e vir**. Santa Catarina, 2010. Disponível em: www.crea-sc.org.br/portal/index.php?cmd=artigos-detalhe&id=1056#.XY30bChKjIV. Acesso em: 7 set. 2020.

Observe a seguir o artigo 20 do Decreto nº 5.296, de 2004, que regulamenta as leis nº 10.048 e nº 10.098, as quais estabelecem diretrizes para acessibilidade em contextos sociais distintos.

[...]

Art. 20. Na ampliação ou reforma das edificações de uso público ou de uso coletivo, os desníveis das áreas de circulação internas ou externas serão transpostos por meio de rampa ou equipamento eletromecânico de deslocamento vertical, quando não for possível outro acesso mais cômodo para pessoa portadora de deficiência ou com mobilidade reduzida, conforme estabelecido nas normas técnicas de acessibilidade da ABNT.

[...]

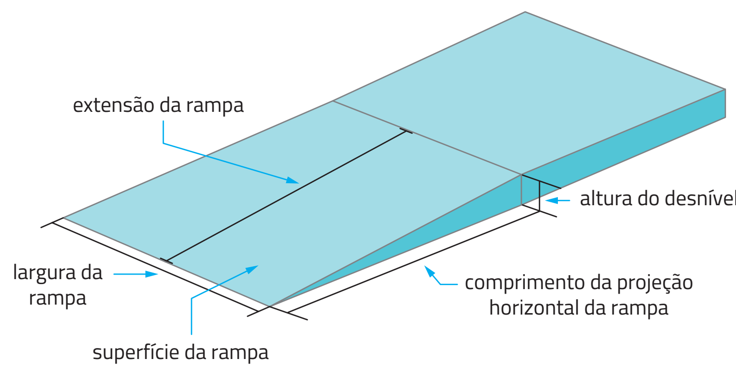
BRASIL. **Decreto n. 5.296 de 2 de dezembro de 2004**. Brasília, DF: Presidência da República, 2004. Disponível em: www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2004/Decreto/D5296.htm. Acesso em: 16 jun. 2020.

» Rampa de acesso.

RIOPATUCA/SHUTTERSTOCK.COM

Uma das maneiras de contribuir com a acessibilidade é a disponibilização de rampas em prédios públicos, o que possibilita o acesso de pessoas com mobilidade reduzida. A norma NBR 9050, da Associação Brasileira de Normas Técnicas, visa estabelecer parâmetros para adaptação de espaços urbanos, entre eles a inclinação máxima que rampas como essa devem ter.

Considerando alguns fatores, é estabelecido que a inclinação da rampa (α), que corresponde à razão entre a altura do desnível (d) e o comprimento da projeção horizontal da rampa (c), não deve ultrapassar 8,33% ou 0,0833. Analise o esquema.



EDITORIA DE ARTE

- Consideram-se rampas as inclinações da superfície de piso que possuem declividade maior ou igual a 5%.
- A largura livre mínima recomendável para rampas é de 1,50 m. A largura mínima admissível é de 1,20 m.

Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9050**: acessibilidade a edificações, mobiliários, espaços e equipamentos urbanos, 2004. Disponível em: https://aeap.org.br/wp-content/uploads/2019/10/nbr_9050_2004_acessibilidade.pdf. Acesso em: 28 maio 2020.

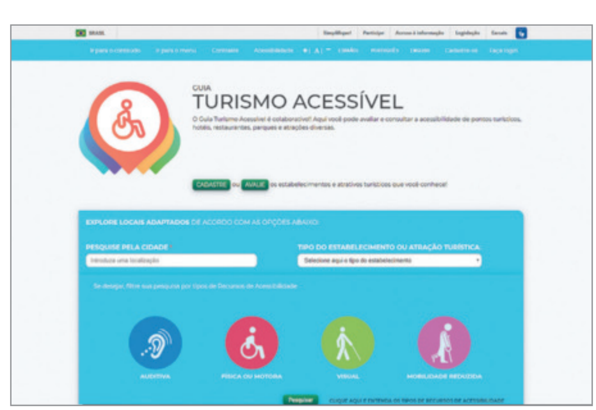
Sendo assim, para construir, por exemplo, uma rampa para vencer um desnível de 0,5 m de altura, o comprimento mínimo da projeção horizontal deve ser de 6 m aproximadamente, pois:

$$\frac{d}{c} = \alpha \Rightarrow \frac{d}{c} = 0{,}0833 \Rightarrow \frac{0{,}5}{c} = 0{,}0833 \Rightarrow c \simeq 6$$

Conexões

Acesse este *site* para consultar estabelecimentos ou locais com atrações turísticas de seu município, ou próximo dele, que possuam acessibilidade adequada para pessoas com deficiência:

- BRASIL. Ministério do Turismo. **Guia Turismo Acessível**. Brasília, DF, [20--]. Disponível em: https://turismoacessivel.gov.br. Acesso em: 22 abr. 2020.



MINISTÉRIO DO TURISMO/GOVERNO FEDERAL

» O **Guia Turismo Acessível** é colaborativo e permite, após realizar um cadastro no *site*, avaliar e cadastrar estabelecimentos de acordo com seu nível de acessibilidade.

GREENMAX/SHUTTERSTOCK.COM

1. Algumas respostas possíveis: Construção de rampas; instalação de elevadores; adaptação de banheiros; aplicação de piso tátil em calçadas; disponibilização de transporte coletivo adaptado; instalação de semáforo sonoro; estabelecimento de vagas especiais em estacionamentos. Resposta pessoal.

2. Resposta esperada: As normas de acessibilidade estabelecem critérios e parâmetros técnicos para garantir que diferentes construções e espaços sejam acessíveis à maior quantidade possível de pessoas. Resposta pessoal.

Pensando no assunto

Não escreva no livro

1. Cite algumas melhorias que podem ser realizadas para tornar uma cidade mais acessível para pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida. Depois, explique como essas melhorias podem contribuir com uma sociedade mais justa e inclusiva.

2. O que as normas de acessibilidade buscam garantir? Você conhece outras normas de acessibilidade além da apresentada? Se necessário, faça uma pesquisa.

3. Na página anterior, está sugerido o acesso ao **Guia Turismo Acessível**, *site* que procura contribuir com a inclusão de pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida em atividades turísticas de todo país.

a) Acesse esse *site* e descreva algumas ferramentas que são disponibilizadas.

b) Pense em sugestões ou ferramentas que poderiam incrementar os recursos já disponibilizados nesse *site*, de modo a contribuir ainda mais para a divulgação de informações acerca de estabelecimentos, eventos e atrações turísticas com acessibilidade adequada. Depois compartilhe suas ideias com os colegas. Resposta pessoal.

c) Você conhece outros *sites* ou algum aplicativo voltado para questões relacionadas à acessibilidade e à inclusão social? Cite alguns e comente sobre como eles funcionam. Se necessário, faça uma pesquisa. Resposta pessoal.

4. Em um prédio público, há uma rampa de acesso com 10 m de projeção horizontal e 1 m de altura de desnível. Essa rampa atende ao padrão estabelecido pela norma NBR 9050? Justifique.

4. Resposta esperada: Não, pois a norma estabelece que a inclinação da rampa não deve ultrapassar 0,0833 (8,33%) e, nesse caso, a inclinação é de 0,1 (10%).

5. a) Resposta nas **Orientações para o professor**.

5. Com base nas informações apresentadas, resolva os itens a seguir.

a) Represente uma rampa por um triângulo retângulo. Indique o ângulo de inclinação da rampa por α, a altura do desnível por d e o comprimento da projeção horizontal por c.

b) Determine a medida máxima do ângulo α de inclinação que deve ter uma rampa dessas. Se necessário, consulte a tabela trigonométrica. $\alpha \simeq 5°$

6. Nesta questão, exploraremos a seguinte situação problema.

As rampas nos prédios públicos atendem ao padrão de inclinação estabelecido pela norma NBR 9050?

Junte-se a três colegas e façam o que se pede em cada um dos itens.

a) Com base nessa norma, podemos organizar em um quadro o comprimento horizontal (c) mínimo aproximado, em metro, que deve ter uma rampa de acordo com a altura do desnível (d), em metro. Copiem o quadro a seguir e completem-no.

d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
c	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4	9,6

Fonte: Dados fictícios.

b) Agora, vamos investigar! Resposta pessoal.

Escolham três prédios públicos do município em que moram e que tenham rampas de acesso para desnível de até 0,8 m de altura. Com uma trena, meçam a projeção do comprimento horizontal (c) e a altura do desnível (d) de cada uma dessas rampas e registrem. Utilizando esses dados, o quadro do item anterior e as informações apresentadas até aqui, analisem se cada uma dessas rampas atende ao padrão de inclinação estabelecido pela norma NBR 9050.

Resposta pessoal.

c) Produzam um relatório sobre as rampas analisadas, com informações como: prédio público a que pertencem, medidas obtidas, resultados da investigação (atende ou não ao padrão da norma), entre outras. Ao final, proponham algumas ações para melhoria da acessibilidade nos prédios escolhidos.

3. a) Algumas respostas possíveis: Consulta a locais de acordo com o município, tipo de estabelecimento ou atração turística, ou tipo de recurso de acessibilidade; cadastro ou avaliação de um estabelecimento ou atração turística; acesso a materiais sobre o Programa Turismo Acessível, direitos da pessoa com deficiência, informações para estabelecimentos, entre outras.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Relações trigonométricas em um triângulo qualquer

Até aqui, vimos as razões trigonométricas em situações envolvendo triângulos retângulos. É importante destacar que, nesses casos, foram determinados o seno, o cosseno e a tangente de ângulos agudos.

Agora, para estudarmos as razões trigonométricas em um triângulo qualquer, precisamos compreender inicialmente o cálculo do seno e do cosseno de ângulos obtusos. Para isso, é necessário considerar que dado um ângulo obtuso de medida α, com $90° < \alpha < 180°$, temos:

- $\boxed{\text{sen } 90° = 1}$
- $\boxed{\cos 90° = 0}$
- $\boxed{\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)}$
- $\boxed{\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)}$

Dica

Dizemos que dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180°.

Dica

As justificativas das relações em destaque serão apresentadas e discutidas na Unidade **3**.

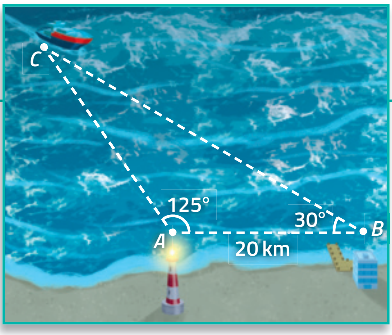
O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar.
O cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

Analise alguns exemplos.

- $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\cos 150° = -\cos (180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\text{sen } 165° = \text{sen } (180° - 165°) = \text{sen } 15° \simeq 0{,}259$;
- $\cos 131° = -\cos (180° - 131°) = -\cos 49° \simeq -0{,}656$.

Lei dos senos

Leia a situação a seguir.



ARTUR FUJITA

Em uma noite de mar agitado, um navio com problema em seus instrumentos de localização pediu ajuda via rádio ao centro de comando do cais de uma região portuária localizado na encosta (ponto *B*). Os técnicos do porto verificaram que o navio estava localizado 60° à esquerda do cais. Para confirmarem a localização do navio, contataram o faroleiro para saber se ele conseguia determinar com precisão a distância do navio até o porto. Com o auxílio de um sextante, o faroleiro verificou que o navio estava localizado 35° à esquerda do farol (ponto *A*).

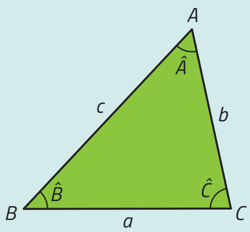
Sabendo que a distância entre o farol e o porto era de 20 km, como o faroleiro pode calcular a distância do navio até o porto a partir das informações obtidas?

Para resolvermos essa situação, podemos utilizar a relação apresentada a seguir, denominada **lei dos senos**.

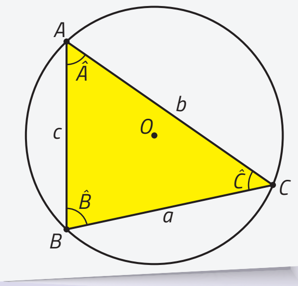
Lei dos senos

Dado um triângulo ABC qualquer, a medida dos lados é proporcional aos senos dos ângulos internos opostos correspondentes.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



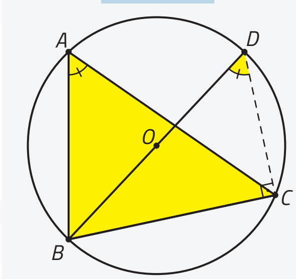
Para demonstrar a lei dos senos, temos de considerar um triângulo ABC qualquer inscrito em uma circunferência de centro O e raio r.



Dica

Note que, se o triângulo é inscrito na circunferência, então a circunferência é circunscrita ao triângulo.

Ao traçarmos um diâmetro $\overline{BD}$ obtemos $B\hat{A}C \equiv B\hat{D}C$, que são os ângulos inscritos na circunferência correspondentes ao mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$. Além disso, temos que o triângulo BCD é retângulo em C, pois é um triângulo inscrito em uma semicircunferência.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Assim, temos:

$$\operatorname{sen}(B\hat{D}C) = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}$$

De maneira análoga, podemos determinar que:

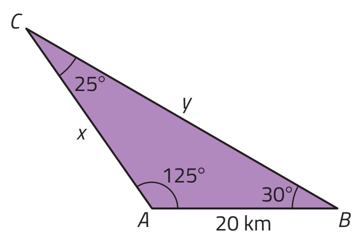
- $2r = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$;
- $2r = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$.

Para pensar Resposta pessoal.

Faça desenhos no caderno e realize argumentações para verificar as igualdades ao lado.

Com isso, concluímos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



Em relação à situação apresentada na página anterior, temos que $A\hat{C}B$ mede 25°, pois $180° - (125° + 30°) = 25°$. Assim, utilizando a lei dos senos e consultando a tabela trigonométrica, temos:

- $\dfrac{x}{\operatorname{sen}30°} = \dfrac{20}{\operatorname{sen}25°} \Rightarrow \dfrac{x}{0{,}5} \simeq \dfrac{20}{0{,}423} \Rightarrow x \simeq \dfrac{20 \cdot 0{,}5}{0{,}423} \Rightarrow x \simeq 23{,}64$.
- $\dfrac{y}{\underbrace{\operatorname{sen}125°}_{\operatorname{sen}55°}} = \dfrac{20}{\operatorname{sen}25°} \Rightarrow \dfrac{y}{0{,}819} \simeq \dfrac{20}{0{,}423} \Rightarrow y \simeq \dfrac{20 \cdot 0{,}819}{0{,}423} \Rightarrow y \simeq 38{,}72$.

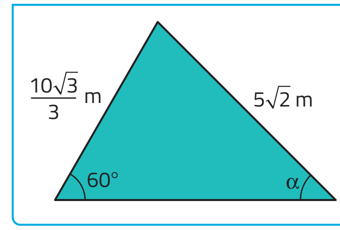
Portanto, a distância do navio ao farol era de aproximadamente 23,64 km e, do navio ao porto, de aproximadamente 38,72 km.

Dica

Note que:
$\operatorname{sen}125° = \operatorname{sen}(180° - 125°) = \operatorname{sen}55°$.

Atividades resolvidas

R10. Analise o triângulo representado ao lado e determine a medida do ângulo α.



Resolução

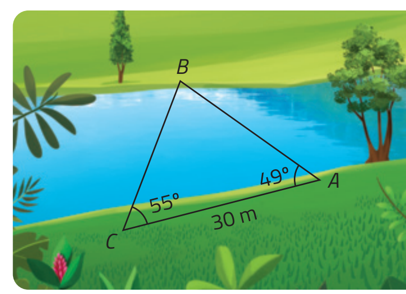
Utilizando a lei dos senos, temos:

$$\frac{5\sqrt{2}}{\text{sen } 60°} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow 5\sqrt{2} \cdot \text{sen } \alpha = \underbrace{\text{sen } 60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{2} \cdot \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = 5 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Consultando a tabela trigonométrica para os ângulos notáveis, temos sen 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $\alpha = 45°$.

R11. Um topógrafo precisava determinar a distância entre os pontos A e B situados nas margens opostas de um rio. Para isso, a partir de A, ele andou 30 m em linha reta até um ponto C. Após isso, mediu com um teodolito os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ obtendo 49° e 55°, respectivamente. Qual é a distância entre os pontos A e B?



Resolução

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos que a medida x do ângulo $A\hat{B}C$ é dada por:

$$x + 55° + 49° = 180° \Rightarrow x = 180° - 104° \Rightarrow x = 76°$$

Assim, utilizando a lei dos senos e consultando a tabela trigonométrica, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 55°} = \frac{30}{\text{sen } 76°} \Rightarrow \frac{AB}{0{,}819} \cong \frac{30}{0{,}970} \Rightarrow 0{,}970 \cdot AB \cong 24{,}57 \Rightarrow AB \simeq 25{,}33$$

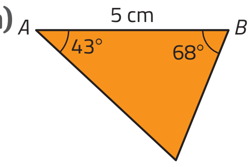
Portanto, a distância entre os pontos A e B é de aproximadamente 25,33 m.

Atividades

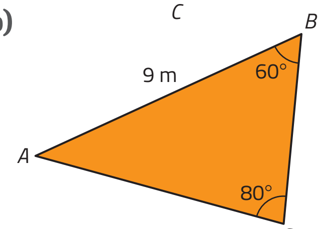
Não escreva no livro

40. Determine o perímetro de cada triângulo representado a seguir.

a) aproximadamente 13,61 cm



b) aproximadamente 22,79 m

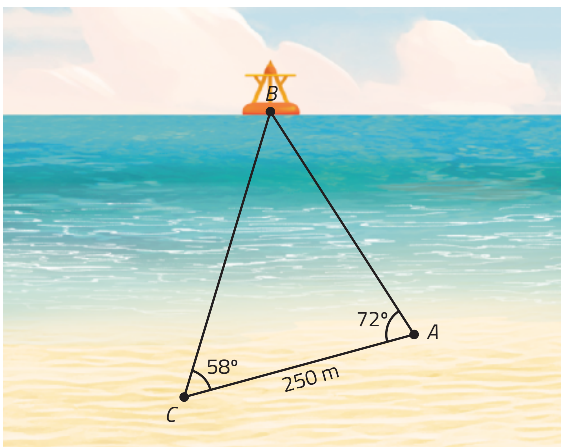


41. Em um trecho de um rio, as margens são paralelas e a distância de um lado até o outro é 259 m. Um pescador pretendia atravessar esse trecho de barco, em linha reta, partindo de um ponto A e chegando a um ponto B. Porém, devido à correnteza, o pescador seguiu um trajeto retilíneo entre os pontos A e C e, em seguida, entre os pontos C e B, de maneira a formar os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ com 54° e 65°, respectivamente.

a) Represente por meio de uma figura a situação descrita anteriormente. Resposta nas **Orientações para o professor**.

b) Qual é a distância aproximada percorrida pelo pescador ao atravessar o rio? 481,41 m

42. Para alertar os banhistas de uma praia sobre os riscos da prática de natação naquele trecho, foi utilizada uma boia de sinalização náutica. Para calcular a distância de um ponto *A* na praia até essa boia (ponto *B*), um salva-vidas caminha 250 m em linha reta, de *A* até um ponto *C*, e determina as medidas dos ângulos $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}C$ utilizando um medidor de ângulos a *laser*. Analise a figura e determine a distância do ponto *A* até essa boia. aproximadamente 276,76 m

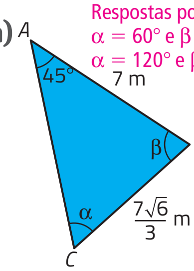


BENTINHO

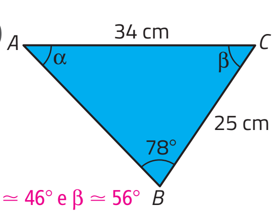
43. Em cada triângulo, determine as medidas dos ângulos internos α e β.

a)

Respostas possíveis:
$\alpha = 60°$ e $\beta = 75°$ ou
$\alpha = 120°$ e $\beta = 15°$

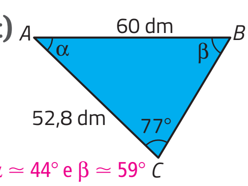


b)



$\alpha \simeq 46°$ e $\beta \simeq 56°$

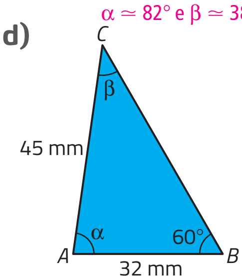
c)



$\alpha \simeq 44°$ e $\beta \simeq 59°$

d)

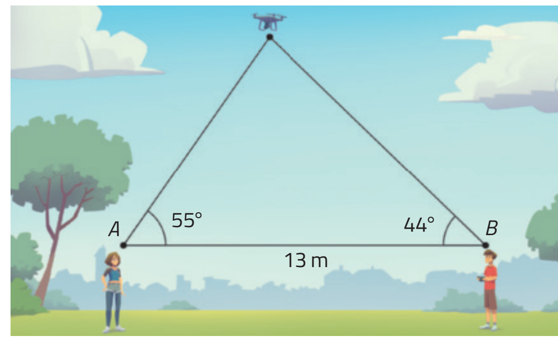
$\alpha \simeq 82°$ e $\beta \simeq 38°$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

44. Junte-se a um colega e elaborem um problema contextualizado em que seja necessário utilizar a lei dos senos para resolvê-lo. Esse problema pode conter uma figura. Em seguida, troquem esse problema com o de outra dupla para que uma resolva o da outra. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas.
Resposta pessoal.

45. Maurício e Pamela estão a 13 m de distância um do outro e ambos estão observando um *drone* no alto. Maurício o vê sob um ângulo de 44° e Pamela vê o mesmo *drone* sob um ângulo de 55°, conforme a figura a seguir.

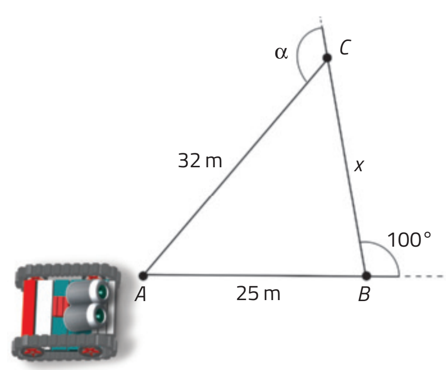


ALAN CARVALHO

A que distância do *drone* estavam Maurício e Pamela? Maurício: aproximadamente 10,78 m; Pamela: aproximadamente 9,14 m

46. Para participar de uma prova em uma competição de robótica, os integrantes de uma equipe devem programar seu robô para realizar as etapas descritas a seguir.
Analise o esquema.

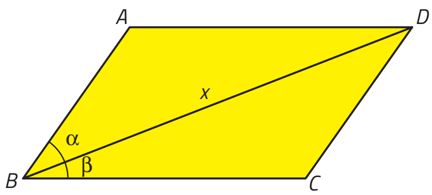
1. O robô, a partir de um ponto *A* estabelecido em uma superfície plana, deve se deslocar 25 m em linha reta até o ponto *B*;
2. Deve realizar um giro de 100°, no sentido anti-horário, e se deslocar *x* metros em linha reta até um ponto *C*;
3. A partir de *C*, o robô tem de realizar o menor giro possível, correspondente a um ângulo α, e se deslocar 32 m em linha reta até retornar ao ponto *A*.



LUCAS FARAUJ

Determine a medida *x* e construa, no caderno, um fluxograma para descrever como esse robô deve ser programado para realizar todas as etapas dessa prova.
$x = 25$ m; Resposta nas **Orientações para o professor**.

47. Observe a representação de um paralelogramo com diagonal de comprimento x.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Qual dos itens a seguir expressa a medida do lado $\overline{AB}$ desse paralelogramo? alternativa **a**

a) $\dfrac{x \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

b) $\dfrac{x \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(180 - \beta)}$

c) $\dfrac{x \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(180 - \alpha)}$

d) $\dfrac{x \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

48. (UFSM-RS) A figura a seguir representa o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.

UFSM

http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\widehat{A}$ mede 45° e o ângulo $\widehat{C}$ mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é: alternativa **b**

a) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

b) $4\sqrt{6}$

c) $8\sqrt{2} + \sqrt{3}$

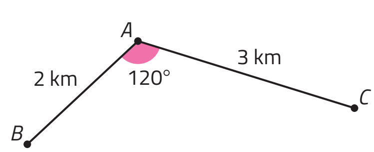
d) $8\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Lei dos cossenos

Leia a situação a seguir.

Em uma propriedade rural, são criados peixes em três tanques: A, B e C. Há tubulações lineares que conectam os tanques A e B e os tanques A e C, conforme ilustra a figura a seguir. Quantos metros de tubulação linear são necessários para conectar os tanques B e C?



Em situações como essa, podemos utilizar a denominada **lei dos cossenos**, enunciada a seguir.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

» Tanque de piscicultura. em propriedade rural. Iconha (ES). Fotografia de 2019.

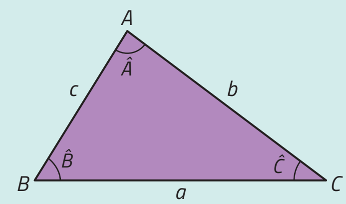
Lei dos cossenos

Dado um triângulo *ABC* qualquer, temos que o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto da medida desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

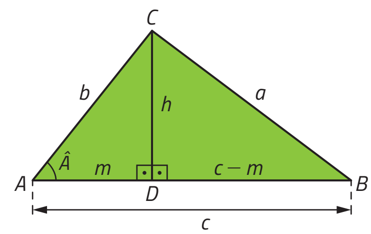
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}$$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos acutângulos, consideramos um triângulo acutângulo *ABC* qualquer, com altura de medida h em relação ao lado $\overline{AB}$, conforme segue ao lado.



De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

- no triângulo *BDC*: $a^2 = h^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2$ **(I)**
- no triângulo *CDA*: $b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$ **(II)**

Dica

Triângulo acutângulo é um triângulo em que todos os ângulos internos são agudos.

Substituindo **II** em **I**, segue que:

$$a^2 = \underbrace{(b^2 - m^2)}_{h^2} + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad \textbf{(III)}$$

No triângulo retângulo *ACD*, temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad \textbf{(IV)}$$

Substituindo **IV** em **III**, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \underbrace{b \cdot \cos \hat{A}}_{m} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

De maneira análoga, podemos verificar que:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$.

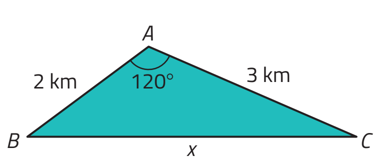
Resposta pessoal.

Para pensar

Junte-se a um colega e, no caderno, demonstrem as igualdades ao lado.

Procedimentos parecidos permitem demonstrar a lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos quaisquer.

Em relação à situação envolvendo os três tanques de peixe, temos:



Dica

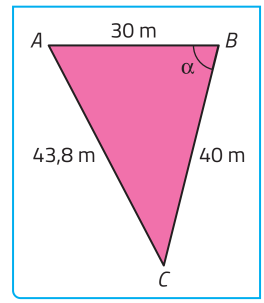
Triângulo obtusângulo é um triângulo em que um dos ângulos internos é obtuso. Triângulo retângulo é um triângulo em que um dos ângulos internos é reto.

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120° \Rightarrow x^2 = 4 + 9 - 12 \cdot (-\cos 60°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x = \pm\sqrt{19} \Rightarrow \begin{cases} x \simeq -4{,}36 \text{ (não convém)} \\ \quad \text{ou} \\ x \simeq 4{,}36 \end{cases}$$

Portanto, são necessários cerca de 4,36 km de tubulação linear para conectar os tanques B e C.

Atividades resolvidas



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

R12. Determine a medida α do ângulo interno destacado no triângulo.

Resolução

Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$(43{,}8)^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,918{,}44 = 1\,600 + 900 - 2\,400 \cdot \cos \alpha \Rightarrow 1\,918{,}44 - 2\,500 = -2\,400 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{-581{,}56}{-2\,400} \simeq 0{,}242$

Consultando a tabela trigonométrica, identificamos que $\cos 76° \simeq 0{,}242$. Portanto, $\alpha \simeq 76°$.

R13. O proprietário de um terreno de formato triangular pretende instalar uma cerca elétrica sobre o muro que contorna toda a propriedade. Observe a seguir os orçamentos realizados por duas empresas para a instalação dessa cerca.

empresa **A**

Taxa fixa de R$ 200,00 mais R$ 12,60 por metro de cerca.

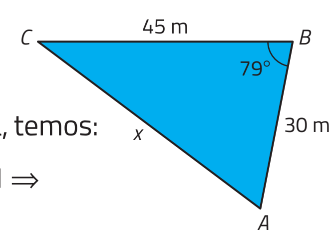
empresa **B**

Taxa fixa de R$ 300,00 mais R$ 11,20 por metro de cerca.

Sabendo que dois lados desse terreno medem 45 m e 30 m e que esses lados formam um ângulo de 79°, determine qual dos dois orçamentos apresenta o menor preço para a instalação dessa cerca.

Resolução

Podemos representar esse terreno por um triângulo *ABC*, conforme segue ao lado:



Utilizando a lei dos cossenos e consultando a tabela trigonométrica, temos:

$x^2 = 45^2 + 30^2 - 2 \cdot 45 \cdot 30 \cdot \cos 79° \Rightarrow x^2 \cong 2\,925 - 2\,700 \cdot 0{,}191 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 \cong 2\,409{,}3 \Rightarrow x \cong \pm\sqrt{2\,409{,}3} \Rightarrow \begin{cases} x \simeq 49{,}08 \\ \quad \text{ou} \\ x \simeq -49{,}08 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, o perímetro do terreno é aproximadamente 124,08 m, pois $45 + 30 + 49{,}08 = 124{,}08$.

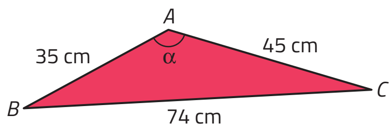
Calculando o valor de cada orçamento, temos:

- Empresa **A**: $200 + 12{,}60 \cdot 124{,}08 \simeq 1\,763{,}41$; ou seja, R$ 1.763,41;
- Empresa **B**: $300 + 11{,}20 \cdot 124{,}08 \simeq 1\,689{,}70$; ou seja, R$ 1.689,70.

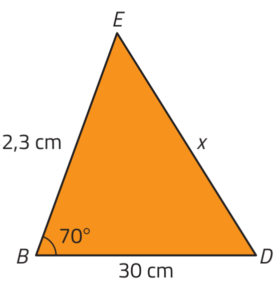
Portanto, o orçamento da empresa **B** apresenta o menor preço para a instalação dessa cerca.

Atividades

49. Determine a medida do ângulo α em destaque.
135°

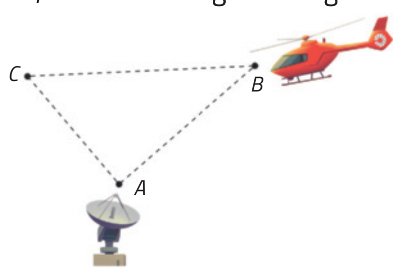


50. Determine a medida de *x* indicada a seguir.
aproximadamente 35,78 cm



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

51. Um radar, posicionado em um ponto *A* no solo, detectou um helicóptero em dois momentos distintos, quando estava em uma localização identificada pelo ponto *B* e depois em outro ponto *C*, conforme a figura a seguir.



ALAN CARVALHO

Considerando que esse helicóptero seguiu uma trajetória retilínea de *B* até *C* e que $AB = 150$ m, $AC = 118{,}2$ m e o ângulo formado entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ mede 88°, faça o que se pede nos itens a seguir. Se necessário, utilize uma calculadora.

a) Calcule a distância percorrida pelo helicóptero de *B* até *C*; aproximadamente 187,7 m

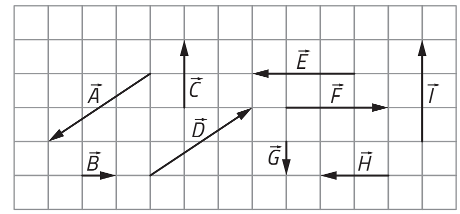
b) Determine a medida dos ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{B}C$.
med($A\hat{C}B$) $\simeq$ 53° e med($A\hat{B}C$) $\simeq$ 39°

52. Um triângulo possui seu maior ângulo interno medindo 120° e as medidas de seus lados formam, em centímetros, uma PA de razão 2. Qual é o perímetro desse triângulo? 15 cm

53. As grandezas vetoriais são aquelas que, além de serem representadas por um valor numérico e uma unidade, também possuem direção e sentido. Por exemplo, as grandezas: velocidade, deslocamento, força, aceleração, entre outras.

Fonte dos dados: HALLIDAY, D. *et al.* **Fundamentos de física**. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016. p. 114. v. 1.

a) Analise os vetores representados a seguir e resolva as questões.

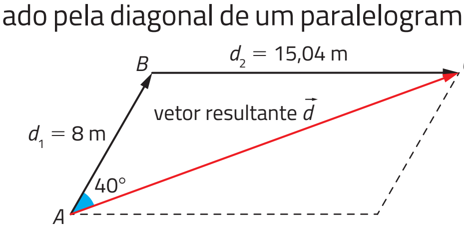


Quais desses vetores têm:

- a mesma direção? $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{F}$ e $\vec{H}$; $\vec{A}$ e $\vec{D}$; $\vec{C}$, $\vec{G}$ e $\vec{I}$
- o mesmo sentido? $\vec{B}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}$ e $\vec{H}$; $\vec{C}$ e $\vec{I}$
- o mesmo módulo (ou valor numérico)? $\vec{A}$ e $\vec{D}$; $\vec{B}$ e $\vec{G}$; $\vec{C}$ e $\vec{H}$; $\vec{E}$, $\vec{F}$ e $\vec{I}$

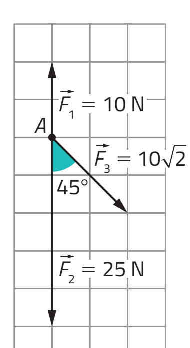
b) Quando duas forças que atuam sobre uma partícula têm mesma direção e sentidos opostos, o valor numérico do vetor resultante é dado pela diferença entre essas forças, em valores absolutos. Represente duas forças, F_1 e F_2, por vetores com mesma direção, sentidos opostos e com módulos respectivamente iguais a 45 N e 25 N. Em seguida, represente o vetor resultante dessas forças e seu módulo. Resposta nas **Orientações para o professor**.

c) Suponha que uma partícula se desloque de *A* para *B* e depois de *B* para *C*, conforme a figura a seguir. Podemos representar o deslocamento total do percurso pelo vetor resultante, cujo valor numérico (módulo) é dado pela diagonal de um paralelogramo.



Para a situação descrita anteriormente, determine o valor numérico (módulo) do vetor resultante $\vec{d}$. $d \simeq 20{,}26$ m

d) Uma partícula **A** está sob ação de três forças conforme o esquema ao lado. Reproduza esse esquema em uma malha quadriculada ou em um programa de computador e represente o vetor resultante dessas forças e o módulo dele. Resposta nas **Orientações para o professor**.

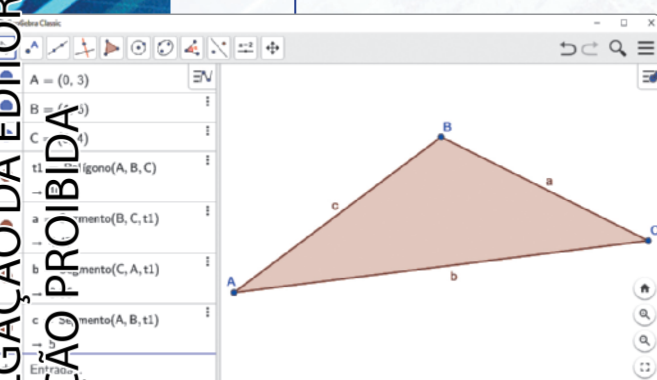


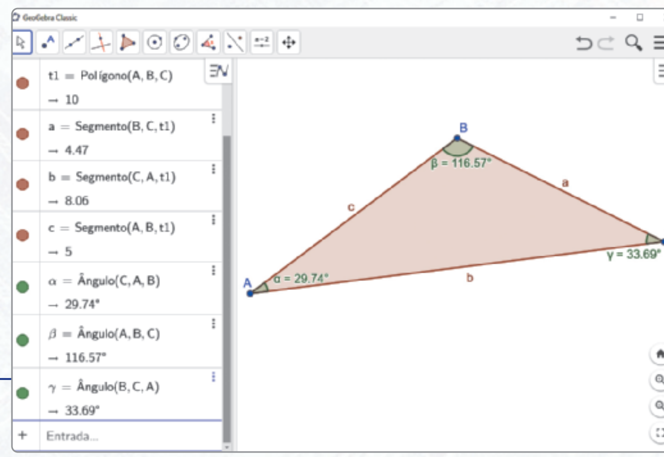
O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Verificando a lei dos senos

Observe como podemos verificar a lei dos senos em um triângulo qualquer, utilizando o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra**. Disponível para acesso *on-line* e *download* em <www.geogebra.org/> (acesso em: 29 maio 2020).

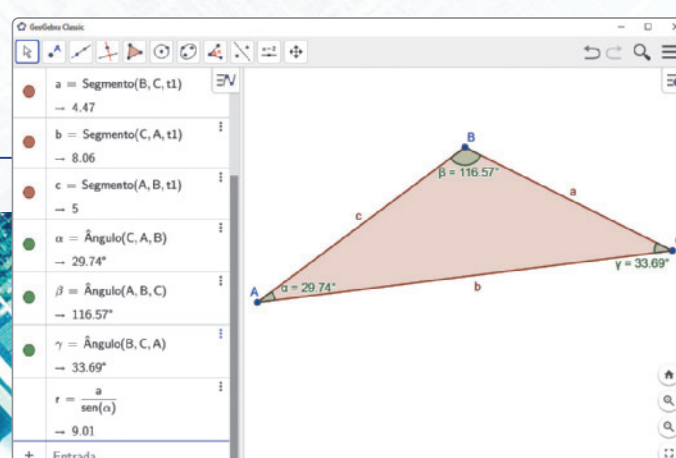
A Com a opção (Polígono), construímos um triângulo *ABC* qualquer. Em seguida, com a opção (Ângulo) clicamos sobre o triângulo construído para obter a medida de seus ângulos internos.





IMAGENS: GEOGEBRA

B A razão (r) entre a medida do lado a e o seno de α, ângulo oposto a esse lado no triângulo *ABC*, corresponde a $r = \dfrac{a}{\text{sen } \alpha}$. Para determinar o valor de r, clicamos no campo **Entrada**, digitamos $\boxed{r = a/\text{sen }(\alpha)}$ e pressionamos a tecla **Enter**. O valor de r pode ser observado na **Janela de Álgebra**.

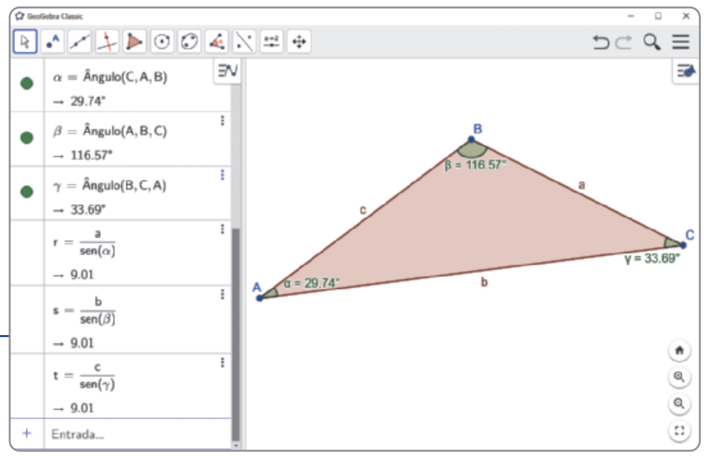


Dica

Para inserir o símbolo α no campo **Entrada**, podemos clicar em (Teclado virtual) e escolher a opção αβγ, localizada na parte direita desse campo.

ARCHY13/SHUTTERSTOCK.COM

C De maneira análoga à etapa anterior, calculamos as razões $s = \dfrac{b}{\text{sen } \beta}$ e $t = \dfrac{c}{\text{sen } \gamma}$ digitando $\boxed{s = b/\text{sen } (\beta)}$ e $\boxed{t = c/\text{sen } (\gamma)}$, respectivamente, no campo **Entrada**.



IMAGENS: GEOGEBRA

Mãos à obra

Não escreva no livro

1. Em relação ao triângulo construído no exemplo apresentado, a lei dos senos foi verificada? Justifique. Resposta esperada: Sim, pois as razões entre a medida de cada lado e do seno do ângulo interno oposto a esse lado são, respectivamente, iguais.

2. No **GeoGebra**, com a opção (Polígono), construa um triângulo *ABC* qualquer e, com a opção (Ângulo), determine a medida dos ângulos internos desse triângulo. Em seguida, de maneira análoga à realizada no exemplo, calcule as razões *r*, *s* e *t*.

a) Qual é a relação entre os valores que você obteve para *r*, *s* e *t*? Resposta esperada: Os valores dessas razões são iguais.

b) Nesse triângulo, a lei dos senos foi verificada? Por quê? Resposta esperada: Sim, pois os valores das razões *r*, *s* e *t* são iguais.

c) Utilizando a opção (Mover), movimente um ou mais vértices do triângulo que você construiu. O que aconteceu com os valores de *r*, *s* e *t*? A relação que você indicou ter observado no item **a** se manteve?

3. De maneira análoga ao exemplo, podemos verificar a lei dos cossenos utilizando o **GeoGebra**. Para isso, podemos seguir as etapas indicadas.

1ª) Construímos um triângulo qualquer com a opção (Polígono).

2. c) Resposta esperada: Os valores de *r*, *s* e *t* foram modificados, mas as razões se mantiveram iguais. Sim.

2ª) Utilizamos as opções (Ângulo) e (Distância, comprimento ou perímetro) para obter as medidas de um dos ângulos internos do triângulo e dos lados que formam o ângulo escolhido.

3ª) Com base na lei dos cossenos, digitamos no campo **Entrada** uma expressão para determinar a medida do lado oposto ao ângulo cuja medida foi determinada.

4ª) Comparamos o valor obtido pela expressão digitada com a medida do lado apresentada na **Janela de Álgebra** do programa.

Junte-se a um colega e verifiquem a lei dos cossenos, conforme as etapas indicadas. Resposta pessoal.

4. Nesta Unidade, foram apresentadas as seguintes relações:

- o seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar;
- o cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

Junte-se a um colega e, utilizando o **GeoGebra**, pensem em uma estratégia para verificar cada uma dessas relações e executem-na. Depois, registrem as etapas que vocês realizaram. Resposta pessoal.

O QUE ESTUDEI

Não escreva no livro

1 Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão. Depois, responda se você: **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações. Respostas pessoais.

- Ouvi com atenção as explicações do professor.
- Quando precisei, pedi ajuda ao professor.
- Auxiliei o professor quando ele me pediu.
- Participei das discussões propostas à turma.
- Fiz as atividades propostas na sala de aula.
- Fiz as atividades escolares propostas para casa.
- Respeitei meus colegas nas atividades em grupo.
- Auxiliei meus colegas quando eles tiveram dúvidas.
- Levei para a sala de aula os materiais necessários.

2 Nas fichas a seguir estão indicados os principais conceitos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum conceito para melhor compreendê-lo. Respostas pessoais.

- Teorema de Tales
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente
- Semelhança de polígonos
- Tabela trigonométrica
- Semelhança de triângulos
- Lei dos senos
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Lei dos cossenos
- Teorema de Pitágoras

3 Junte-se a dois colegas e escolham três conceitos entre os que foram listados na atividade anterior. Depois, conversem entre si sobre as aprendizagens adquiridas e sobre os conhecimentos relacionados a esses conceitos. Ao final, pensem em uma maneira de compartilhar essas informações com os colegas da turma e realizem uma produção com essa finalidade. Vocês podem utilizar diferentes linguagens e ferramentas, como: a escrita de um texto em uma rede social ou blogue, a elaboração de um cartaz ou de uma apresentação visual (*slides*), a produção de um vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) etc. Resposta pessoal.

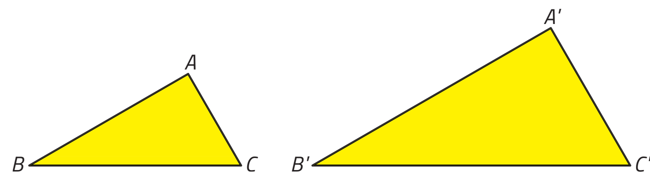
4 Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre os métodos científicos indutivo e dedutivo. Vimos que, na Matemática, o método dedutivo é o mais utilizado, isto é, para que uma “propriedade” matemática seja estabelecida, geralmente, parte-se de premissas gerais consideradas verdadeiras para se chegar a resultados mais particulares e específicos. Chamamos o desenvolvimento desse raciocínio de **demonstração matemática** ou **prova**. Analise um exemplo.

Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então a razão entre seus perímetros também é k.

Demonstração:

Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes, em que k é a razão de semelhança.

Assim, temos que: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \begin{cases} AB = k \cdot A'B' \\ BC = k \cdot B'C' \\ AC = k \cdot A'C' \end{cases}$



Como o perímetro do triângulo ABC é dado por $AB + BC + AC$ e o perímetro do triângulo $A'B'C'$ é dado por $A'B' + B'C' + A'C'$, segue que:

$$\frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{k \cdot A'B' + k \cdot B'C' + k \cdot A'C'}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{k \cdot (A'B' + B'C' + A'C')}{A'B' + B'C' + A'C'} = k$$

Portanto, a razão entre os perímetros desses triângulos também é k.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

a) Identifique as premissas consideradas e a conclusão obtida na demonstração apresentada.

b) Sabendo que, no triângulo ABC, o lado BC mede 8 cm e os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}C$ medem, respectivamente, 30° e 90°, determine:

- a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo; AB: $4\sqrt{3}$ cm; AC: 4 cm
- a medida da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa; 6 cm
- a medida da projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa; 2 cm

c) Considere as informações do item anterior e que seja traçada uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC de maneira a obter um triângulo menor ADE. Se DE medir 5 cm, qual será a medida dos outros lados do triângulo ADE? $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm e 2,5 cm

d) Utilizando o método científico dedutivo, mostre ser verdadeira a seguinte propriedade matemática: Resposta nas **Orientações para o professor**.

Seja k a razão de semelhança entre dois quadrados. Então, a razão entre as áreas desses quadrados é k^2.

4. a) Premissas: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e a razão de semelhança entre esses triângulos é k; conclusão: a razão entre os perímetros dos triângulos ABC e $A'B'C'$ também é k.

UNIDADE 3

Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC:

Competências gerais: 1, 2 e 5

Matemática e suas Tecnologias
Competência específica: 3
Habilidade: EM13MAT306

Ciências da Natureza e suas Tecnologias
Competência específica: 2

O texto integral das competências e das habilidades citadas encontra-se no final deste livro do estudante.

Moradia indígena

No Brasil, há pelo menos 256 povos indígenas distribuídos pelas regiões do país. Cada um desses povos possui língua, costumes, arte, crenças, saberes e modos de vida próprios. Entre os traços característicos de uma cultura, também está a forma como são construídas e organizadas as moradias.

Quando pensamos em uma aldeia indígena é comum imaginarmos moradias construídas com materiais locais como palha, madeira, folhas e cipós. Entretanto, existem diferentes tipos de habitações indígenas. A aldeia Kaikoturé, por exemplo, do povo Gavião Parkatêjê, localizada no município de Bom Jesus do Tocantins (PA), é composta por 33 moradias de alvenaria cobertas por telhas de barro e com fornecimento de água, energia elétrica e rede de esgoto. Apesar de ter sido influenciado por não indígenas, o povo Gavião Parkatêjê manteve os costumes de seus antepassados, como a disposição das moradias em formato circular, garantindo a tradicional organização social e cerimonial da aldeia.

Fonte dos dados: CASAS. **Povos Indígenas no Brasil Mirim**, [20--]. Disponível em: https://mirim.org/como-vivem/casas. HABITAÇÕES. **Povos Indígenas no Brasil**, [ca. 2018]. Disponível em: https://pib.socioambiental.org/pt/Habita%C3%A7%C3%B5es. Acessos em: 23 set. 2019.

VINCENT CARELLI/VNA

» O pátio, região onde são realizadas as atividades cerimoniais, fica localizado ao centro, a uma distância de aproximadamente 100 m das moradias. Aldeia do povo Gavião Parkatejê (PA). Fotografia de 2010.

Após ler as informações, converse com os colegas e o professor sobre os itens abaixo.

- Em sua opinião, qual é a importância de os povos indígenas manterem os costumes e as tradições de seus antepassados?
- Que povos indígenas habitam a região onde você mora? Você sabe como são as moradias nas aldeias desses povos? Se necessário, faça uma pesquisa.
- A disposição das moradias na aldeia kaikoturé e a região delimitada por elas podem ser associadas a que figura geométrica plana?

Veja os comentários sobre abordagem desses itens nas **Orientações para o professor**.

Aldeias indígenas

As aldeias indígenas correspondem a conjuntos de moradias que estão organizadas de acordo com tradições de cada povo. Observe as três principais formas de organização das aldeias de povos indígenas brasileiros.

MUNDURUKU, Daniel. **Coisas de índio**. São Paulo: Callis, 2000. p. 34-35.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

Circunferência

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre povos indígenas no Brasil e sobre a construção das moradias da aldeia kaikoturé, do povo gavião parkatêjê. Vimos, por exemplo, que essas moradias foram dispostas em formato circular, lembrando uma **circunferência**.

Observe, na representação a seguir, alguns elementos importantes no estudo da circunferência.

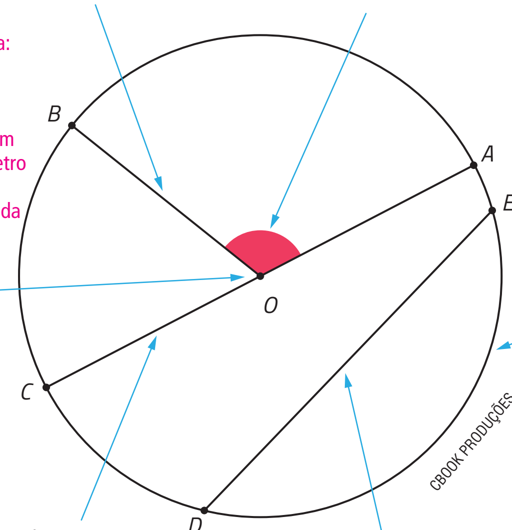
O **raio** é qualquer segmento de reta com uma extremidade no centro e outra em um ponto qualquer da circunferência. $\overline{OB}$ é um raio dessa circunferência.

O **ângulo central** de uma circunferência tem vértice no centro e lados passando por dois pontos dela. O ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central dessa circunferência.

Para pensar

Podemos afirmar que o diâmetro de uma circunferência também é uma corda? Justifique.

Resposta esperada: Sim, porque as extremidades do diâmetro estão na circunferência e, em particular, o diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência.



O **centro** é o ponto O, que está à mesma distância de qualquer ponto da circunferência.

A **circunferência** é a linha formada por todos os pontos que estão à mesma distância de um único ponto (centro da circunferência).
O comprimento ou perímetro c de uma circunferência de raio r é dado por $c = 2\pi r$.

O **diâmetro** é qualquer segmento de reta que passe pelo centro e cujas extremidades são pontos da circunferência. Sua medida é o dobro da medida do raio. $\overline{AC}$ é um diâmetro dessa circunferência.

A **corda** é qualquer segmento de reta com extremidades sobre a circunferência. $\overline{DE}$ é uma corda dessa circunferência.

Atividade resolvida

R1. (IFBA) Foi inaugurada uma praça municipal, de formato circular, com 30 m de raio, toda permeada por 21 refletores à sua volta. Foi projetada para que a distância entre dois refletores vizinhos fosse igual. Adotando o valor de $\pi = 3{,}15$; então a distância, em metros, entre cada dois dos refletores vizinhos foi de:

a) 7 m **b)** 8 m **c)** 9 m **d)** 10 m **e)** 11 m

Resolução

Calculando o comprimento c do contorno dessa praça, temos:

$c = 2\pi r \rightarrow c \simeq 2 \cdot 3{,}15 \cdot 30 = 189$; ou seja, aproximadamente 189 m

Como foram instalados 21 refletores à volta dessa praça, igualmente espaçados, temos que a distância d entre cada dois dos refletores vizinhos é dada por:

$$d = \frac{189}{21} = 9\text{; ou seja, 9 m}$$

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

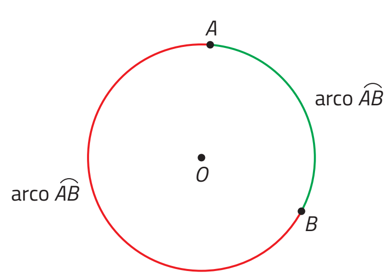
Arcos e ângulos em uma circunferência

Muitas construções prediais baseiam-se em estilos arquitetônicos e podem refletir influências históricas. O estilo românico, que surgiu na Europa Medieval, está presente em diversas construções no Brasil. Em Recife (PE), por exemplo, nas portas e janelas da fachada do museu da Academia Pernambucana de Letras é possível perceber figuras que lembram **arcos de circunferência**, uma das características mais significativas da arquitetura românica, conhecida pelos arcos de volta perfeitos.

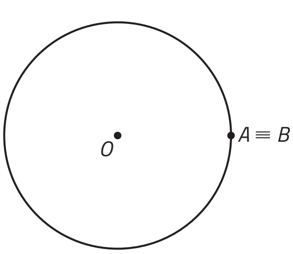
THIAGO LEMOS/FOTOARENA

» O museu da Academia Pernambucana de Letras está sediado em um casarão construído em meados do século XIX e que foi residência do barão português Rodrigues Mendes. Fotografia de 2020.

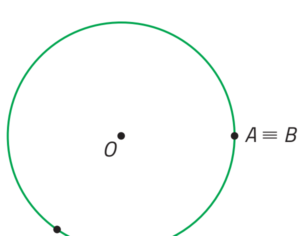
Na imagem ao lado, os pontos A e B dividem a circunferência de centro O em duas partes denominadas **arcos de circunferência**. Os pontos A e B são as extremidades desses arcos de circunferência, cada um dos quais pode ser indicado por $\overset{\frown}{AB}$.



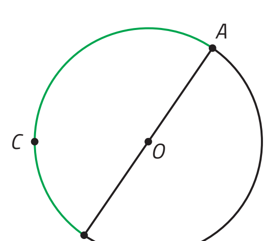
Quando os dois pontos A e B, que determinam um arco, são coincidentes, esse arco é nulo ou corresponde a um arco de uma volta. Quando A e B correspondem às extremidades de um diâmetro da circunferência, dizemos que esse arco corresponde a uma semicircunferência. Analise os exemplos a seguir.



» Arco nulo $\overset{\frown}{AB}$.



» Arco de uma volta $\overset{\frown}{ACB}$.



» Semicircunferência $\overset{\frown}{ACB}$.

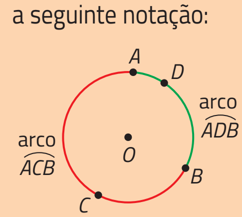
Conexões

Acesse este *site* para obter mais informações sobre a Academia Pernambucana de Letras.

- ACADEMIA PERNAMBUCANA DE LETRAS. Disponível em: https://aplpe.com.br. Acesso em: 6 set. 2020.

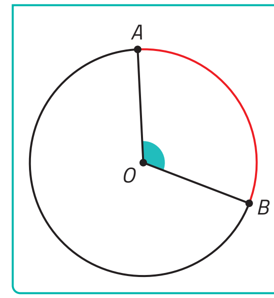
Dica

Para especificarmos a qual dos arcos estamos nos referindo, podemos destacar um ponto entre as extremidades do arco e utilizar a seguinte notação:



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Podemos associar um arco de circunferência ao ângulo central correspondente. Observe, ao lado, o ângulo central $A\hat{O}B$ que define o arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ destacado em vermelho.

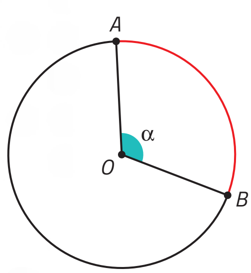


Unidades de medida de ângulos e de arcos

Em relação a um arco de circunferência, podemos determinar seu comprimento (ou medida linear) e a sua medida angular.

O **comprimento de um arco** está relacionado ao comprimento do raio da circunferência e à medida do ângulo central correspondente. Em uma circunferência de centro O, por exemplo, o comprimento de um arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ correspondente a um ângulo central α é dado pela distância percorrida de A até B sobre a circunferência ao se realizar um giro de ângulo α em torno de O.

Já a **medida angular de um arco** depende exclusivamente do ângulo central correspondente a ele, sendo a medida angular desse arco igual à medida desse ângulo central. Analise um exemplo.

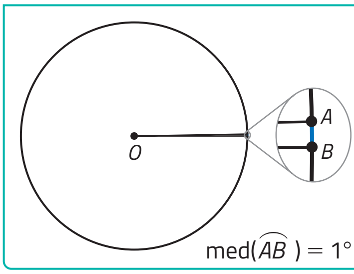


Arco: $\overset{\frown}{AB}$
Ângulo central: $A\hat{O}B$
Medida angular de $\overset{\frown}{AB}$: $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B) = \alpha$

Para indicar a medida angular de um arco ou a medida de um ângulo, em geral, utilizamos o **grau** ou o **radiano** como unidade de medida.

- **Grau (°)**

Ao dividirmos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes corresponde a um arco de medida angular 1 grau, que indicamos por 1°. Assim, uma volta completa corresponde a um arco de 360°.

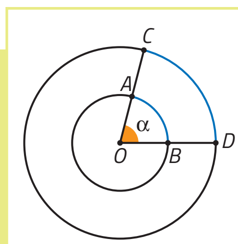


Dois submúltiplos do grau são: minuto (′) e segundo (″).

- $1° = 60'$
- $1' = 60''$

Para pensar

Considere a representação ao lado, de duas circunferências concêntricas e de um ângulo central de medida α que determina os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, destacados em azul.



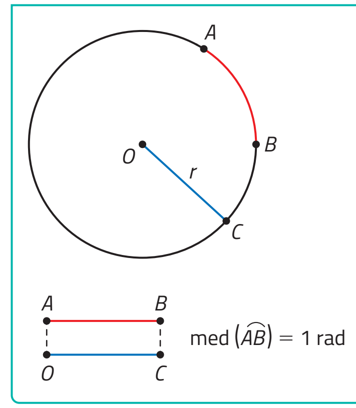
Podemos afirmar que $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são arcos:

- de mesma medida angular? Justifique. Resposta esperada: Sim, pois esses arcos de circunferência correspondem ao mesmo ângulo central de medida α.
- de mesmo comprimento? Justifique. Resposta esperada: Não, pois esses arcos de circunferência têm medidas angulares iguais, porém estão contidos em circunferências cujos raios têm comprimentos diferentes.

T.SUMAETHO/SHUTTERSTOCK.COM
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

- **Radiano (rad)**

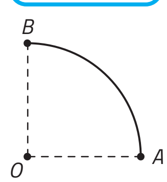
Um arco de medida angular 1 radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento do raio da circunferência na qual está contido, ou seja, dada uma circunferência cujo raio tem comprimento r, um arco de medida angular 1 rad tem comprimento igual a r. Como o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$, temos que a medida angular do arco de uma volta em uma circunferência cujo raio tem comprimento 1 rad é dada por:



$$2\pi r = 2\pi \cdot 1 \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$$

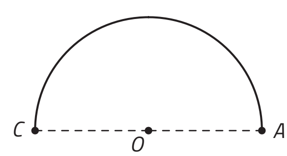
Observe a seguir a medida angular de alguns arcos expressa em graus e em radianos.

$\frac{1}{4}$ de volta



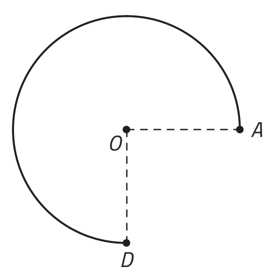
med$(\widehat{AB}) = 90°$ ou
med$(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{2}$ rad

$\frac{1}{2}$ de volta



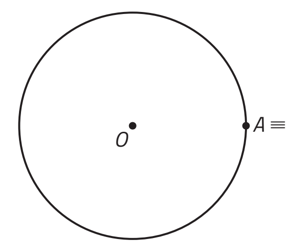
med$(\widehat{AC}) = 180°$ ou
med$(\widehat{AC}) = \pi$ rad

$\frac{3}{4}$ de volta



med$(\widehat{AD}) = 270°$ ou
med$(\widehat{AD}) = \frac{3\pi}{2}$ rad

1 volta



med$(\widehat{AE}) = 360°$ ou
med$(\widehat{AE}) = 2\pi$ rad

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Para pensar

Escreva a medida angular dos arcos $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AE}$ em função da medida angular do arco $\widehat{AB}$.

med$(\widehat{AC}) = 2 \cdot$ med$(\widehat{AB})$; med$(\widehat{AD}) = 3 \cdot$ med$(\widehat{AB})$; med$(\widehat{AE}) = 4 \cdot$ med$(\widehat{AB})$

Atividades resolvidas

R2. Determine a medida angular, em radianos, de um arco de 135°.

Resolução

Como a medida angular de um arco de circunferência correspondente a uma volta completa é 360° ou 2π rad, podemos escrever a seguinte proporção:

Medida angular do arco, em grau	Medida angular do arco, em radiano
360	2π
135	x

$$\frac{360}{135} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 270\pi \Rightarrow x = \frac{270\pi}{360} = \frac{3\pi}{4}$$

Portanto, um arco de 135° corresponde a um arco de $\frac{3\pi}{4}$ rad.

R3. Expresse a medida angular de um arco de $\frac{5\pi}{3}$ rad em graus.

Resolução

Podemos escrever a seguinte proporção:

Medida angular do arco, em grau	Medida angular do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{5\pi}{3}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} \Rightarrow \frac{1800\pi}{3} = 2\pi x \Rightarrow x = \frac{600\pi}{2\pi} = 300$$

Portanto, um arco de $\frac{5\pi}{3}$ rad corresponde a um arco de 300°.

R4. Em uma circunferência, cujo raio tem 4 cm, qual o comprimento de um arco de medida angular 108°?

Resolução

Como o comprimento dessa circunferência é dado por $2\pi r$, podemos escrever a seguinte proporção:

Medida angular do arco, em grau	Comprimento do arco, em centímetro
360	$2\pi \cdot 4$
108	x

$$\frac{360}{108} = \frac{2\pi \cdot 4}{x} \Rightarrow 360x = 864\pi \Rightarrow x = \frac{864\pi}{360} = \frac{12}{5}\pi$$

Portanto, um arco de 108° dessa circunferência tem comprimento de $\frac{12}{5}\pi$ cm ou aproximadamente 7,536 cm.

Para pensar

Considere, em uma circunferência de centro O e raio de comprimento r, um arco $\overset{\frown}{AB}$ correspondente a um ângulo central de medida α. Escreva uma expressão que relacione o comprimento ℓ desse arco de circunferência à medida α, dada em:

- grau; Resposta esperada: $\ell = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$
- radiano. Resposta esperada: $\ell = \alpha \cdot r$

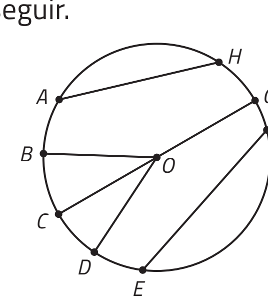
Atividades

Não escreva no livro

Dica

Nas atividades de **1** a **14**, utilize 3,14 como aproximação de π.

1. Observe a circunferência de centro O representada a seguir.



CBOOK PRODUÇÕES

Determine quais dos segmentos de reta indicados correspondem a:

a) raios dessa circunferência; $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OG}$

b) diâmetros dessa circunferência; $\overline{CG}$

c) cordas dessa circunferência. $\overline{AH}$, $\overline{CG}$ e $\overline{EF}$

2. Calcule o comprimento de uma circunferência de:

a) 5 cm de raio; 31,4 cm

b) 18 dm de diâmetro; 56,52 dm

c) 7 m de diâmetro. 21,98 m

3. Determine quantos centímetros tem o raio de uma circunferência com comprimento aproximado de:

a) 15,7 cm; 2,5 cm

b) 25,12 m; 400 cm

c) 43,96 dm; 70 cm

d) 75,36 cm. 12 cm

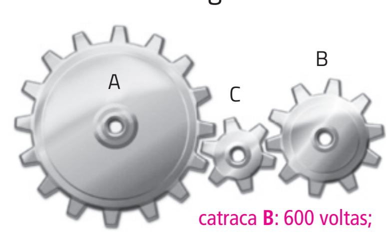
4. Utilizando régua e compasso, represente uma circunferência de centro O com: Respostas pessoais.

a) raio medindo 5 cm;

b) diâmetro medindo 8 cm;

c) comprimento medindo 7π cm.

5. O sistema de engrenagens representado a seguir é formado por três catracas: **A**, **B** e **C**. Os comprimentos dos raios das catracas **B** e **C** correspondem, respectivamente, à metade e a um quarto do comprimento do raio da catraca **A**. Nesse sistema de engrenagens, quantas voltas realizam as catracas **B** e **C** enquanto a catraca **A** gira 300 voltas?



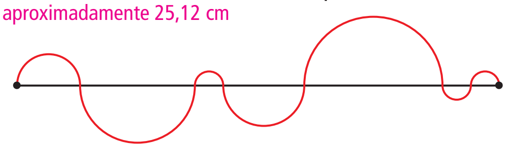
LUCAS FARAUJ

catraca **B**: 600 voltas; catraca **C**: 1 200 voltas

6. Utilizando um programa de computador, João construiu uma circunferência. Em seguida, com uma das ferramentas desse programa, construiu uma ampliação dessa circunferência, de maneira que seu comprimento tivesse 4 unidades a mais do que o da original. Em relação à figura original, em quantas unidades aumentou o comprimento do raio da circunferência obtida na ampliação?

$\frac{2}{\pi}$ unidade de medida de comprimento ou aproximadamente 0,637 unidade de medida de comprimento

7. Em uma atividade integrando Arte e Matemática, uma estudante desenhou com régua um segmento de reta com 16 cm em preto. Depois, com compasso, construiu uma linha curva vermelha formada por sete semicircunferências cujos diâmetros estão justapostos sobre o segmento de reta, conforme representado a seguir. Qual o comprimento da linha curva vermelha construída por essa estudante? aproximadamente 25,12 cm

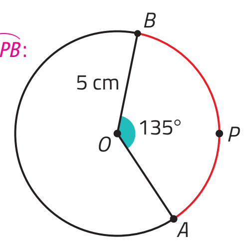


8. Expresse, em graus, cada medida angular indicada a seguir.

a) π rad 180°
b) $\frac{2\pi}{5}$ rad 72°
c) $\frac{\pi}{6}$ rad 30°
d) $\frac{6\pi}{4}$ rad 270°
e) $\frac{\pi}{3}$ rad 60°
f) $\frac{\pi}{4}$ rad 45°

9. A seguir, está representada uma circunferência de centro O e alguns de seus elementos. Determine o comprimento e a medida angular, em grau, do arco de circunferência $\overset{\frown}{APB}$.

comprimento de $\overset{\frown}{APB}$: aproximadamente 11,775 cm; med$(\overset{\frown}{APB}) = 135°$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

10. Expresse, em radiano, a medida angular de cada arco de circunferência indicada a seguir.

a) med$(\overset{\frown}{AB}) = 150°$
b) med$(\overset{\frown}{AB}) = 200°$
c) med$(\overset{\frown}{AB}) = 340°$
d) med$(\overset{\frown}{AB}) = 250°$

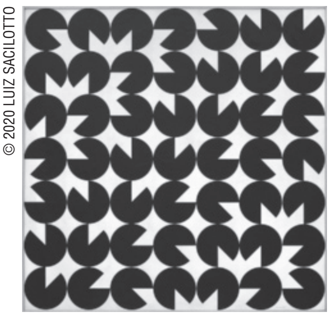
11. Rafaela faz um curso em que está aprendendo a desenvolver jogos para computador. Para representar o personagem de um jogo que ela está desenvolvendo, Rafaela desenhou um arco de circunferência com 12 mm de raio e 62,8 mm de comprimento e coloriu a região interna da figura, conforme representado ao lado. Qual a medida angular do arco de circunferência desenhado por Rafaela? Expresse essa medida angular em grau e em radiano. 300° ou $\frac{5\pi}{3}$ rad

BENTINHO

12. A partir da figura de uma circunferência com 36 cm de diâmetro, Mário desenhou um arco de circunferência de medida angular 210°. Quantos centímetros de comprimento tem esse arco de circunferência? 65,94 cm

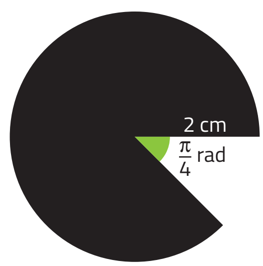
13. Observe, a seguir, uma obra do artista brasileiro Luiz Sacilotto (1924-2003).

© 2020 LUIZ SACILOTTO



» SACILOTTO, L. **C8218**. 1982. Têmpera sobre tela, 70 x 70 cm. (Coleção particular)

Para realizar uma releitura dessa obra, um estudante construiu em um computador a figura a seguir, que corresponde a um setor circular. Em seguida, realizou reproduções e rotações dessa figura.



Dica

Um **setor circular** é uma região do círculo determinada por um ângulo central.

Qual é o perímetro da figura construída por esse estudante? 14,99 cm

Conexões

Acesse este *site* que apresenta informações sobre o artista Luiz Sacilotto:

- SACILOTTO. Disponível em: http://mob.sacilotto.com.br/. Acesso em: 23 abr. 2020.

14. Junte-se a um colega e demonstrem a seguinte afirmação. Resposta nas **Orientações para o professor**.

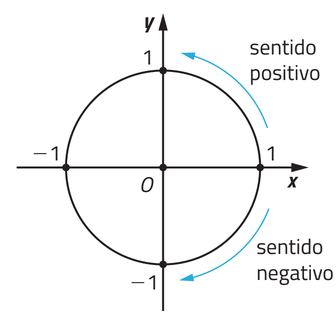
Dada uma circunferência de centro O e raio de comprimento r, temos que o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ nessa circunferência, sendo med$(A\hat{O}B) = 2$ rad, é igual ao comprimento do diâmetro dessa circunferência.

10. a) med$(\overset{\frown}{AB}) = \frac{5\pi}{6}$ rad 10. b) med $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{10\pi}{9}$ rad 10. c) med $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{17\pi}{9}$ rad 10. d) med $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{25\pi}{18}$ rad

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias.

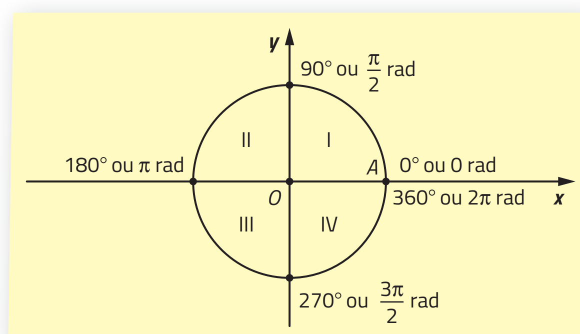
Ciclo trigonométrico

Estudamos anteriormente que, ao se percorrer sobre uma circunferência qualquer, partindo-se de um ponto A até um ponto B, determina-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ cujo comprimento corresponde à distância percorrida em certa unidade, como metro, centímetro ou milímetro. Além disso, o giro realizado nesse percurso corresponde à medida angular de $\overset{\frown}{AB}$ expressa em grau ou em radiano. Agora, vamos estender esse estudo a uma circunferência orientada, ou seja, em que convencionamos um sentido positivo do percurso.



Considere uma circunferência orientada, definindo o sentido anti-horário do percurso como positivo, com raio r de comprimento unitário ($r = 1$) e fixada a um sistema de eixos cartesianos de maneira que seu centro O coincida com a origem desse sistema, ou seja, $O\,(0, 0)$.

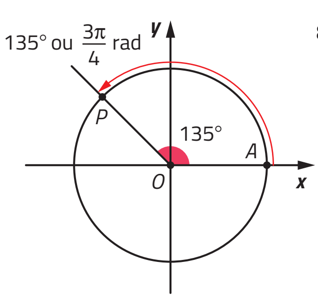
A essa estrutura denominamos **ciclo trigonométrico** (ou circunferência trigonométrica). Nele, convencionamos o ponto $A\,(1, 0)$ a origem dos arcos a serem medidos, denominados **arcos trigonométricos**. No ciclo trigonométrico, os eixos cartesianos dividem a circunferência em quatro partes congruentes, denominadas quadrantes, e numeradas, no sentido positivo, em **I**, **II**, **III** e **IV**. A cada ponto M do ciclo trigonométrico associamos a medida angular do arco $\overset{\frown}{AM}$ expressa em grau ou em radiano. Observe os exemplos, considerando o sentido positivo do ciclo trigonométrico.

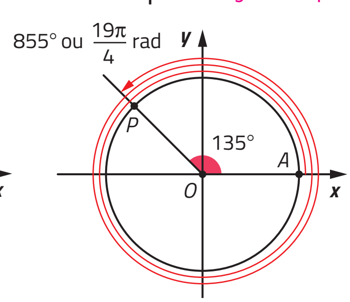


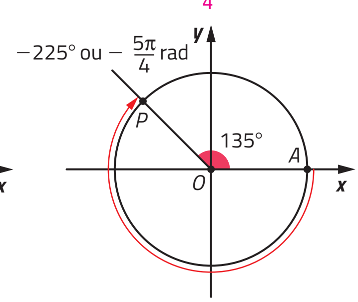
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Arcos côngruos

No ciclo trigonométrico, podemos associar arcos com diferentes medidas angulares a um mesmo ponto P. Analise os exemplos. Algumas respostas possíveis: 495° ou $\frac{11\pi}{4}$ rad; $-585°$ ou $-\frac{13\pi}{4}$ rad; 1 215° ou $\frac{27\pi}{4}$ rad.







Para pensar

Escreva a medida angular de outro arco côngruo aos apresentados.

Note que esses arcos trigonométricos têm extremidade no mesmo ponto P. Assim, dizemos que eles são **arcos côngruos** ou **arcos congruentes**.

Dizemos que dois ou mais arcos trigonométricos são côngruos ou congruentes entre si caso tenham a mesma extremidade.

Em relação aos arcos côngruos apresentados, note que:

- $855° = 135° + 2 \cdot 360°$ ou $\frac{19\pi}{4}$ rad $= \frac{3\pi}{4}$ rad $+ 2 \cdot 2\pi$ rad
- $-225° = 135° + (-1) \cdot 360°$ ou $-\frac{5\pi}{4}$ rad $= \frac{3\pi}{4}$ rad $+ (-1) \cdot 2\pi$ rad

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α, com $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ ou $0 \text{ rad} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ rad, podemos expressar as medidas angulares dos arcos côngruos a $\overset{\frown}{AP}$ da seguinte maneira:

$$\alpha + k \cdot 360° \text{ ou } \alpha + k \cdot 2\pi \text{ rad, com } k \in \mathbb{Z}$$

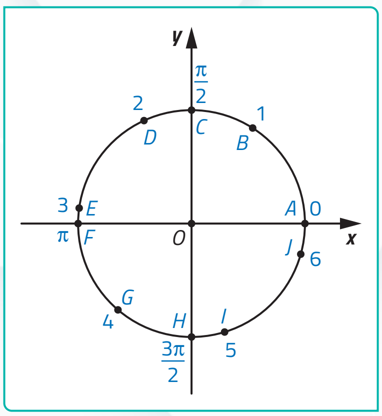
Denominamos esse arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α de **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele.

Em relação aos exemplos apresentados, temos que o arco trigonométrico de medida angular 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ rad é a 1ª determinação positiva dos demais arcos côngruos a ele.

Números reais associados a pontos do ciclo trigonométrico

Agora, vamos estabelecer no ciclo trigonométrico a correspondência que associa a medida angular de cada arco, em radiano, ao número real que a representa. Por exemplo, à medida angular:

- 1 rad de $\overset{\frown}{AB}$ associamos o número real 1;
- $\frac{\pi}{2}$ rad de $\overset{\frown}{AC}$ associamos o número real $\frac{\pi}{2}$;
- 2 rad de $\overset{\frown}{AD}$ associamos o número real 2;
- 3 rad de $\overset{\frown}{AE}$ associamos o número real 3;
- π rad de $\overset{\frown}{AF}$ associamos o número real π;
- 4 rad de $\overset{\frown}{AG}$ associamos o número real 4;
- $\frac{3\pi}{2}$ rad de $\overset{\frown}{AH}$ associamos o número real $\frac{3\pi}{2}$;
- 5 rad de $\overset{\frown}{AI}$ associamos o número real 5;
- 6 rad de $\overset{\frown}{AJ}$ associamos o número real 6.



CBOOK PRODUÇÕES

De maneira geral, ao arco trigonométrico de medida angular x rad associamos o número real x. É importante destacar que, como há infinitos arcos trigonométricos associados a um mesmo ponto (arcos côngruos), também podemos estabelecer a associação de infinitos números reais a um mesmo ponto do ciclo trigonométrico. Em relação ao exemplo anterior, ao ponto F estão associados os números reais $x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja: ..., -5π, -3π, $-\pi$, π, 3π, 5π, ...

Atividades resolvidas

R5. Determine a medida angular do arco trigonométrico correspondente à 1ª determinação positiva de um arco de:

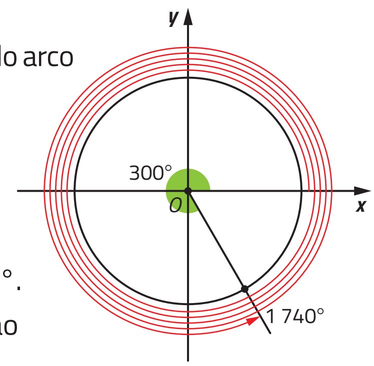
a) $1\,740°$;

b) $-\dfrac{49\pi}{9}$ rad.

Resolução

a) A medida angular do arco correspondente à 1ª determinação positiva do arco de $1\,740°$ é dada pelo resto da divisão de 1 740 por 360.

$$\begin{array}{r|l} 1\,740 & 360 \\ \hline -\,1\,440 & 4 \\ \hline 300 & \end{array}$$



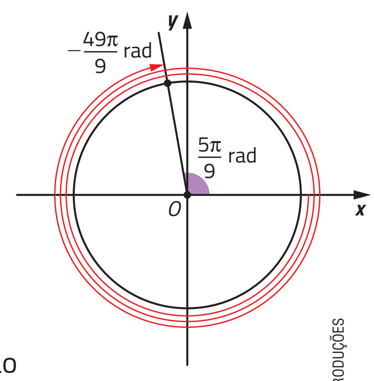
Assim, temos que $1\,740° = \alpha + k \cdot 360° \rightarrow 1\,740° = 300° + 4 \cdot 360°$.

Portanto, a medida angular do arco correspondente à 1ª determinação positiva é 300°.

b) Observe que:

$$-\frac{49\pi}{9} = -\frac{13\pi}{9} - \frac{36\pi}{9} = -\frac{13\pi}{9} - 4\pi = -\frac{13\pi}{9} - 2 \cdot 2\pi \text{ e}$$

$$-\frac{13\pi}{9} + 2\pi = \frac{5\pi}{9}$$



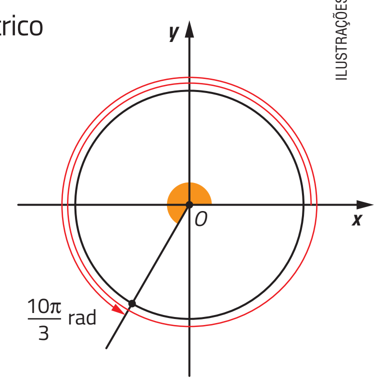
Assim, segue que:

$$-\frac{49\pi}{9}\text{ rad} = \alpha + k \cdot 2\pi\text{ rad} \rightarrow -\frac{49\pi}{9}\text{ rad} = \frac{5\pi}{9}\text{ rad} + (-3) \cdot 2\pi\text{ rad}$$

Portanto, a medida angular do arco correspondente à 1ª determinação positiva é $\dfrac{5\pi}{9}$ rad.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

R6. Determine os números reais, entre 0 e 10π, associados ao arco trigonométrico indicado ao lado.



Resolução

Observe que:

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi$$

Assim, a medida angular do arco trigonométrico correspondente à 1ª determinação positiva é $\dfrac{4\pi}{3}$ rad, que está associado ao número real $\dfrac{4\pi}{3}$.

Agora, determinamos os números reais, entre 0 e 10π, associados à medida angular de outros arcos côngruos a $\dfrac{4\pi}{3}$ rad.

- $\dfrac{4\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \dfrac{16\pi}{3}$
- $\dfrac{4\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi = \dfrac{22\pi}{3}$
- $\dfrac{4\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi = \dfrac{28\pi}{3}$

Portanto, os números reais são $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{10\pi}{3}$, $\dfrac{16\pi}{3}$, $\dfrac{22\pi}{3}$ e $\dfrac{28\pi}{3}$.

Dica

Note que $\dfrac{4\pi}{3} + 5 \cdot 2\pi > 10\pi$.

16. a) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$ e $\frac{37\pi}{6}$ 16. b) $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{49\pi}{6}$ e $\frac{61\pi}{6}$ 16. c) $-\frac{35\pi}{6}$, $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$ 16. f) $-\frac{59\pi}{6}$, $-\frac{47\pi}{6}$, $-\frac{35\pi}{6}$ e $-\frac{23\pi}{6}$

16. d) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{49\pi}{6}$, $\frac{61\pi}{6}$, $\frac{73\pi}{6}$, $\frac{85\pi}{6}$, $\frac{97\pi}{6}$ e $\frac{109\pi}{6}$ 16. e) $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{13\pi}{6}$

Atividades

Não escreva no livro

15. Calcule a medida angular do arco trigonométrico correspondente à 1ª determinação positiva de um arco de:

a) 1 970° 170°

b) $\frac{65\pi}{9}$ rad $\frac{11\pi}{9}$ rad

c) $-\frac{10\pi}{9}$ rad $\frac{8\pi}{9}$ rad

d) −1 110° 330°

e) 1 520° 80°

f) $-\frac{70\pi}{9}$ rad $\frac{2\pi}{9}$ rad

16. Escreva os números reais associados aos arcos côngruos ao arco trigonométrico de medida angular $\frac{\pi}{6}$ rad, que estejam entre:

a) 0 e $\frac{49\pi}{6}$;

b) 4π e 12π;

c) -6π e 2π;

d) 0° e 3 300°;

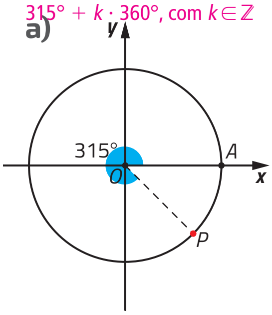
e) −720° e 720°;

f) −1 800° e −360°.

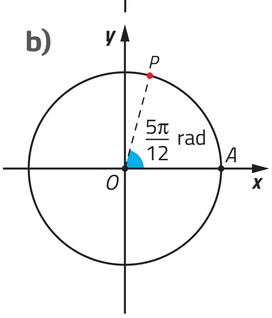
17. Em cada item, escreva uma expressão que determine as medidas angulares dos arcos associados ao ponto *P* destacado no ciclo trigonométrico.

$315° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

a)

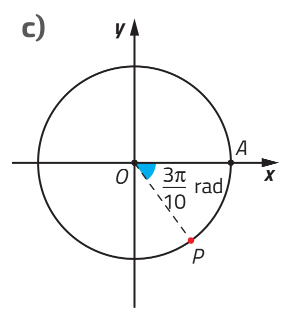


b)



$\frac{5\pi}{12}$ rad $+ k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$

c)



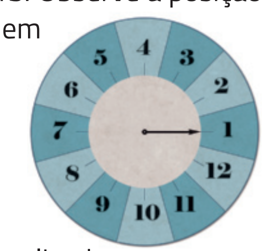
$\frac{17\pi}{10}$ rad $+ k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

18. Represente um ciclo trigonométrico e indique os pontos *P* e *Q*, associados aos arcos de medida angular 1 250° e $-\frac{35\pi}{4}$ rad, respectivamente.

Resposta nas **Orientações para o professor.**

19. Em certo jogo de tabuleiro, há uma roleta igualmente dividida em 12 partes. Cada jogador, na sua vez, gira o ponteiro dessa roleta três vezes consecutivas no sentido anti-horário e desloca seu peão no tabuleiro a quantidade de casas correspondente à soma dos valores obtidos na roleta. Por exemplo, se um jogador obtiver na roleta os números 3, 8 e 2, respectivamente, ele deve deslocar seu peão em 13 casas no tabuleiro, pois $3 + 8 + 2 = 13$. Observe a posição do ponteiro nessa roleta em certo momento do jogo.



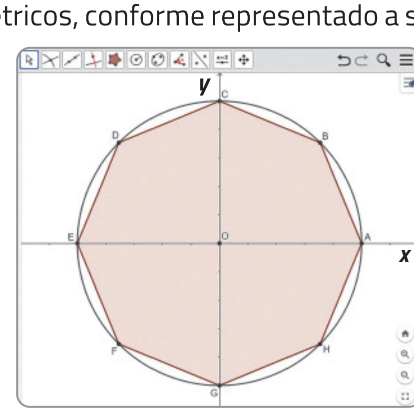
ARTUR FUJITA

A partir dessa posição, Rafael girou a roleta três vezes, no sentido anti-horário, de maneira que os ângulos realizados pelo ponteiro nesses giros foram de $\frac{2\pi}{3}$ rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad.

a) Qual a medida do ângulo, em graus, correspondente a esses três giros? 690°

b) Quantas casas Rafael deverá deslocar o seu peão no tabuleiro? 26 casas

20. No **GeoGebra**, Carlos representou um octógono regular *ABCDEFGH* inscrito em um ciclo trigonométrico, de maneira que seu vértice *A* coincidisse com a origem dos arcos trigonométricos, conforme representado a seguir.



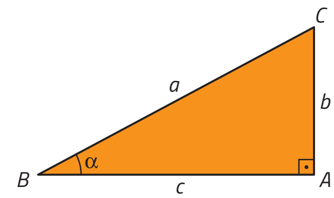
GEOGEBRA

a) Qual a medida angular do arco de circunferência $\overset{\frown}{ABD}$? 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ rad

b) Um arco trigonométrico de medida angular $\frac{31\pi}{4}$ rad, nesse ciclo trigonométrico, tem extremidade em que vértice do octógono? *H*

Seno, cosseno e tangente de um arco no ciclo trigonométrico

Na Unidade **2** foram estudadas as razões trigonométricas em triângulos. Vimos por exemplo que, a partir dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo *ABC*, podemos obter os valores das razões trigonométricas relacionadas a um ângulo interno agudo de medida α.



- $\text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a}$
- $\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$
- $\text{tg } \alpha = \dfrac{b}{c}$

Agora, vamos estender esse estudo definindo as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um número real.

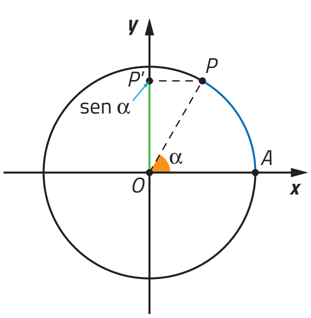
Resposta esperada: Para um arco trigonométrico de medida angular $\frac{\pi}{2}$ rad, temos que o seno é igual a 1 e o cosseno igual a 0, pois esse arco está associado ao ponto de coordenadas $P(0, 1)$.

Para pensar

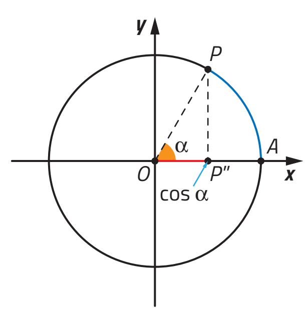
No ciclo trigonométrico, qual é o valor do seno e do cosseno do arco de medida angular $\frac{\pi}{2}$ rad? Justifique.

Seno e cosseno de um arco trigonométrico

Inicialmente, consideremos no ciclo trigonométrico um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α. Definimos a ordenada de P como o **seno de α** e a abscissa de P como o **cosseno de α**.



» Considerando o sentido positivo do eixo das ordenadas, também podemos definir o seno de α como a medida algébrica do segmento de reta OP'.



» Considerando o sentido positivo do eixo das abscissas, também podemos definir o cosseno de α como a medida algébrica do segmento de reta OP''.

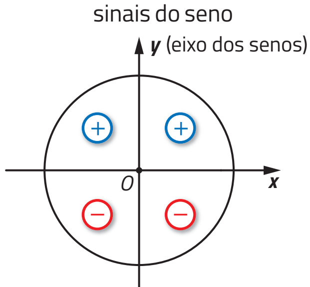
No ciclo trigonométrico, um ponto P tem ordenada positiva quando pertence aos quadrantes **I** ou **II** e ordenada negativa quando pertence aos quadrantes **III** ou **IV**; além disso, tem abscissa positiva quando pertence aos quadrantes **I** ou **IV** e abscissa negativa quando pertence aos quadrantes **II** ou **III**. Assim, se um arco trigonométrico α tem extremidade no quadrante:

- **I**, então $\text{sen } \alpha > 0$ e $\cos \alpha > 0$;
- **II**, então $\text{sen } \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$;
- **III**, então $\text{sen } \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$;
- **IV**, então $\text{sen } \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$.

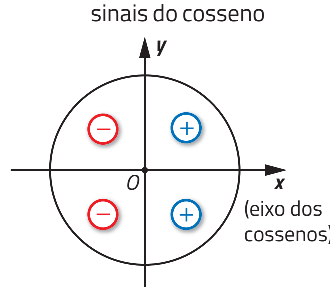
Dica

No ciclo trigonométrico, podemos denominar o eixo das abscissas de **eixo dos cossenos** e o eixo das ordenadas de **eixo dos senos**.

sinais do seno



sinais do cosseno



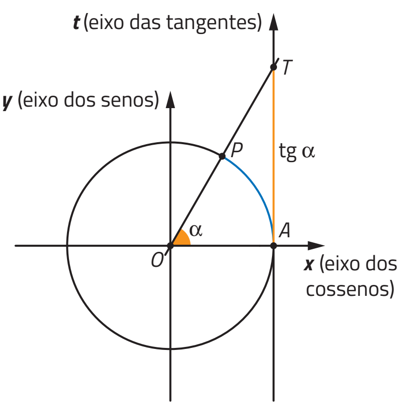
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Para pensar quadrante **III**

Se os valores do seno e do cosseno de um mesmo arco trigonométrico são negativos, a qual quadrante do ciclo trigonométrico pertence a extremidade desse arco?

Tangente de um arco trigonométrico

Consideremos agora, no ciclo trigonométrico, um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α, com $\alpha \neq 90° + 180° \cdot k$ ou $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ $(k \in \mathbb{Z})$, e uma reta t, tangente à circunferência no ponto A, com a mesma orientação do eixo y. Indicamos o ponto T determinado na interseção das retas t e OP e definimos a **tangente de α** como a medida algébrica do segmento de reta AT.

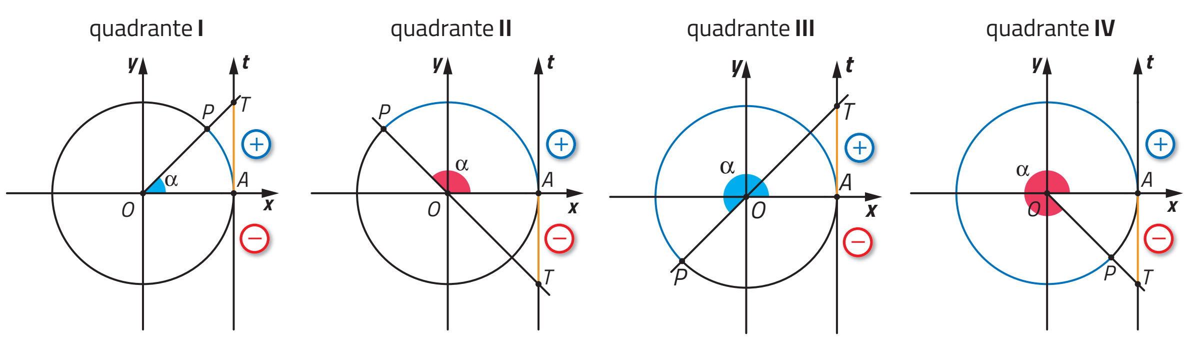


Para pensar

Explique, geometricamente, por que não é possível determinar um valor de tangente para certos valores de α.

Resposta esperada: Porque, quando o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ é côngruo aos de medida angular $\frac{\pi}{2}$ rad ou $\frac{3\pi}{2}$ rad, a reta OP é paralela à reta t e, dessa maneira, não existe um ponto T que seja a interseção dessas retas.

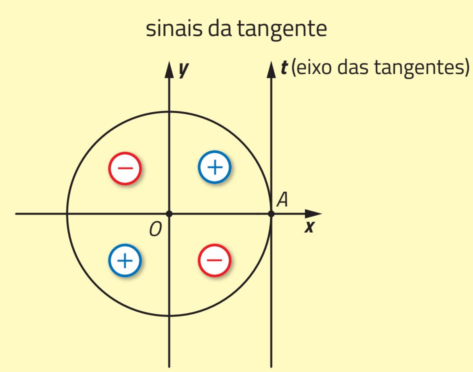
Para determinar o sinal da tangente de um arco trigonométrico, podemos observar diferentes arcos de extremidade P e medida angular α em cada um dos quadrantes do ciclo trigonométrico.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Assim, se um arco trigonométrico de medida angular α tem extremidade no quadrante:

- **I**, então tg $\alpha > 0$;
- **II**, então tg $\alpha < 0$;
- **III**, então tg $\alpha > 0$;
- **IV**, então tg $\alpha < 0$.



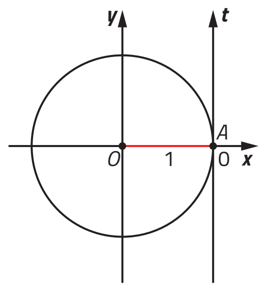
Dica

Como o ciclo trigonométrico tem raio com comprimento unitário, para simplificar a notação, vamos representar as razões trigonométricas de um arco, com a medida angular expressa em radiano, sem a indicação "rad". Por exemplo, vamos representar o seno, o cosseno e a tangente de um arco de medida angular $\frac{\pi}{2}$ rad, por sen $\frac{\pi}{2}$, cos $\frac{\pi}{2}$ e tg $\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Observe alguns valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente.

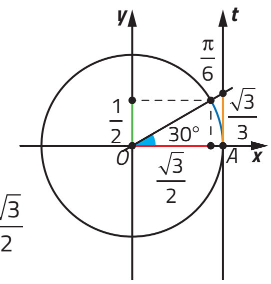
0 rad ou 0°

- $\text{sen } 0 = 0$ ou $\text{sen } 0° = 0$
- $\cos 0 = 1$ ou $\cos 0° = 1$
- $\text{tg } 0 = 0$ ou $\text{tg } 0° = 0$



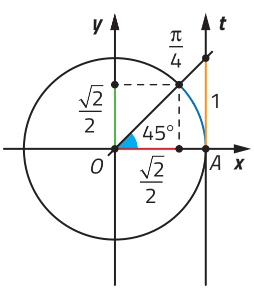
$\frac{\pi}{6}$ rad ou 30°

- $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$



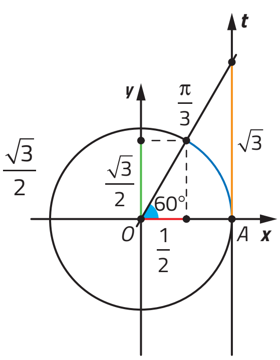
$\frac{\pi}{4}$ rad ou 45°

- $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$ ou $\text{tg } 45° = 1$



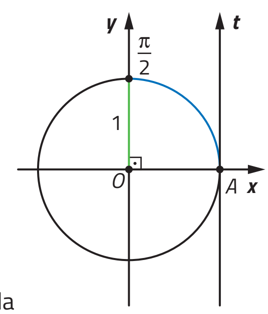
$\frac{\pi}{3}$ rad ou 60°

- $\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ou $\cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ou $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$



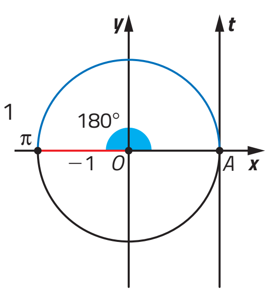
$\frac{\pi}{2}$ rad ou 90°

- $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ ou $\text{sen } 90° = 1$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ou $\cos 90° = 0$
- $\text{tg } \frac{\pi}{2}$ ou $\text{tg } 90°$ não está definida



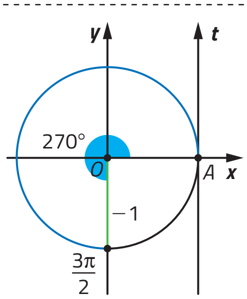
π rad ou 180°

- $\text{sen } \pi = 0$ ou $\text{sen } 180° = 0$
- $\cos \pi = -1$ ou $\cos 180° = -1$
- $\text{tg } \pi = 0$ ou $\text{tg } 180° = 0$



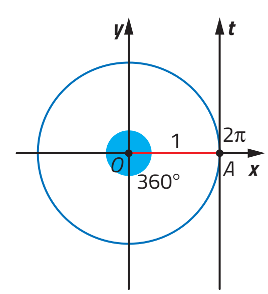
$\frac{3\pi}{2}$ rad ou 270°

- $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$ ou $\text{sen } 270° = -1$
- $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ou $\cos 270° = 0$
- $\text{tg } \frac{3\pi}{2}$ ou $\text{tg } 270°$ não está definida



2π rad ou 360°

- $\text{sen } 2\pi = 0$ ou $\text{sen } 360° = 0$
- $\cos 2\pi = 1$ ou $\cos 360° = 1$
- $\text{tg } 2\pi = 0$ ou $\text{tg } 360° = 0$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Para pensar

No caderno, construa uma tabela para organizar os valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente apresentados nesta página. Resposta nas **Orientações para o professor**.

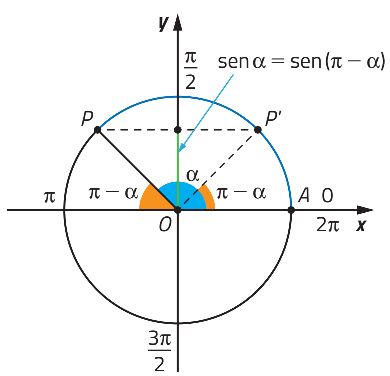
Redução ao 1º quadrante

A partir dos valores do seno, do cosseno ou da tangente de arcos com extremidade no 1º quadrante do ciclo trigonométrico, podemos calcular os respectivos valores do seno, do cosseno ou da tangente de arcos com extremidade em qualquer outro quadrante. Para isso, podemos utilizar ideias da simetria de reflexão.

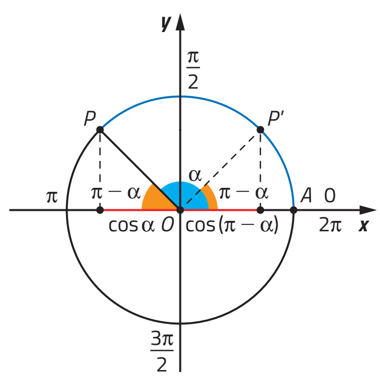
Redução do 2º para o 1º quadrante

Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α, com $\frac{\pi}{2}$ rad $< \alpha < \pi$ rad, determinamos o ponto P' no ciclo trigonométrico de maneira que seja simétrico a P em relação ao eixo y. Assim:

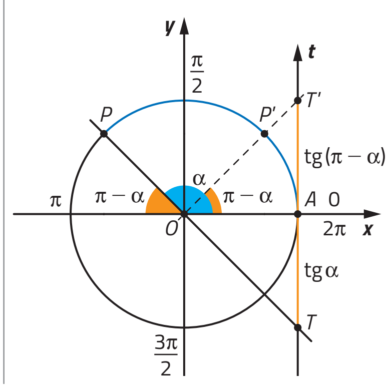
- $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi - \alpha)$



- $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$



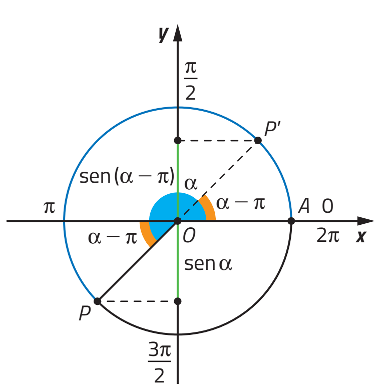
- $\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(\pi - \alpha)$



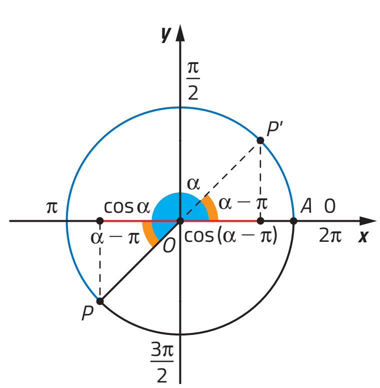
Redução do 3º para o 1º quadrante

Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α, com π rad $< \alpha < \frac{3\pi}{2}$ rad, determinamos o ponto P' no ciclo trigonométrico de maneira que seja simétrico a P em relação ao ponto O. Assim:

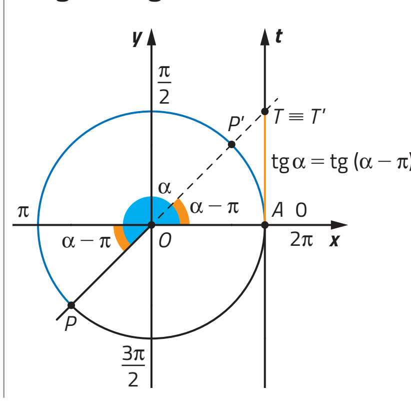
- $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(\alpha - \pi)$



- $\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$



- $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,(\alpha - \pi)$

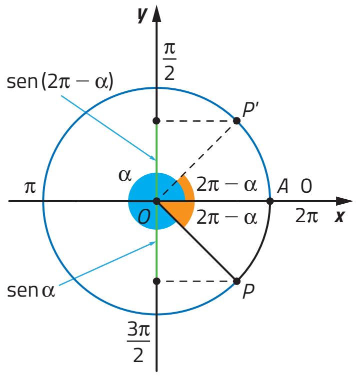


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

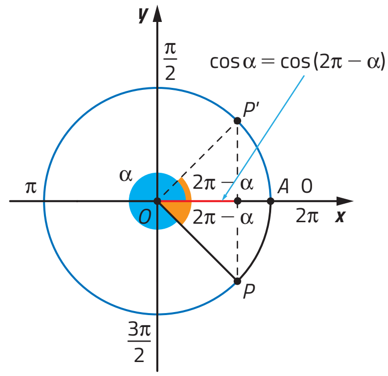
Redução do 4º para o 1º quadrante

Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α, com $\frac{3\pi}{2}$ rad $< \alpha < 2\pi$ rad, determinamos o ponto P' no ciclo trigonométrico de maneira que seja simétrico a P em relação ao eixo x. Assim:

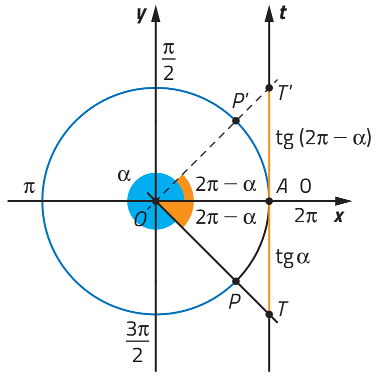
- $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,(2\pi - \alpha)$



- $\cos\alpha = \cos\,(2\pi - \alpha)$



- $\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(2\pi - \alpha)$



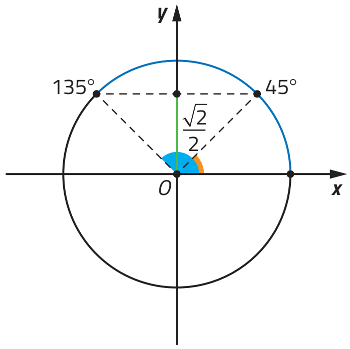
Atividades resolvidas

R7. Calcule.

a) sen 1 215°

b) $\cos -\frac{20\pi}{3}$

Resolução



a) Obtemos a 1ª determinação positiva do arco de 1 215°:

1 215° = 135° + 3 · 360°

Como a extremidade do arco de 135° é no 2º quadrante (90° < 135° < 180°), temos que:

$\text{sen}\ 1\,215° = \text{sen}\ 135° = \text{sen}\ (180° - 135°) = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

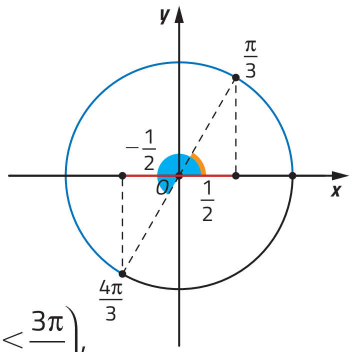
Portanto, $\text{sen}\ 1\,215° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Observe que:

$$-\frac{20\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{2\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi$$

e $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

Assim, a 1ª determinação positiva do arco de $-\frac{20\pi}{3}$ rad é $\frac{4\pi}{3}$ rad, pois: $-\frac{20\pi}{3}$ rad $= \frac{4\pi}{3}$ rad $+ (-4) \cdot 2\pi$ rad



Como a extremidade do arco de $\frac{4\pi}{3}$ rad é no 3º quadrante $\left(\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}\right)$, temos que: $\cos -\frac{20\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Portanto, $\cos -\frac{20\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

R8. Na Unidade **2**, estudamos as relações:

- $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, válida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\text{tg}\;\alpha = \dfrac{\text{sen}\;\alpha}{\cos\alpha}$, válida para todo $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\text{ rad} + k\pi\text{ rad}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Com base nessas relações, calcule $\cos\beta$ e $\text{tg}\,\beta$, sabendo que $\text{sen}\,\beta = -\dfrac{3}{4}$ e $\pi\text{ rad} < \beta < \dfrac{3\pi}{2}\text{ rad}$.

Resolução

Da relação $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos:

$\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{7}{16}$$

Como β é a medida angular de um arco com extremidade no 3º quadrante, em que os valores de cosseno são negativos, então:

$$\cos\beta = -\sqrt{\frac{7}{16}} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Utilizando a relação $\text{tg}\;\alpha = \dfrac{\text{sen}\;\alpha}{\cos\alpha}$, temos:

$$\text{tg}\;\beta = \frac{\text{sen}\;\beta}{\cos\beta} \Rightarrow \text{tg}\;\beta = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\;\beta = \frac{3}{\sqrt{7}} \Rightarrow \text{tg}\;\beta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

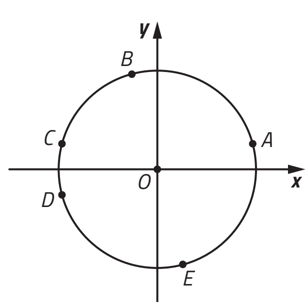
Portanto, $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ e $\text{tg}\;\beta = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

Atividades

Não escreva no livro

21. A qual quadrante do ciclo trigonométrico deve pertencer a extremidade de um arco de medida angular α, para que, simultaneamente, tenhamos: $\text{tg}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$. 4º quadrante

22. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}259$ e $\text{tg}\,\alpha = -0{,}268$, com $0\text{ rad} < \alpha < 2\pi\text{ rad}$, podemos afirmar que, dentre os pontos indicados no ciclo trigonométrico a seguir, aquele que pode corresponder à extremidade de um arco de medida angular α é: alternativa **c**



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

a) *A* **b)** *B* **c)** *C* **d)** *D* **e)** *E*

23. Consulte a tabela trigonométrica da página **78** e calcule.

a) $\text{sen}\;610°$ $-0{,}940$

b) $\text{tg}\;335°$ $-0{,}466$

c) $\cos\dfrac{53\pi}{9}$ $0{,}940$

d) $\text{tg}\;-\dfrac{91\pi}{36}$ $11{,}430$

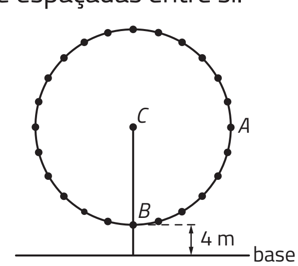
e) $\cos -\dfrac{43\pi}{60}$ $-0{,}629$

f) $\text{sen}\;-603°$ $0{,}891$

24. Calcule o valor da expressão a seguir:

$$\frac{\text{sen}\;\pi + \cos\dfrac{5\pi}{6}}{\text{tg}\dfrac{7\pi}{4}} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

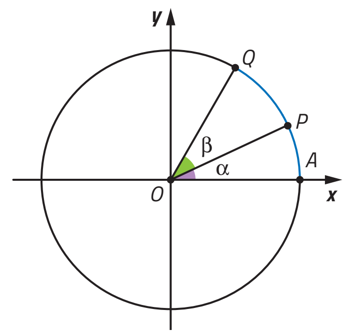
25. No esquema a seguir está representada uma roda-gigante de um parque de diversões em certo momento. Nesse esquema, o ponto *C* representa o centro da roda-gigante e cada um dos outros pontos representa uma das cabines, igualmente espaçadas entre si.



Considere que o ponto *B* corresponde à cabine mais baixa da roda-gigante e o ponto *A* corresponde a uma cabine que se encontra a 104 m da base, mesma altura do ponto *C*. A partir dessa posição, essa roda-gigante girou 1 290° no sentido anti-horário. A que altura a cabine correspondente ao ponto *A* ficou da base da roda-gigante após esse giro? 54 m

Transformação das razões trigonométricas da soma e da diferença de arcos

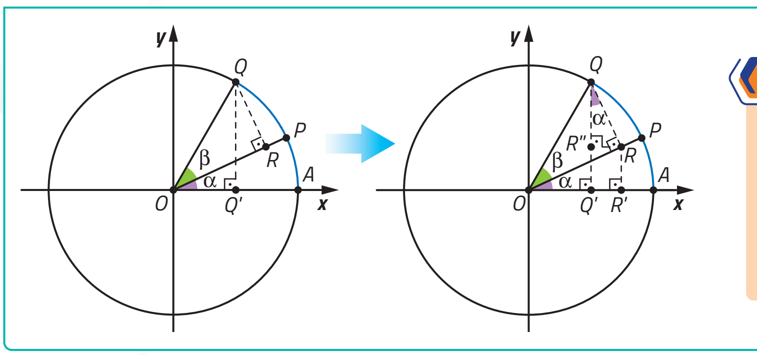
Conhecidos os valores do seno, do cosseno e da tangente de dois arcos trigonométricos de medida angular α e β, podemos determinar os valores do seno, do cosseno e da tangente da soma $(\alpha + \beta)$ e da diferença $(\alpha - \beta)$ das medidas angulares desses arcos.



Para isso, vamos considerar os arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ de medida angular α e $\alpha + \beta$, respectivamente, com extremidades no 1º quadrante do ciclo trigonométrico.

Projetando ortogonalmente o ponto Q sobre o eixo x e sobre $\overline{OP}$ obtemos os pontos Q' e R, respectivamente. Em seguida, projetando ortogonalmente o ponto R sobre o eixo x e sobre $\overline{QQ'}$ obtemos os triângulos retângulos QRR'' e ORR' semelhantes.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES



Dica

Note que:

- $OQ' = \cos(\alpha + \beta)$;
- $OR = \cos \beta$;
- $QR = \text{sen}\, \beta$.

Assim, no triângulo QRR'', temos:

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{RR''}{QR} \Rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{RR''}{\text{sen}\, \beta} \Rightarrow RR'' = \text{sen}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \beta$$

Como $R'Q' = RR''$, segue que $R'Q' = \text{sen}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \beta$.

E no triângulo ORR', temos:

$$\cos \alpha = \frac{OR'}{OR} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{OR'}{\cos \beta} \Rightarrow OR' = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

Como $OQ' = OR' - R'Q'$, obtemos:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \beta}$$

Essa relação também pode ser demonstrada para dois arcos com extremidades em outros quadrantes do ciclo trigonométrico. Utilizando-a, podemos expressar o cosseno de um arco de medida angular $(\alpha - \beta)$ da seguinte maneira:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \text{sen}\, \alpha \cdot \text{sen}(-\beta)$$

Como $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\, \beta$ e $\cos(-\beta) = \cos \beta$, obtemos:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \beta}$$

CGBEAR/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, consideramos a relação $\text{sen}\,\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e escrevemos o seno do arco de medida angular $\alpha + \beta$, conforme segue:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{sen}\,\beta$$

Como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos\alpha$, obtemos:

$$\boxed{\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}$$

Já o seno de um arco de medida angular $\alpha - \beta$ pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}[\alpha + (-\beta)] = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos(-\beta) + \text{sen}\,(-\beta) \cdot \cos\alpha$$

Logo, obtemos:

$$\boxed{\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}$$

Resta determinar uma expressão para o cálculo da tangente da soma e da diferença de dois arcos. Para isso, podemos utilizar a relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

- $\boxed{\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}}$ com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $\boxed{\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}}$ com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Resposta nas **Orientações para o professor**.

Para pensar

Juste-se a dois colegas e demonstrem as relações apresentadas da tangente da soma e da diferença de dois arcos.

Atividades resolvidas

R9. Calcule.

a) sen 105°

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

c) $\text{tg}\,\frac{\pi}{12}$

Resolução

a) $\text{sen}\,105° = \text{sen}\,(60° + 45°) = \text{sen}\,60° \cdot \cos 45° + \text{sen}\,45° \cdot \cos 60° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \text{sen}\,\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\,x =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}\,x = \frac{\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x}{2}$$

$$\text{c)}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-3-1+\sqrt{3}}{1-3}=\frac{2\sqrt{3}-4}{-2}=2-\sqrt{3}$$

R10. Mostre que $\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x-y)=\cos^2 y-\cos^2 x$.

Resolução

$\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x-y)=(\operatorname{sen}x\cdot\cos y+\operatorname{sen}y\cdot\cos x)\cdot(\operatorname{sen}x\cdot\cos y-\operatorname{sen}y\cdot\cos x)=$
$=\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 y-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y\cdot\cos x\cdot\cos y+\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}y\cdot\cos x\cdot\cos y-\operatorname{sen}^2 y\cdot\cos^2 x=$
$=\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 y-\operatorname{sen}^2 y\cdot\cos^2 x=(1-\cos^2 x)\cdot\cos^2 y-(1-\cos^2 y)\cdot\cos^2 x=$
$=\cos^2 y-\cos^2 x\cdot\cos^2 y-\cos^2 x+\cos^2 x\cdot\cos^2 y=\cos^2 y-\cos^2 x$

33. a) $\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$
33. b) $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

Atividades

Não escreva no livro

26. Calcule.

a) sen 135° $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) cos 75° $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$

d) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$

27. Resolva a expressão:

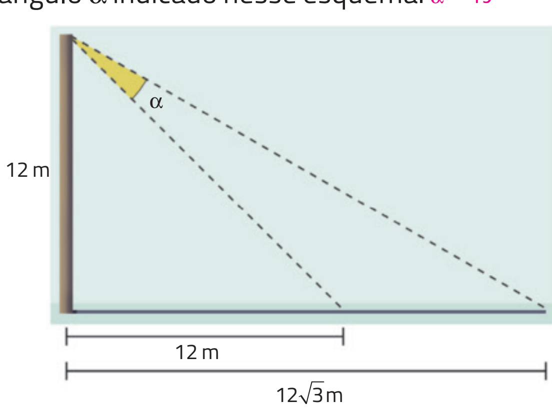
$$\frac{\operatorname{sen}15°}{\operatorname{sen}20°\cdot\cos 10°+\operatorname{sen}10°\cdot\cos 20°}\quad\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

28. Dados $\cos x=\frac{7}{25}$ e $\operatorname{tg}y=\frac{12}{5}$, com $0\text{ rad}<x<\frac{\pi}{2}$ rad, calcule:

a) $\operatorname{sen}x$ $\frac{24}{25}$

b) $\operatorname{tg}(x+y)$ $-\frac{204}{253}$

29. Em dois momentos diferentes de um dia ensolarado, as sombras projetadas por um poste de 12 m de altura tinham 12 m e $12\sqrt{3}$ m de comprimento, conforme representado no esquema a seguir. Determine a medida do ângulo α indicado nesse esquema. $\alpha=15°$



ALAN CARVALHO

30. Considere a equação $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ e resolva os itens a seguir.

a) Para quais valores de medidas angulares x essa equação é satisfeita? $x=\frac{\pi}{4}$ rad $+k\pi$ rad, $k\in\mathbb{Z}$

b) Represente, no ciclo trigonométrico, os pontos que podem ser associados às extremidades de arcos de medida angular x.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

31. Seja $q=\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}$ a razão de uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo é $a_1=\cos\frac{\pi}{4}$. Determine o limite da soma dos termos dessa PG. $\sqrt{2}$

32. Considerando $\operatorname{sen}x=\frac{4}{5}$ e $\cos x>0$, determine o valor de:

a) $\operatorname{sen}2x$ $\frac{24}{25}$

b) $\cos 2x$ $-\frac{7}{25}$

c) $\operatorname{tg}2x$ $-\frac{24}{7}$

33. Junte-se a um colega e, em cada item, mostrem que a igualdade indicada é verdadeira.

a) $\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ com $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

33. c) $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias.

As funções trigonométricas

Diversas atividades, como a pesca e a navegação, sofrem influência da variação das marés e, por isso, as pessoas utilizam o conhecimento a respeito delas. As marés são variações periódicas no nível do mar causadas, principalmente, pela atração gravitacional da Lua. Dependendo da posição e da fase da Lua, essa atração é sentida de maneira diferente em cada ponto da Terra, e, com isso, o nível e o período em que a maré ocorre também diferem de um local para o outro.

Fonte dos dados: PRESS, F. *et al.* **Para entender a Terra**. Tradução de Rualdo Menegat *et al.* Porto Alegre: Bookman, 2006. p. 436-437.

No esquema a seguir, por exemplo, há fotografias da praia de Ponta d'Areia, em São Luís (MA), em diferentes momentos do dia 9 de agosto de 2020.

ILUSTRAÇÕES: FABIO EUGENIO; FOTOGRAFIAS: MARCIO MELO/ FOTOARENA/2020

» Representação artística da variação das marés (imagem sem escala; cores-fantasia).

Para pensar

Resposta pessoal.

Descreva o que pode ser observado nas fotografias com relação à variação da maré na praia de Ponta d'Areia.

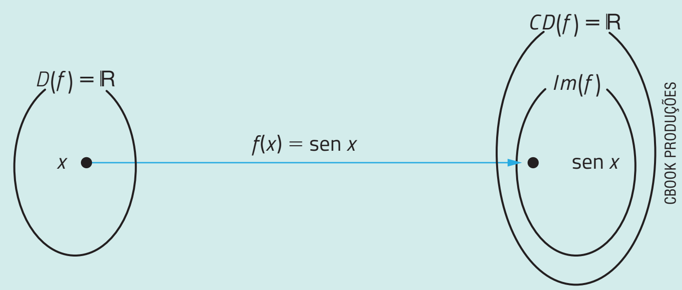
Assim como as marés, existem diversos outros fenômenos naturais cujo comportamento se repete com o tempo: movimento dos planetas, ondas sonoras, pressão sanguínea no coração, fases da Lua, ciclos menstruais, entre outros. Fenômenos com essa característica são denominados **fenômenos periódicos** e podem ser modelados por funções que envolvem razões trigonométricas.

Neste tópico, estudaremos as funções trigonométricas e algumas de suas aplicações.

Função seno

Estudamos anteriormente como associar números reais a pontos do ciclo trigonométrico e como determinar o seno de um arco trigonométrico. Agora, vamos estudar a função seno, que associa um número real x qualquer ao número real correspondente ao seno de um arco trigonométrico de medida angular x rad. Por exemplo, associamos pela função seno o número real $\frac{\pi}{6}$ ao número real $\frac{1}{2}$, pois $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Denominamos **função seno** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = \text{sen}\ x$.

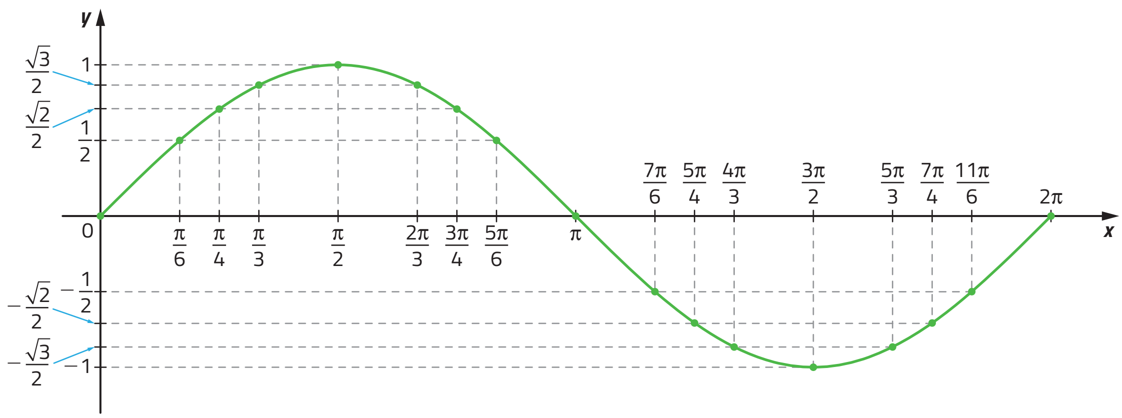


Para esboçar o gráfico da função seno, vamos atribuir alguns valores arbitrários para x e determinar $f(x) = y$, obtendo pares ordenados (x, y).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$(\pi, 0)$

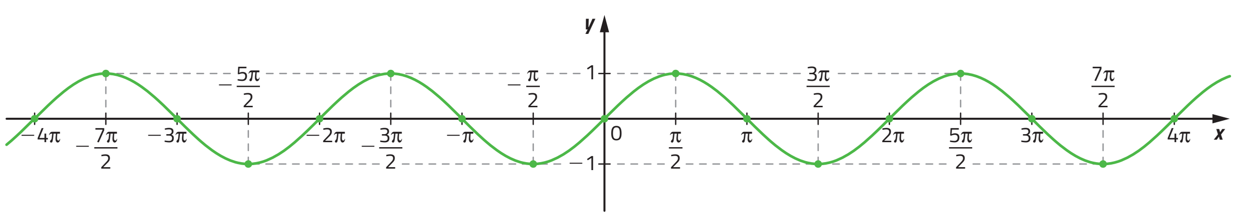
x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y = sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$(2\pi, 0)$

Como $D(f) = \mathbb{R}$, é possível obter infinitos pares ordenados (x, y) correspondentes a pontos do gráfico de f. Assim, considerando os valores que atribuímos para x, obtemos parte do gráfico de f definida no intervalo $[0, 2\pi]$.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Se considerarmos para x todos os valores reais, podemos representar todos os pontos pertencentes ao gráfico de f. Analise a seguir a curva da função f estendida para valores de x menores do que 0 e maiores do que 2π.



Podemos destacar algumas características da função $f(x) = \text{sen}\ x$:

- o domínio e o contradomínio de f são iguais a $\mathbb{R}$;
- o conjunto imagem de f é igual ao intervalo $[-1, 1]$;
- f é periódica e tem período igual a 2π;
- f é crescente para $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ e decrescente para $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) > 0$ para $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ e $f(x) < 0$ para $x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- para qualquer $x \in D(f)$, temos que $f(x) = -f(-x)$, ou seja, f é uma função ímpar. Assim, temos que $\text{sen}\ x = -\text{sen}\ (-x)$ para todo $x \in D(f)$.

Denominamos **função ímpar** toda função $f\colon A \to B$ em que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in A$. Nesse caso, o gráfico de f é simétrico em relação à origem.

Resposta esperada: Nesse intervalo, a função seno é decrescente e positiva, pois $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e no intervalo real $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ essa função é decrescente e positiva.

Para pensar

Com suas palavras, explique o que significa dizer que o período de uma função seno é igual a 2π. Resposta esperada: Significa que a função seno repete seus valores a cada período correspondente a 2π, por exemplo, nos intervalos ... $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ...

Para pensar

Reflita sobre as questões a seguir e compartilhe as respostas com os colegas. Resposta pessoal.

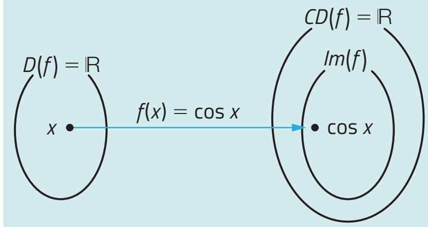
- Você conhece outra função ímpar? Qual?
- No intervalo real $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ a função seno é crescente ou decrescente? É positiva ou negativa? Justifique.

Função cosseno

Assim como ocorre com o seno, além de determinar o cosseno de um arco no ciclo trigonométrico, também podemos associar um número real x qualquer ao número real correspondente ao cosseno de um arco trigonométrico de medida angular x rad por meio da função cosseno. Por exemplo, associamos, por meio dessa função, o número real $\frac{\pi}{2}$ ao número real 0, pois $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

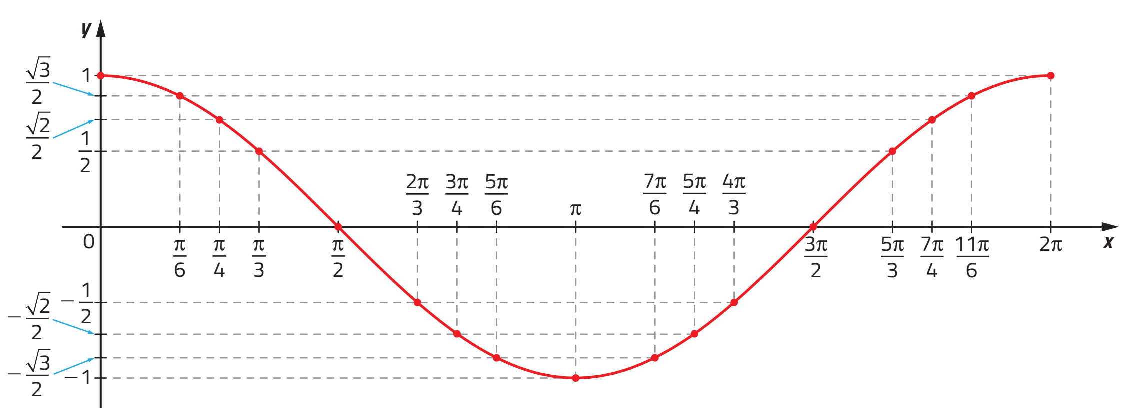
Realizando os mesmos procedimentos utilizados para esboçar o gráfico da função seno, obtemos parte do gráfico da função $f(x) = \cos x$, definida no intervalo $[0, 2\pi]$.

Denominamos **função cosseno** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela lei de formação $f(x) = \cos x$.



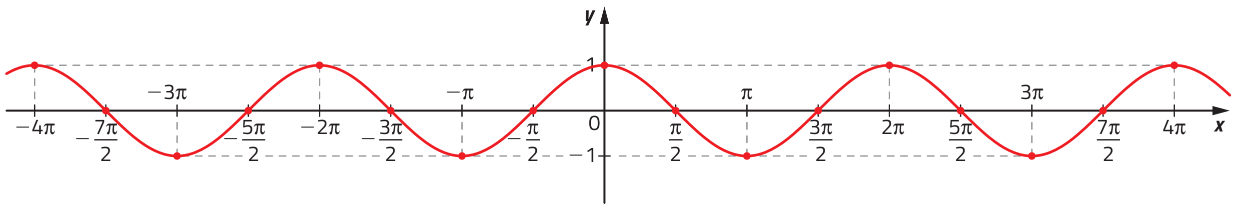
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
(x, y)	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\pi, -1)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(2\pi, 1)$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Se considerarmos para x todos os valores reais, podemos representar todos os pontos pertencentes ao gráfico de f. Analise a seguir a curva da função f estendida para valores de x menores do que 0 e maiores do que 2π.



Podemos destacar algumas características da função $f(x) = \cos x$:

- o domínio e o contradomínio de f são iguais a $\mathbb{R}$;
- o conjunto imagem de f é igual ao intervalo $[-1, 1]$;
- a função f é periódica e tem período igual a 2π;
- f é crescente para $x \in [-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ e decrescente para $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) > 0$ para $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ e $f(x) < 0$ para $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$, em que $k \in \mathbb{Z}$;
- para qualquer $x \in D(f)$, temos que $f(x) = f(-x)$, ou seja, f é uma função par. Assim, temos que $\cos x = \cos(-x)$ para todo $x \in D(f)$.

Denominamos **função par** toda função $f: A \rightarrow B$ em que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$. Nesse caso, o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.

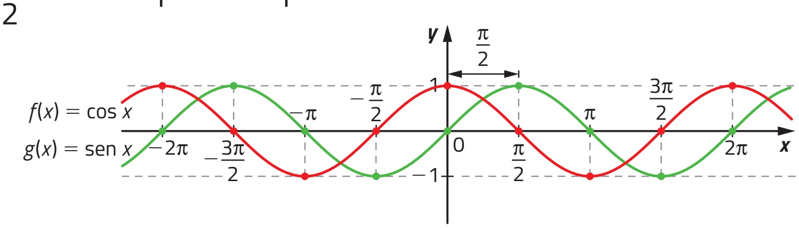
Para pensar

Reflita sobre as questões a seguir e compartilhe as respostas com os colegas.

- Você conhece outra função par? Qual? Resposta pessoal.
- No intervalo real $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right]$ a função cosseno é crescente ou decrescente? É positiva ou negativa? Justifique.

Resposta esperada: Nesse intervalo, a função cosseno é crescente e positiva, pois $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right] \subset \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e no intervalo real $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ essa função é crescente e positiva.

Note que, no plano cartesiano, o gráfico de $f(x) = \cos x$ corresponde ao gráfico de $g(x) = \text{sen } x$ transladado em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Atividades resolvidas

R11. Dada a função $f(x) = \text{sen } x$, determine para quais valores reais de m a equação $f(x) = 4m - 3$ tem solução.

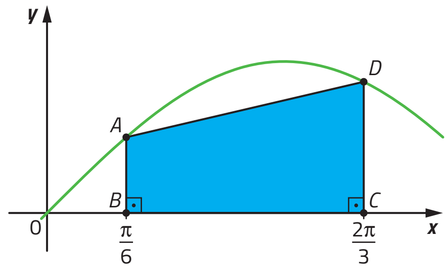
Resolução

Como $Im(f) = [-1, 1]$, temos que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Assim:

$$-1 \leqslant 4m - 3 \leqslant 1 \Rightarrow -1 + 3 \leqslant 4m \leqslant 1 + 3 \Rightarrow 2 \leqslant 4m \leqslant 4 \Rightarrow \frac{2}{4} \leqslant m \leqslant \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$$

Portanto, a equação dada tem solução para $m \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$.

R12. Na figura a seguir está representada parte do gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ e o trapézio $ABCD$, e os pontos A e D pertencem ao gráfico de f e os pontos B e C, ao eixo das abscissas. Qual a área desse trapézio?



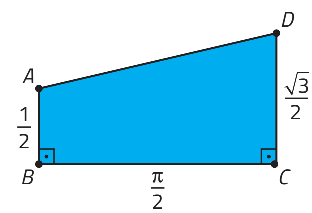
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Resolução

Inicialmente, calculamos as medidas da altura $\overline{BC}$ e das bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ do trapézio.

- $BC = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$
- $AB = \text{sen } \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$
- $DC = \text{sen } \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Calculando a área T do trapézio, obtemos:



$$T = \frac{(DC + AB) \cdot BC}{2} = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{\pi}{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)\pi}{8}$$

Portanto, o trapézio tem $\dfrac{(\sqrt{3} + 1)\pi}{8}$ unidade de área ou aproximadamente 1,07 unidade de área.

R13. Dada a função $g(x) = \cos x$, determine o valor máximo e o valor mínimo que a expressão $3 \cdot g(x) + 1$ pode assumir.

Resolução

Como $Im(g) = [-1, 1]$, a expressão $3 \cdot g(x) + 1$ tem valor máximo quando $\cos x = 1$ e tem valor mínimo quando $\cos x = -1$. Então, temos que:

- o valor máximo da expressão é dado por: $3 \cdot 1 + 1 = 4$;
- o valor mínimo da expressão é dado por: $3 \cdot (-1) + 1 = -2$.

Portanto, essa expressão pode assumir valor máximo e valor mínimo igual a 4 e a -2, respectivamente.

R14. Dadas as funções trigonométricas $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, determine para quais números reais x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, os gráficos de f e g se intersectam.

Resolução

Para que as funções se intersectem, devemos ter:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen } x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1, \text{com } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

Na 1ª volta positiva do ciclo trigonométrico, temos $\text{tg } \dfrac{\pi}{4} = 1$ e $\text{tg } \dfrac{5\pi}{4} = 1$.

Portanto, $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

37. a) Resposta esperada: No gráfico de função par, é possível identificar simetria de reflexão em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, se um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de uma função par, então o ponto $P'(-a, b)$ também pertence a esse gráfico. Já no gráfico de função ímpar, é possível identificar simetria de rotação em torno da origem O do sistema de eixos cartesianos, em 180°, ou seja, se um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de uma função ímpar, então o ponto $P'(-a, -b)$ também pertence a esse gráfico.

Atividades

Não escreva no livro

34. Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$, e calcule:

a) $f\left(\dfrac{11\pi}{2}\right)$ -1

b) $g\left(\dfrac{23\pi}{6}\right)$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

35. Para quais valores reais de x, tem-se:

a) $\text{sen}\, x = 1$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; $\dfrac{\pi}{2}$

b) $\cos x = -1$, com $-2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$; $-\pi$, π e 3π

c) $\cos x = \dfrac{1}{2}$, com $-4\pi \leqslant x \leqslant \pi$; $-\dfrac{11\pi}{3}, -\dfrac{7\pi}{3}, -\dfrac{5\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{\pi}{3}$

36. Em cada item, determine para quais valores reais de m a equação apresentada tem solução real.

a) $\text{sen}\, x = 2m + 11$ $-6 \leqslant m \leqslant -5$

b) $\cos x = 9 - m$ $8 \leqslant m \leqslant 10$

c) $\cos x = \dfrac{5m + 1}{6}$ $-\dfrac{7}{5} \leqslant m \leqslant 1$

d) $3 + \text{sen}\, x = 3m$ $\dfrac{2}{3} \leqslant m \leqslant \dfrac{4}{3}$

37. Junte-se a um colega e resolvam as questões a seguir, de acordo com os conceitos de função par e de função ímpar.

a) Descrevam a simetria que pode ser observada no gráfico de função par e no gráfico de função ímpar.

b) Escrevam a lei de formação de duas funções pares e de duas funções ímpares e justifiquem.

c) Em uma malha quadriculada ou utilizando um programa de computador, representem o gráfico de duas funções que vocês escreveram no item anterior, sendo uma função par e uma função ímpar. Resposta pessoal.

38. Em cada item a seguir, determine os valores mínimo e máximo que a expressão indicada pode assumir.

a) $\cos x + 2$ valor mínimo: 1; valor máximo: 3

b) $2 \cdot \text{sen}\, x - 5$ valor mínimo: -7; valor máximo: -3

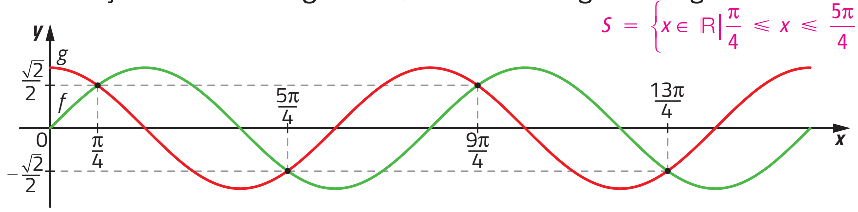
c) $\dfrac{2}{\text{sen}\, x + 2}$ valor mínimo: $\dfrac{2}{3}$; valor máximo: 2

d) $3 - 5 \cdot \cos x$ valor mínimo: -2; valor máximo: 8

39. Elabore um problema que envolva as funções seno e cosseno. Depois, troque-o com um colega para que ele resolva, enquanto você resolve aquele que ele elaborou. Ao final, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

40. Dadas as funções função $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$, para resolver a inequação $f(x) \geqslant g(x)$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$, Jéssica construiu os gráficos de f e g em um programa de computador, indicando os pontos de interseção entre esses gráficos, conforme a figura a seguir.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{9\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{13\pi}{4}\right\}$

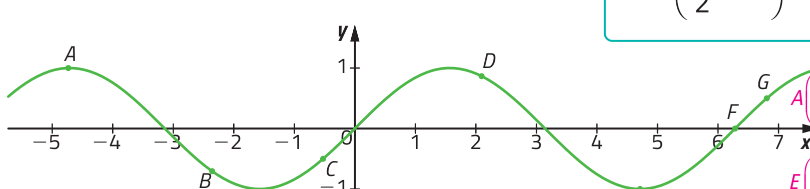


ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Qual o resultado correto obtido por Jéssica como solução da inequação?

41. No plano cartesiano a seguir está representado o gráfico da função seno e os pontos cujas coordenadas estão indicadas no quadro. Associe cada ponto às suas respectivas coordenadas.

$\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$
$\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$(2\pi, 0)$	



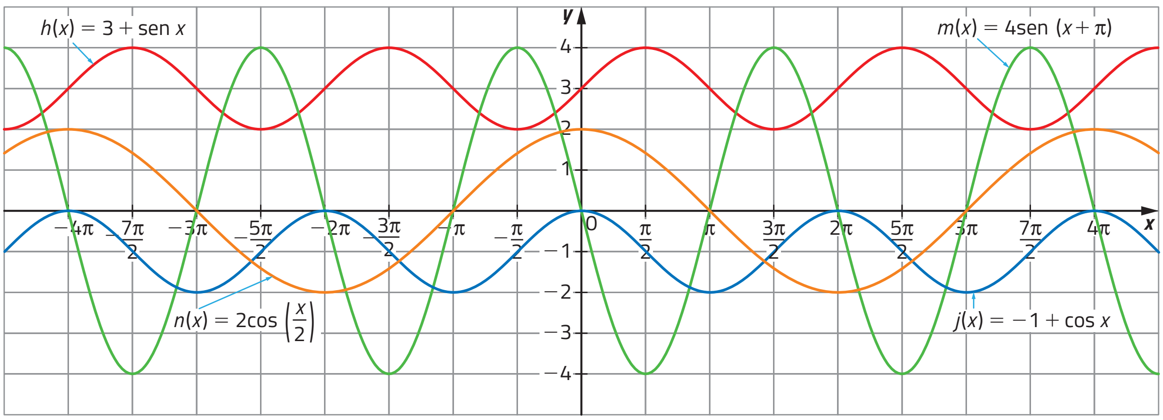
$A\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$, $B\left(-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$, $F(2\pi, 0)$ e $G\left(\dfrac{13\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$.

37. b) Algumas respostas possíveis: função par: $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$; função ímpar: $f(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = x$, $f(x) = x^3$.

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Funções do tipo trigonométricas

Analise os gráficos de algumas funções, que envolvem o seno e o cosseno, representados em um mesmo plano cartesiano.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

As funções *h*, *j*, *m* e *n*, cujos gráficos estão representados, são exemplos de funções do tipo trigonométricas.

Denominamos **função do tipo trigonométrica** aquela definida por $f(x) = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ ou $g(x) = a + b \cdot \cos (cx + d)$, em que *a*, *b*, *c* e *d* são números reais, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

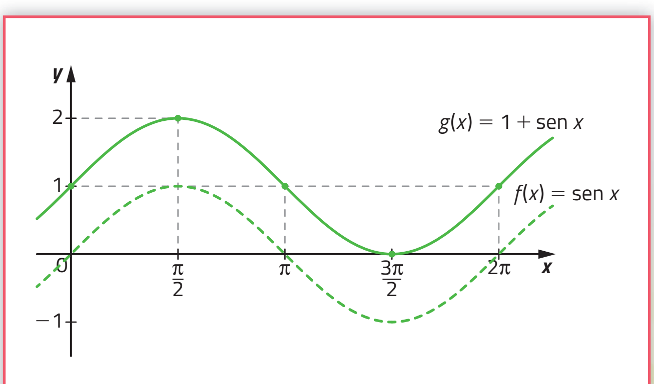
Para pensar

Compare os gráficos das funções *h* e *m* com o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ e cite semelhanças e diferenças entre eles. Faça o mesmo ao comparar os gráficos das funções *j* e *n* com o gráfico da função $g(x) = \cos x$.

Respostas pessoais.

As características do gráfico das funções do tipo trigonométricas definidas por $f(x) = a + b \cdot \text{sen } (cx + d)$ são parecidas com as do gráfico da função seno, sendo determinadas pelos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d*.

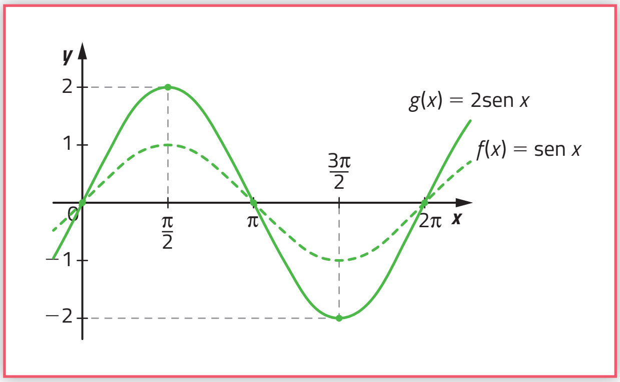
- O parâmetro *a* determina a translação do gráfico da função seno em $|a|$ unidades para cima, se $a > 0$, ou para baixo, se $a < 0$. Analise o exemplo.



CREATIVE HAT/SHUTTERSTOCK.COM

» Nesse caso, como $g(x) = 1 + \text{sen } x$, temos $a = 1$ e $|a| = 1$. Assim, o gráfico de *g* corresponde ao de $f(x) = \text{sen } x$ transladado em 1 unidade para cima, de maneira que $Im(g) = [0, 2]$.

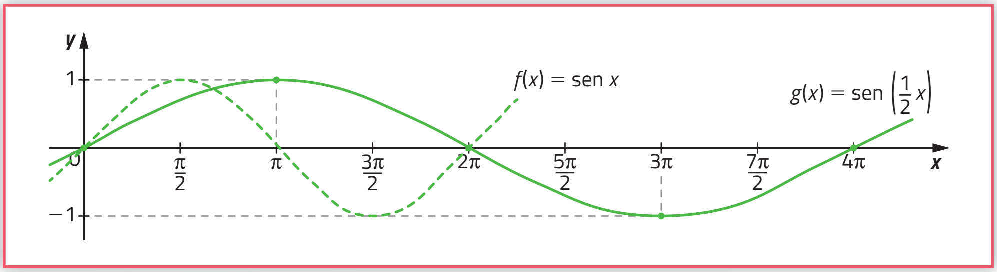
- O parâmetro b determina a ampliação vertical do gráfico da função seno se $|b| > 1$, ou sua compressão vertical, se $|b| < 1$. Analise o exemplo.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

» Nesse caso, como $g(x) = 2\text{sen}\ x$, temos $|b| = 2 > 1$. Assim, o gráfico de g corresponde a uma ampliação vertical do gráfico de $f(x) = \text{sen}\ x$, de maneira que $Im(g) = [-2, 2]$.

- O parâmetro c determina a ampliação do período da função seno se $|c| < 1$, ou a compressão de seu período, se $|c| > 1$. O período da função obtida a partir da função seno é dado por $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$. Analise o exemplo.



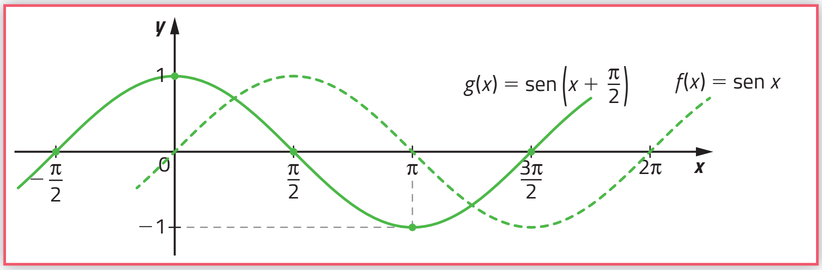
» Nesse caso, como $g(x) = \text{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)$, temos $|c| = \dfrac{1}{2} < 1$. Assim, o período de g é $p = \dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{2}\right|} = 4\pi$ e corresponde a uma ampliação do período de $f(x) = \text{sen}\ x$.

Conexões

Acesse este *site* para saber mais sobre ondas trigonométricas e realizar atividades envolvendo modelagem de fenômenos periódicos:

- ONDAS trigonométricas. Matemática Multimídia, [20--]. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1240/introducao.html. Acesso em: 20 abr. 2020.

- O parâmetro d determina a translação do gráfico da função seno em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para esquerda se $\frac{d}{c} > 0$ ou para direita, se $\frac{d}{c} < 0$. Analise o exemplo.



» Nesse caso, como $g(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, temos $\frac{d}{c} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2} > 0$ e $\left|\frac{d}{c}\right| = \frac{\pi}{2}$. Assim, o gráfico de g corresponde ao de $f(x) = \text{sen } x$ transladado em $\frac{\pi}{2}$ unidade para a esquerda.

Dica

Nas páginas **126**, **127** e **128** os exemplos apresentados comparam funções do tipo trigonométrica envolvendo a função seno. No entanto, a comparação de funções do tipo trigonométrica envolvendo a função cosseno, ocorre de maneira análoga.

Atividades resolvidas

R15. Determine o período de cada função do tipo trigonométrica definida a seguir.

a) $m(x) = 5 + \text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

b) $n(x) = 2\cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)$

Resolução

a) Como, na função m, o parâmetro $c = \frac{1}{4}$, temos que seu período é: $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 8\pi$.

b) Como, na função n, o parâmetro $c = 6$, temos que seu período é: $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$.

R16. Quais são os valores mínimo e máximo da função do tipo trigonométrica definida por:

a) $m(x) = -6 + 3\cos x$?

b) $n(x) = 4 - \frac{1}{8}\text{sen}\,(x + 2\pi)$?

Resolução

a) Considerando o menor valor que a função $f(x) = \cos x$ pode assumir, ou seja, $\cos x = -1$, obtemos:

$$-6 + 3 \cdot (-1) = -6 - 3 = -9$$

Agora, considerando o maior valor que a função $f(x) = \cos x$ pode assumir, ou seja, $\cos x = 1$, obtemos:

$$-6 + 3 \cdot 1 = -6 + 3 = -3$$

Portanto, os valores mínimo e máximo da função m são -9 e -3, respectivamente.

b) Temos que o menor e o maior valor que a função $g(x) = \text{sen } x$ pode assumir é -1 e 1, respectivamente. Assim, como $\text{sen}\,(x + 2\pi)$ corresponde à função g transladada 2π unidades para a esquerda, temos que $\text{sen}\,(x + 2\pi)$ também tem valor mínimo e máximo igual a -1 e 1, respectivamente. Logo:

- $4 - \frac{1}{8} \cdot (-1) = 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$;
- $4 - \frac{1}{8} \cdot 1 = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8}$.

Portanto, os valores mínimo e máximo da função n são $\frac{31}{8}$ e $\frac{33}{8}$, respectivamente.

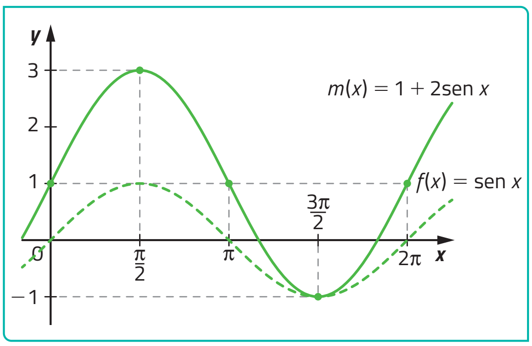
R17. Esboce os gráficos das funções do tipo trigonométricas definidas a seguir.

a) $m(x) = 1 + 2\text{sen}\,x$

b) $n(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Resolução

a) Analisando os parâmetros de m, temos que $a = 1$, $|b| = |2| > 1$, $c = 1$ e $d = 0$. Assim, o gráfico de m corresponde ao gráfico da função seno transladado 1 unidade para cima e ampliado verticalmente.
Para esboçar o gráfico de m, atribuímos alguns valores convenientes para x, obtemos pares ordenados (x, y) e representamos os pontos com essas coordenadas no plano cartesiano.

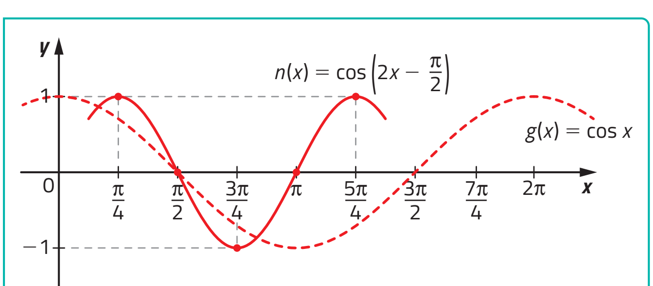


» Note que, nesse caso, o valor mínimo e o valor máximo da função m são -1 e 3, respectivamente. Assim, $Im(m) = [-1, 3]$.

x	$y = m(x) = 1 + 2\,\text{sen}\,x$	(x, y)
0	$y = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1$	$(0, 1)$
$\dfrac{\pi}{2}$	$y = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$
π	$y = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,\pi = 1 + 2 \cdot 0 = 1$	$(\pi, 1)$
$\dfrac{3\pi}{2}$	$y = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2} = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$	$\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$
2π	$y = 1 + 2 \cdot \text{sen}\,2\pi = 1 + 2 \cdot 0 = 1$	$(2\pi, 1)$

b) Analisando os parâmetros de n temos que $a = 0$, $b = 1$, $|c| = |2| > 1$ e $\dfrac{d}{c} = \dfrac{-\frac{\pi}{2}}{2} = -\dfrac{\pi}{4} < 0$.

Assim, o gráfico de n corresponde ao gráfico da função cosseno comprimido horizontalmente, com período igual a $p = \dfrac{2\pi}{|c|} = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$ e transladado $\left|\dfrac{d}{c}\right| = \left|-\dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\pi}{4}$ unidade para a direita.
Para esboçar o gráfico de n, podemos atribuir valores a x de maneira que $2x - \dfrac{\pi}{2}$ seja igual a 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ e 2π.



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

» Note que, nesse caso, o valor mínimo e o valor máximo da função n são -1 e 1, respectivamente. Assim, $Im(n) = [-1, 1]$.

x	$y = n(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$	(x, y)
$\dfrac{\pi}{4}$	$y = \cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$
$\dfrac{\pi}{2}$	$y = \cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$
$\dfrac{3\pi}{4}$	$y = \cos\left(2 \cdot \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$	$\left(\dfrac{3\pi}{4}, -1\right)$
π	$y = \cos\left(2 \cdot \pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$(\pi, 0)$
$\dfrac{5\pi}{4}$	$y = \cos\left(2 \cdot \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$	$\left(\dfrac{5\pi}{4}, 1\right)$

42. Determine o período da função definida por:

a) $f(x) = 9\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 2π

b) $g(x) = 3 - \text{sen}\,(8x + \pi)$ $\frac{\pi}{4}$

c) $m(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 8

d) $n(x) = -2 + 5\cos\left(\frac{x + \pi}{3}\right)$ 6π

43. Em cada item, determine o conjunto imagem da função indicada.

a) $f(x) = 7\cos(-x + 2\pi)$ $Im(f) = [-7, 7]$

b) $g(x) = 5 + 8\,\text{sen}\left(\frac{x}{6}\right)$ $Im(g) = [-3, 13]$

c) $m(x) = 4 - 4\,\text{sen}\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right)$ $Im(m) = [0, 8]$

d) $n(x) = 2 + |\cos x|$ $Im(n) = [2, 3]$

44. Utilizando o **GeoGebra**, foi construído o gráfico da função $f(x) = \cos x$. Em seguida, a lei de formação dessa função foi ajustada de maneira a obter uma função g com conjunto imagem igual a $[-5, -1]$, período igual a $\frac{\pi}{3}$ e cujo gráfico corresponde ao de f transladado π unidades para a esquerda e 3 unidades para baixo. Nessas condições, a lei de formação da função g pode ser: alternativa **d**

a) $g(x) = -4 - \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)$;

b) $g(x) = 4 - 3\cos\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$;

c) $g(x) = 3 + 4\cos(3x + \pi)$;

d) $g(x) = -3 - 2\cos(6x + 6\pi)$.

45. Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\,x$. Escreva a lei de formação de uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico corresponda ao gráfico de f transladado verticalmente para cima e horizontalmente para a direita, comprimido horizontalmente e ampliado verticalmente. Em seguida, represente os gráficos das funções f e g em um mesmo plano cartesiano e troque-o com um colega para que um avalie a produção do outro. Resposta pessoal.

46. Esboce o gráfico de cada função do tipo trigonométrica definida a seguir. Resposta nas **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = 2\,\text{sen}\,(4x)$

b) $g(x) = -3 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $m(x) = 4 + 3\cos(2x - \pi)$

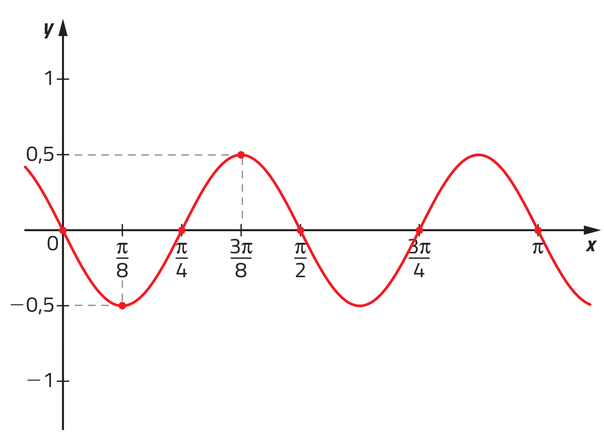
d) $n(x) = 1 - 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

47. Considere as funções $f(x) = \text{sen}\,(x - \pi)$ e $g(x) = \frac{1}{4}\text{sen}\,x$ definidas no intervalo real $[0, 2\pi]$, e resolva as questões.

a) Represente os gráficos das funções f e g em um mesmo plano cartesiano.
Resposta nas **Orientações para o professor**.

b) Os gráficos que você representou no item anterior se intersectam em algum ponto? Em quantos pontos? Sim. Em três pontos.

48. Analise o gráfico da função do tipo trigonométrica f representado a seguir.



CBOOK PRODUÇÕES

Considerando que a lei de formação dessa função pode ser expressa por $f(x) = \alpha\cos(\beta x + \gamma)$, é possível ter: alternativa **c**

a) $\alpha = 1$, $\beta = 8$ e $\gamma = 2\pi$.

b) $\alpha = -1$, $\beta = 4$ e $\gamma = -\frac{\pi}{4}$

c) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -4$ e $\gamma = \frac{\pi}{2}$

d) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 4$ e $\gamma = \frac{\pi}{8}$

Funções do tipo trigonométricas: algumas aplicações

Já comentamos que diversos fenômenos periódicos podem ser modelados por funções do tipo trigonométricas. Isso se dá, pois existem na natureza e nas produções tecnológicas humanas diferentes situações que envolvem oscilações e movimentos que se repetem periodicamente. Por exemplo, em um barco ancorado que flutua subindo e descendo com as ondas, nos pistões do motor de um veículo que se movimentam de forma alternada para cima e para baixo, na vibração produzida ao tocar a corda de um violão e até no deslocamento de partículas de ar durante a propagação de uma onda sonora.

Para explorarmos um pouco mais situações como essas, estudaremos por meio de atividades resolvidas e propostas, alguns desses fenômenos.

Atividades resolvidas

R18. Estudamos que a maré é um tipo de fenômeno periódico natural que influencia o cotidiano das populações litorâneas e a realização de atividades, como a pesca e a navegação. Nos projetos de construção de portos, por exemplo, a variação no nível do mar é um dos fatores considerados para determinar como serão as estruturas e instalações. Essa variação também implica diretamente nos aspectos operacionais dos portos, o que torna comum a consulta das previsões de marés no exercício de atividades portuárias.

Observe uma previsão de marés em certo porto.

» **Previsões de marés, preamar (mais alta) e baixa-mar (mais baixa), no Porto de Guamaré (RN) de 26 de março de 2020**

Horário	Altura (m) em relação ao nível do mar
0h04	0,3
6h04	2,4
12h17	0,3
18h26	2,4

Fonte dos dados: BRASIL. Marinha do Brasil. Centro de Hidrografia da Marinha. **Tábuas de maré**. Disponível em: https://www.marinha.mil.br/chm/sites/www.marinha.mil.br.chm/files/dados_de_mare/guamare_2020.pdf. Acesso em: 13 jun. 2020.


ROBERTO EPIFANIO/SHUTTERSTOCK.COM

» Região portuária de Guamaré (RN). Fotografia de 2017.

Arredondando cada horário desses para a hora inteira mais próxima, determine uma função do tipo trigonométrica para expressar, nesse dia, a altura estimada da maré (h) em relação ao tempo (t).

Resolução

Arredondando cada horário para a hora inteira mais próxima, temos que, no dia 26/3/2020, as preamares ocorreram por volta de 6h e 18h, e as baixa-mares por volta de 0h e 12h.

Podemos utilizar uma função expressa por $h(t) = a + b \cdot \cos(ct + d)$.

Quando $t = 0$, temos $h(0) = 0{,}3$, que corresponde ao valor mínimo que a função pode assumir. Assim, podemos considerar $d = 0$.

Além disso, temos que:

$$h(0) = 0{,}3 \Rightarrow a + b \cdot \cos 0 = 0{,}3 \Rightarrow a + b = 0{,}3$$

Sabendo que os valores máximo e mínimo que $\cos(ct + d)$ pode assumir são 1 e -1, respectivamente, segue que:

$$\begin{cases} a + b \cdot 1 = 0{,}3 \\ a + b \cdot (-1) = 2{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0{,}3 & (\mathrm{I}) \\ a - b = 2{,}4 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

De **I**, temos $a = 0{,}3 - b$. Substituindo essa equação em **II**, obtemos:

$$0{,}3 - b - b = 2{,}4 \Rightarrow 2b = -2{,}1 \Rightarrow b = -1{,}05$$

Logo:

$$a = 0{,}3 - (-1{,}05) = 1{,}35$$

Agora, como o intervalo de tempo entre uma preamar e uma baixa-mar (ou vice-versa) é de 6h, temos que o período da função é de 12h. Assim, temos:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow 12 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{12} \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{6} \Rightarrow c = \pm\frac{\pi}{6}$$

Portanto, a função que expressa a altura da maré em relação ao tempo, nesse dia, pode ser expressa por $h(t) = 1{,}35 - 1{,}05\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ ou $h(t) = 1{,}35 - 1{,}05\cos\left(-\frac{\pi}{6}t\right)$

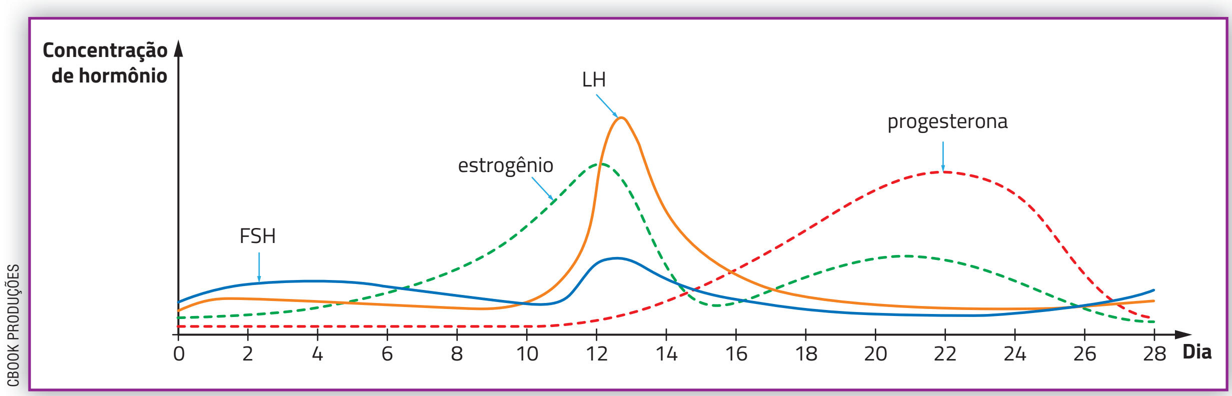
Para pensar

Em um *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**, represente o gráfico de uma das funções obtidas. Resposta pessoal.

R19. Nas mulheres adultas, em condições normais, a produção de gametas não ocorre de maneira homogênea, mas em ciclos chamados ciclos menstruais. Os principais responsáveis por controlar o ciclo menstrual são os hormônios foliculestimulantes (FSH) e luteinizante (LH), que estimulam a produção dos hormônios sexuais femininos estrogênio e progesterona, respectivamente.

Durante um ciclo menstrual ocorrem grandes variações dos níveis desses hormônios no organismo feminino. Analise, no gráfico a seguir, por exemplo, a concentração de cada hormônio durante um desses ciclos.

» Concentração dos hormônios FSH, LH, estrogênio e progesterona, durante um ciclo menstrual



Fonte dos dados: TORTORA, G. J.; DERRICKSON, B. **Princípios de anatomia e fisiologia**. Tradução de Ana Cavalcanti C. Botelho *et al.* Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2016. p. 1 457-1 463.

Sabendo que, no gráfico, quando $x = 0$ indica o início do ciclo menstrual, responda:

a) Qual a duração média de um ciclo menstrual?

b) Em geral, costuma-se dividir o ciclo menstrual em três fases: fase folicular, ovulação e fase luteínica. A fase luteínica, por exemplo, ocorre no período entre a ovulação, no 14º dia, e o último dia do ciclo. Suponha que, nessa fase de um ciclo menstrual regular de certa mulher, a concentração máxima de progesterona seja de 10 ng/mL no 22º dia do ciclo. Qual das funções a seguir melhor expressa a concentração de progesterona nas fases luteínicas do ciclo menstrual dessa mulher?

I) $f(x) = 1 + \text{sen}\,(\pi x + 10\pi)$ II) $g(x) = 1 - 9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x\right)$ III) $h(x) = 10\cos\left(\frac{\pi}{7}x - \frac{13\pi}{14}\right)$

c) Considerando a função que você indicou no item anterior, determine o erro da concentração de progesterona no 22º dia do ciclo menstrual daquela mulher em relação à quantidade indicada no enunciado.

Resolução

a) Analisando os valores indicados no eixo horizontal do gráfico, temos que a duração média de um ciclo menstrual é de 28 dias.

b) Inicialmente, podemos determinar o valor máximo de cada função.

- $f(x) = 1 + \underbrace{\text{sen}\,(\pi x + 10\pi)}_{1} = 1 + 1 = 2$
- $g(x) = 1 - 9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x\right) = 1 + 9 \cdot \underbrace{\left[-\text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x\right)\right]}_{1} = 1 + 9 \cdot 1 = 10$
- $h(x) = \underbrace{10\cos\left(\frac{\pi}{7}x - \frac{13\pi}{14}\right)}_{1} = 10 \cdot 1 = 10$

Em seguida, podemos calcular o valor de cada função quando $x = 22$.

- $f(22) = 1 + \text{sen}\,(\pi \cdot 22 + 10\pi) = 1 + \text{sen}\,(32\pi) = 1 + 0 = 1$
- $g(22) = 1 - 9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{14} \cdot 22\right) = 1 - 9\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{7}\right) \simeq 1 - 9 \cdot (-0{,}97) = 9{,}73$
- $h(22) = 10\cos\left(\frac{\pi}{7} \cdot 22 - \frac{13\pi}{14}\right) = 10 \cdot \cos\left(\frac{31\pi}{14}\right) \simeq 10 \cdot 0{,}78 = 7{,}8$

Agora, podemos determinar e analisar o período de cada função.

- $p_f = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$
- $p_g = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{14}\right|} = 2\pi \cdot \frac{14}{\pi} = 28$
- $p_h = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{7}\right|} = 2\pi \cdot \frac{7}{\pi} = 14$

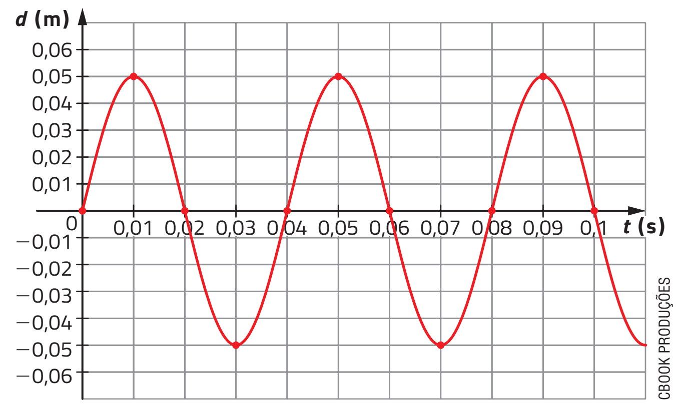
Portanto, dentre as funções apresentadas, a função g é a que melhor modela a situação, ou seja, que melhor expressa a concentração de progesterona nas fases luteínicas do ciclo menstrual da mulher considerada, uma vez que a concentração máxima de progesterona, o período e a concentração de progesterona no 22º dia, obtidos com essa função, mais se aproximam dos valores reais apresentados.

c) Como $g(22) \simeq 9{,}73$ e a concentração máxima de progesterona dessa mulher é de 10 ng/mL no 22º dia do ciclo, temos que o erro obtido com a função g para a concentração desse hormônio nesse dia é de aproximadamente $10 - 9{,}73 = 0{,}27$, ou seja, 0,27 ng/mL.

R20. As ondas sonoras (sons e ruídos, por exemplo) são formadas por vibrações que se propagam em meios materiais, mas não no vácuo. Tais ondas podem ser modeladas por uma função do tipo trigonométrica ou por uma soma de funções desse tipo, com parâmetros associados a características importantes dessa onda, como amplitude e frequência. A amplitude da onda sonora é a altura de uma crista (ponto mais alto da onda) em relação ao nível de equilíbrio. Já a frequência é a quantidade de oscilações da onda sonora por unidade de tempo estabelecida.

Fonte dos dados: HALLIDAY, D. *et al.* **Fundamentos de física**: gravitação, ondas e termodinâmica. Tradução de Ronaldo S. de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 2, p. 117-120.

Observe o gráfico de um modelo matemático obtido a partir de uma onda sonora visualizada em um osciloscópio, que mostra o deslocamento das partículas de ar em função do tempo.



Podemos afirmar que a amplitude e a frequência da onda representada pelo modelo matemático são, respectivamente, iguais a:

a) 0,1 m e 0,04 ciclo/s.

b) 0,1 m e 30 ciclos/s.

c) 0,05 m e 25 ciclos/s.

d) 0,05 m e 0,02 ciclo/s.

Resolução

No gráfico do modelo matemático, podemos observar que a amplitude da onda é $|0{,}05 - 0| = 0{,}05$, ou seja, 0,05 m.

A onda completa uma oscilação ou um ciclo em 0,04 s. Assim, a frequência f, em ciclos por segundos, da onda representada pela função é:

$$f = \frac{1}{0{,}04} = 25\text{; ou seja, 25 ciclos/s}$$

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

Dica

A onda sonora representada se repete ao longo do tempo. Esse trecho da onda que se repete é chamado de ciclo e equivale a uma oscilação.

No gráfico, as escalas dos eixos são diferentes.

Atividades

Não escreva no livro

49. No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de medida utilizada para expressar a frequência de um fenômeno periódico é o hertz (Hz), que corresponde à quantidade de ciclos por segundo.

Sabendo que os seres humanos conseguem ouvir ondas sonoras com frequências entre 20 Hz e 20 000 Hz, determine qual das funções a seguir, com $D(y) = \mathbb{R}_+$, pode descrever uma onda sonora que seja audível por uma pessoa.

a) $y(t) = 4\text{sen}\,(30\pi t)$ alternativa **b**

b) $y(t) = 0{,}06\cos\left(240\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y(t) = -0{,}1\cos\,(20\pi t)$

d) $y(t) = 0{,}03\,\text{sen}\left(\frac{151\pi t + \pi}{4}\right)$

50. (IFBA) Há milhares de anos, os homens sabem que a Lua tem alguma relação com as marés. Antes do ano 100 a.C., o naturalista romano Plínio escreveu sobre a influência da Lua nas marés. Mas as leis físicas desse fenômeno não foram estudadas até que o cientista inglês Isaac Newton descobriu a lei da gravitação no século XVII.

As marés são movimentos de fluxo e refluxo das águas dos mares provocados pela atração que a Lua e secundariamente o Sol exercem sobre os oceanos. Qualquer massa de água, grande ou pequena, está sujeita às forças causadoras de maré provindas do Sol e da Lua. Porém é somente no ponto em que se encontram os oceanos e os continentes que as marés têm grandeza suficiente para serem percebidas. As águas dos rios e lagos apresentam subida e descida tão insignificante que a diferença é inteiramente disfarçada por mudanças de nível devidas ao vento e ao estado do tempo.

Extraído de: http://planetario.ufsc.br/mares/em 26/08/2016.

Sendo a maré representada por uma função periódica, e supondo que a função que descreve melhor o movimento da maré em Salvador - BA é dada pela expressão:

$A(t) = 1{,}8 + 1{,}2\text{sen}\,(0{,}5\pi t + 0{,}8\pi)$, t é o tempo em horas $0 \leqslant t \leqslant 24$.

Sendo assim, as alturas máxima e mínima da maré descrita pela função $A(t)$ são, respectivamente: alternativa a

a) 3,0 m e 0,6 m
b) 3,0 m e 0,8 m
c) 2,5 m e 0,6 m
d) 2,5 m e 0,8 m
e) 2,8 m e 0,6 m

51. No corpo humano, o sangue flui de regiões de maior pressão para regiões de menor pressão, bombeado pelo coração. A contração dos **ventrículos** produz a pressão arterial, ou seja, a pressão que o sangue exerce nas paredes de um vaso sanguíneo. Em um adulto jovem em repouso, a frequência cardíaca é de cerca de 75 batimentos por minuto (bpm), a pressão arterial sobe para cerca de 110 mmHg durante a sístole (contração ventricular) e cai para cerca de 70 mmHg durante a diástole (relaxamento ventricular).

Ventrículo: câmara de bombeamento inferior do coração. O par de ventrículos ejetam o sangue do coração para vasos sanguíneos chamados artérias.

Fonte dos dados: TORTORA, G. J., DERRICKSON, B. **Princípios de anatomia e fisiologia**. Tradução de Ana Cavalcanti C. Botelho *et al.* Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2016.

Utilizando os dados apresentados anteriormente, um pesquisador elaborou o seguinte modelo matemático que expressa a pressão arterial (p), em mmHg, em função do tempo (t), em segundo:

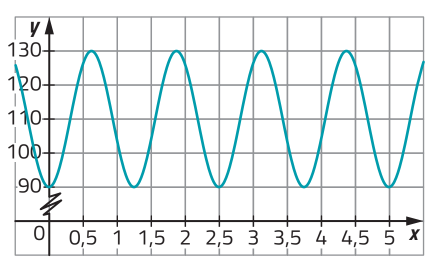
$\boxed{p(t) = A + B \cdot \cos\,(kt)}$, sendo A, B e k constantes reais não nulas.

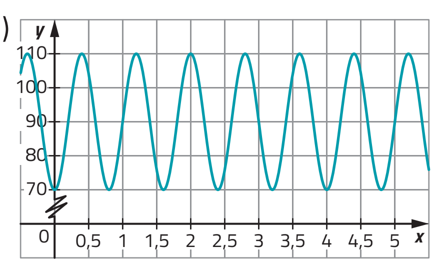
a) Escreva a lei de formação dessa função.
$p(t) = 90 + 20 \cdot \cos\,(2{,}5\pi t)$

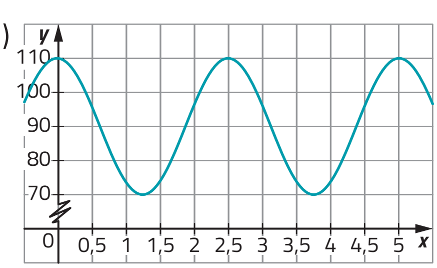
Dica

Para determinar o período dessa função, é possível calcular o tempo médio de cada batimento, em segundos, uma vez que o ciclo cardíaco correspondente à pressão arterial se repete a cada batimento.

b) Qual dos gráficos a seguir melhor representa a função cuja lei de formação você escreveu no item **a**? II

I)


II)


III)


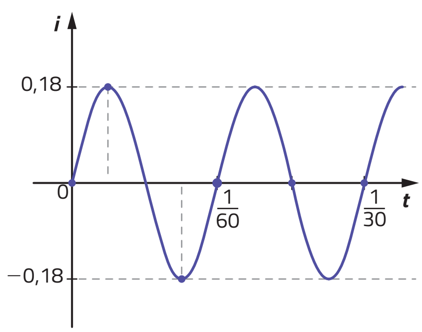
ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

52. Uma corrente elétrica corresponde a um movimento de partículas carregadas. Quando essas partículas se movimentam em direções diferentes, temos uma corrente elétrica alternada. Em um circuito, podemos calcular a corrente elétrica alternada i (em ampere) no instante t (em segundo) pela seguinte função:

$\boxed{i(t) = I \cdot \text{sen}\,(\omega t + \phi)}$, em que I é a amplitude da corrente, ω é a frequência angular das oscilações e ϕ é a constante de fase.

Fonte dos dados: HALLIDAY, D. *et al.* **Fundamentos de física**: eletromagnetismo. Tradução de Ronaldo S. de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 3, p. 314-315.

Em um programa de computador, um professor representou o gráfico de uma função dada por $i(t) = I \cdot \text{sen}\,(\omega t + \phi)$, com I, ω e ϕ não negativos, que expressa a corrente elétrica alternada em um circuito. Analise esse gráfico e resolva as questões.



a) Qual o valor máximo dessa corrente elétrica alternada? E o valor mínimo?

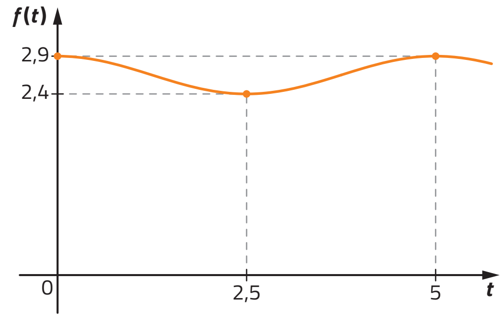
b) Determine a amplitude dessa corrente elétrica e a frequência angular das oscilações.

c) Escreva a lei de formação da função representada no gráfico. $i(t) = 0{,}18 \cdot \text{sen}\,(120\pi t)$

d) Qual o valor da corrente elétrica para $t = 1$? E para $t = \frac{241}{240}$? 0 ampere; 0,18 ampere

53. Leia com atenção a situação apresentada a seguir.

Em repouso, o volume de ar nos pulmões de um adulto saudável pode ser modelado por uma função do tipo $f(t) = a + b \cdot \text{sen}\,(ct + d)$, em que a, b, c e d são constantes reais positivas e t é o tempo, em segundos. Analise a seguir o gráfico dessa função.



Fonte dos dados: TORTORA, G. J., DERRICKSON, B. **Princípios de anatomia e fisiologia**. Tradução de Ana Cavalcanti C. Botelho *et al.* 14 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2016.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Com base nessas informações, elabore um problema que envolva função do tipo trigonométrica. Em seguida, troque seu problema com um colega para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

54. Junte-se a um colega e leiam o poema a seguir.

Pôr do Sol Trigonométrico

Oscila a onda
Baixa a maré
Vem o pôr do sol
A noite cai
O pêndulo marca a hora
Chega a onda sonora
Os fenómenos sucedem-se em
ritmos amenos
Os ciclos repetem-se com simetria
O cientista estudou
E tudo são senos e co-senos
Da trigonometria

NEVES, M. A. F. Pôr do Sol Trigonométrico. **Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa**, Lisboa, [20--]. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm22/indeccccx.htm. Acesso em: 6 set. 2020.

Agora, pesquisem aplicações de funções do tipo trigonométricas em um contexto que envolva fenômenos periódicos, diferentes dos apresentados nesta Unidade. Depois, redijam um texto explicitando as relações entre os conceitos estudados até aqui e o poema apresentado, descrevendo a relação entre o contexto pesquisado e as funções do tipo trigonométricas. Podem ser adicionados ao texto gráficos construídos no **GeoGebra**. Resposta pessoal.

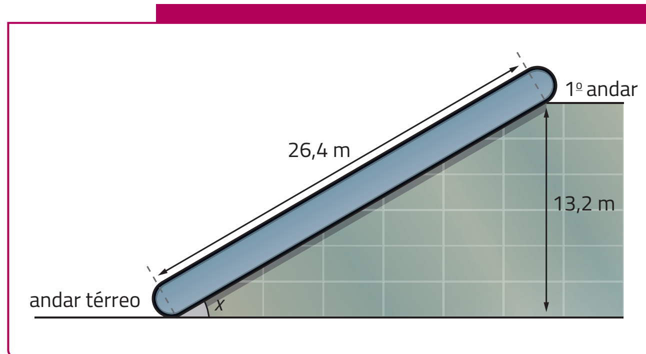
52. a) 0,18 ampere; $-0{,}18$ ampere
b) $I = 0{,}18$; $\omega = 120\pi$

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Equações trigonométricas

Leia a situação descrita a seguir.

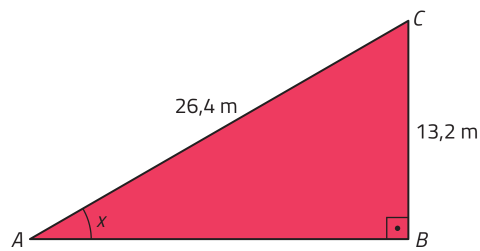
Em certa fábrica, será instalada uma esteira rolante com 26,4 m de comprimento para transportar cargas do andar térreo para o 1º andar, entre os quais há um desnível de 13,2 m, conforme representado no esquema. Qual deve ser o ângulo de inclinação dessa esteira?



BENTINHO

Para resolver esse problema, podemos utilizar a razão seno em relação ao triângulo retângulo *ABC* formado e escrever a seguinte equação:

$$\text{sen } x = \frac{13{,}2}{26{,}4} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$$



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

Como x, nesse caso, corresponde à medida de um ângulo agudo, concluímos que $x = 30°$.

Portanto, o ângulo de inclinação da esteira rolante deve ser de 30°.

Equações como essa, ou seja, que envolvem razões ou funções trigonométricas, são denominadas **equações trigonométricas**. Observe alguns exemplos de equações trigonométricas.

- $\text{sen } \alpha = 1$
- $\text{sen } \beta + 5 = 3\sqrt{2}$
- $2 \cdot \cos \alpha = \sqrt{2}$
- $\dfrac{\cos \alpha}{4} = \dfrac{1}{8}$

Atividade resolvida

R21. Resolva as equações trigonométricas em $\mathbb{R}$.

a) $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

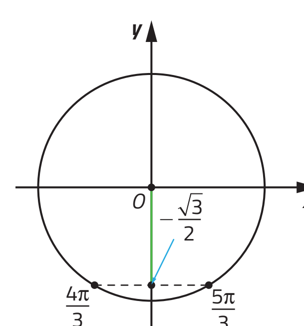
b) $\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}$

Resolução

a) Na 1ª volta positiva do ciclo trigonométrico, temos $\text{sen } \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, a solução da equação é dada por:

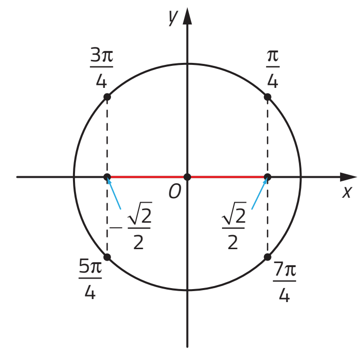
- $x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$
- $x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.



b) $\cos^2 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Na 1ª volta positiva do ciclo trigonométrico, temos $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



CBOOK PRODUÇÕES

Como $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2 \cdot \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 3 \cdot \dfrac{\pi}{2}$, a solução da equação é dada por:

$$2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

55. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

55. b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Atividades

Não escreva no livro

55. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações trigonométricas a seguir.

a) $\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 0$

b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 3 = \dfrac{5}{2}$

c) $\text{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3} + x\right) = -1$

d) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

56. Em cada item a seguir, resolva a equação de acordo com o intervalo indicado.

a) $\text{sen}^2 x = 1$, para $x \in [0, 2\pi[$ $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

b) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$, para $x \in [-\pi, \pi]$ $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$

c) $\text{sen}^2 x + \cos x = 1$, para $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right[$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ou 2π

d) $\text{sen } x \cdot \cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos x$, para $x \in]2\pi, 4\pi]$ $\frac{11\pi}{4}$ ou $\frac{15\pi}{4}$

57. Sem realizar cálculos por escrito, determine quantas raízes reais possui a equação $2 \cdot \cos x = \sqrt{2}$, para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$. 3 raízes reais

58. Em certo triângulo retângulo, o comprimento da hipotenusa corresponde ao dobro do comprimento de um dos catetos. Determine as medidas, em graus, dos ângulos internos desse triângulo retângulo. 30°, 60° e 90°

59. (Insper-SP) Ao longo de um ano, a taxa de câmbio de uma moeda X em relação a uma moeda Y foi dada pela seguinte função:

$$f(t) = 1{,}625 + 1{,}25 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right)$$

sendo t o tempo, dado em meses desde o início do ano. Assim, $t = 9$ indica a taxa no início de outubro, que era de 1,625 unidades da moeda X para uma unidade da moeda Y (note que esse valor da taxa indica que no instante considerado a moeda X era "menos valiosa" que a moeda Y).

Ao longo do ano analisado, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y atingida e o instante em que isso ocorreu foram, respectivamente, alternativa **d**

a) 2,625 e início de janeiro.
b) 2,625 e início de março.
c) 2,875 e início de janeiro.
d) 2,875 e início de abril.
e) 2,875 e início de junho.

60. Junte-se a um colega e pensem em alguma situação que possa ser expressa por meio de uma equação trigonométrica. Se necessário, façam uma breve pesquisa. Depois, elaborem uma situação-problema em que seja necessário resolver uma equação trigonométrica para um intervalo específico. Ao final, troquem a atividade elaborada com outra dupla, para que uma dupla resolva a da outra, e confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

55. c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

55. d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Duração solar do dia

Você sabia que no decorrer do ano a duração solar do dia – período de claridade em que é possível observar o Sol – costuma variar nas diferentes localidades do planeta Terra? Esse fato influencia diversas atividades, inclusive a produção de energia solar. Leia o texto a seguir.

[...]

Quase todas as fontes de energia – hidráulica, biomassa, eólica, combustíveis fósseis e energia dos oceanos – são formas indiretas de energia solar. Além disso, a radiação solar pode ser utilizada diretamente como fonte de energia térmica, para aquecimento de fluidos e ambientes e para geração de potência mecânica ou elétrica. Pode ainda ser convertida diretamente em energia elétrica, por meio de efeitos sobre determinados materiais, entre os quais se destacam o termoelétrico e o fotovoltaico.

[...]

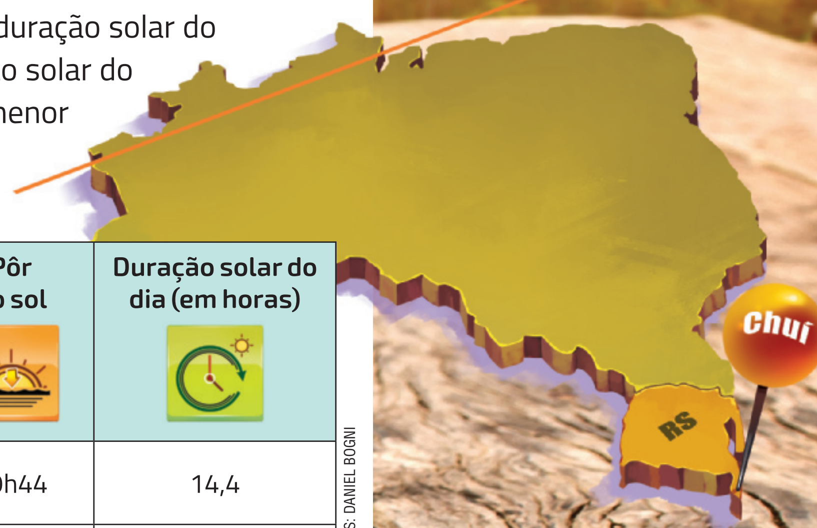
Além das condições atmosféricas (nebulosidade, umidade relativa do ar etc.), a disponibilidade de radiação solar, também denominada energia total incidente sobre a superfície terrestre, depende da latitude local e da posição no tempo (hora do dia e dia do ano). [...]

A maior parte do território brasileiro está localizada relativamente próxima da linha do Equador, de forma que não se observam grandes variações na duração solar do dia. Contudo, a maioria da população brasileira e das atividades socioeconômicas do País se concentra em regiões mais distantes do Equador. [...]

BRASIL. Ministério de Minas e Energia. Agência Nacional de Energia Elétrica. **Energia Solar**. Brasília, DF, [20--]. Disponível em: www2.aneel.gov.br/aplicacoes/atlas/pdf/03-Energia_Solar(3).pdf. Acesso em: 6 set. 2020.

CHAIYAPRUEK YOUPRASERT/SHUTTERSTOCK.COM

A seguir, constam as previsões de duração solar do dia no solstício de verão (maior duração solar do dia no ano) e no solstício de inverno (menor duração solar do dia no ano) para o município de Chuí (RS)*.



	Nascer do sol	Pôr do sol	Duração solar do dia (em horas)
Solstício de verão (22/12/2020)	5h21	19h44	14,4
Solstício de inverno (21/06/2021)	7h38	17h33	9,92

ILUSTRAÇÕES: DANIEL BOGNI

Fonte: COSTA, J. R. V. Nascer e ocaso. **Astronomia no Zênite**, jul. 2020. Disponível em: www.zenite.nu/nascer-e-ocaso/. Acesso em: 6 set. 2020. *Localização geográfica: latitude 33° 41' 23'' (Sul) e longitude 53° 26' 50'' (Oeste).

Veremos, agora, que é possível modelar a quantidade de horas da duração solar do dia, no decorrer do ano, de um município por meio de uma função do tipo trigonométrica. Acompanhe.

constante real

quantidade de dias passados desde o solstício de verão

duração solar do dia (em horas)

$$h(x) = a + b \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{365}\right)$$

constante real

quantidade de dias do ano

Analise como podemos obter um modelo desse para o munícipio de Chuí.

1 Consideramos que, no solstício de verão, é passado 0 dia de 22/12/2020. Assim:

$$h(x) = a + b \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{365}\right) \Rightarrow h(0) = a + b \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi \cdot \frac{0}{365}\right)}_{1} \Rightarrow a + b = 14{,}4$$

2 Consideramos que, no solstício de inverno, são passados, nesse caso, 182 dias de 22/12/2020. Assim:

$$h(x) = a + b \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{365}\right) \Rightarrow h(182) = a + b \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi \cdot \frac{182}{365}\right)}_{\simeq -1} \Rightarrow a - b = 9{,}92$$

3 Resolvemos o sistema de equações obtidas para determinar o valor das constantes a e b.

$$\begin{cases} a + b = 14{,}4 \\ a - b = 9{,}92 \end{cases} \quad +$$

$$2a + 0b = 24{,}32$$

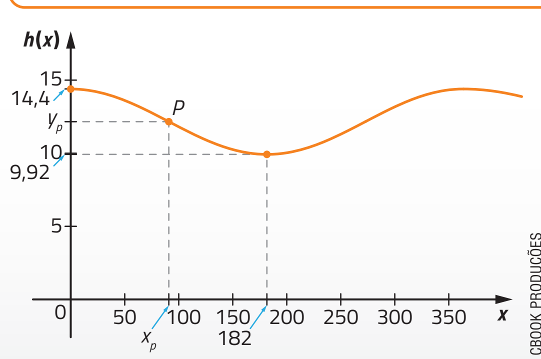
$$a = 12{,}16$$

Substituindo o valor de a na 1ª equação:

$$12{,}16 + b = 14{,}4 \Rightarrow b = 2{,}24$$

4 Obtemos a função que descreve a quantidade de horas de duração solar do dia para o município de Chuí, sendo x a quantidade de dias passados desde 22/12/2020.

$$h(x) = 12{,}16 + 2{,}24 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{365}\right)$$



SOMCHART ROUCHANAKANOK/SHUTTERSTOCK.COM

CBOOK PRODUÇÕES

Dica

Neste plano cartesiano, os eixos possuem escalas diferentes. As coordenadas do ponto P indicam que, passados x_p dias de 22/12/2020, a duração solar do dia em Chuí pode ser estimada, em horas, por y_p.

Pensando no assunto

Não escreva no livro

1. Você já percebeu se, no município em que você mora, ao longo do ano a duração solar do dia sofre variação? Converse com o professor e os colegas sobre essa questão. Resposta pessoal.

2. Por muito tempo, acreditou-se que a Terra era o centro do Universo (Geocentrismo) e que os corpos celestes giravam ao seu redor. Foi somente a partir do século XVI, com os estudos de Nicolau Copérnico (1473-1573), Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642), que surgiram as explicações de um modelo em que o Sol está no centro do Sistema Solar e os planetas giram em torno dele. Esse modelo, estabelecido até os dias de hoje, ficou conhecido como Heliocentrismo.

   Mesmo conhecendo os pressupostos do modelo heliocêntrico, é comum termos a impressão de que o Sol se movimenta ao redor da Terra, nascendo de um lado (nascente ou oriente) e se pondo do outro (poente ou ocidente). Essa percepção é chamada movimento aparente do Sol. A compreensão desse movimento é importante para a realização de diversas atividades, por exemplo, para que os engenheiros projetem a instalação de painéis solares, de modo a determinar o local de maior incidência dos raios de sol ao longo do dia e em diferentes períodos do ano.

   Com base nessas informações e em pesquisas complementares, explique sobre qual movimento da Terra está relacionado o movimento aparente do Sol. Depois, descreva uma aplicação do conhecimento sobre esse movimento aparente em alguma área tecnológica, como na construção civil e na agricultura. Resposta esperada: Movimento de rotação, pois nele a Terra gira em torno de seu eixo imaginário.

3. No município de Chuí, no período de 22/12/2020 a 21/06/2021, quantas horas tem a duração solar do dia mais:
   - longo? E em qual data isso ocorre? 14,4 h. 22/12/2020.
   - curto? E em qual data isso ocorre? 9,92 h. 21/06/2021.

4. Por meio do modelo obtido na página anterior, estime a duração solar do dia, no município de Chuí, ao terem se passado 100 dias do solstício de verão. Utilize uma calculadora. aproximadamente 11,82 h

5. Nesta questão, exploraremos a seguinte situação-problema.

   > Qual é a variação da duração solar do dia, no decorrer do ano, no município em que você mora?

   Junte-se a um colega e façam o que se pede em cada um dos itens.

   a) Qual a latitude e a longitude do município em que vocês moram? Resposta pessoal.

   b) No município em que vocês moram, qual o horário do nascer e do pôr do sol nos solstícios de verão e de inverno? Investiguem a duração solar do dia nessas datas. Resposta pessoal.

   Conexões

   Acesse este *site* para obter a latitude e a longitude dos municípios:

   - BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Localidades 2010**. Disponível em: ftp://geoftp.ibge.gov.br/organizacao_do_territorio/estrutura_territorial/localidades/Geomedia_MDB/. Acesso em: 6 set. 2020.

   Acesse este *site* para obter o horário do nascer e o do pôr do sol dos municípios:

   - COSTA, J. R. V. Nascer e ocaso. **Astronomia no Zênite**, jul. 2020. Disponível em: www.zenite.nu/nascer-e-ocaso/. Acesso em: 6 set. 2020.

   c) Determinem a função, correspondente a um modelo matemático, que descreva a quantidade de horas da duração solar do dia para o município em que vocês moram. Utilizando um programa de computador, como o **GeoGebra**, construam o gráfico dessa função. Resposta pessoal.

   d) Com base nas questões anteriores, elaborem uma situação-problema envolvendo a variação da duração solar do dia no município em que vocês moram. Em seguida, juntem-se a outra dupla e troquem a situação-problema para que uma dupla resolva a da outra. Ao final, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

Você conectado

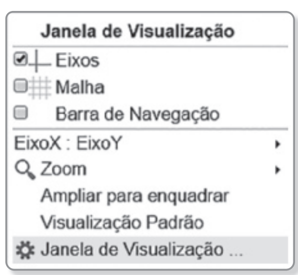
O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias.

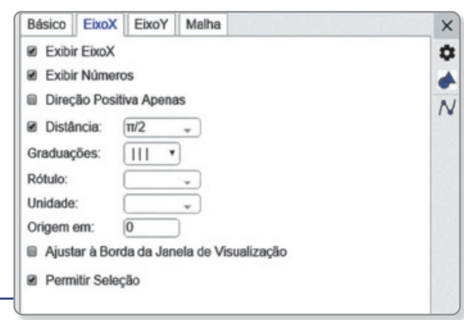
Gráfico de função do tipo trigonométrica

Nesta Unidade, estudamos as funções do tipo trigonométrica, definidas por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$ ou $g(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$, em que a, b, c e d são números reais, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Agora, utilizando o *software* de geometria dinâmica, **GeoGebra**, vamos estudar como os gráficos dessas funções se comportam ao alterarmos os valores dos parâmetros a, b, c e d.

Acompanhe como proceder.

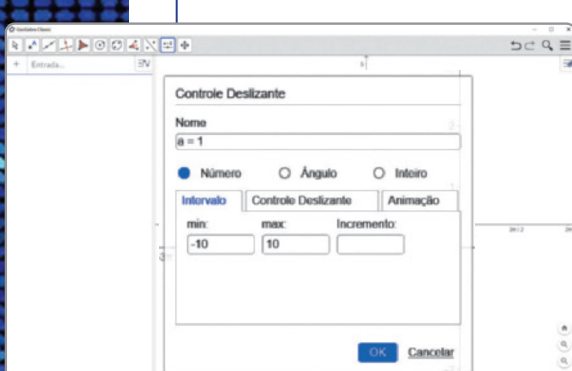
A Vamos ajustar a escala do eixo x para que tenha $\frac{\pi}{2}$ de unidade. Para isso, clicamos com o botão direito do *mouse* em qualquer lugar livre na **Janela de visualização** e, na caixa de opções que abrir, clicamos em **Janela de visualização...**. Em seguida, ao abrir a caixa de diálogo, na aba **EixoX**, marcamos a opção **Distância**, selecionamos a opção **π/2** e fechamos essa caixa de diálogo.

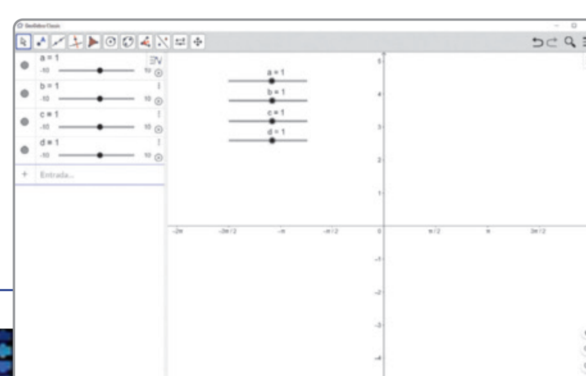




IMAGENS: GEOGEBRA

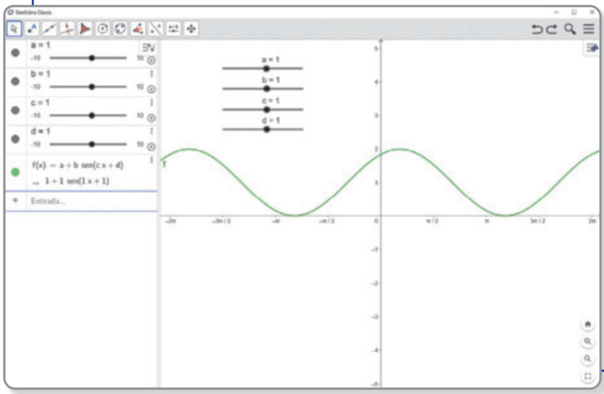
B Para ajustar o valor do parâmetro a, vamos criar um controle deslizante. Para isso, com a opção a=2 (Controle deslizante) selecionada, clicamos na **Janela de visualização** e, na caixa de texto que abrir, digitamos $\boxed{a}$ no campo **Nome** e, na aba intervalo, digitamos $\boxed{-10}$ e $\boxed{10}$ nos campos **min:** e **max:**, respectivamente. Por fim, clicamos em **OK**. De maneira análoga, criamos controles deslizantes para os parâmetros b, c e d.



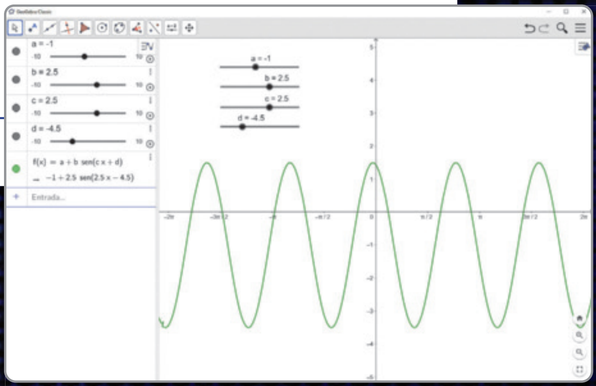


OMERTU/SHUTTERSTOCK.COM

C Para representar o gráfico da função, digitamos no campo **Entrada** a lei de formação: $\boxed{f(x) = a + b * \text{sen}(cx + d)}$. Podemos ajustar os valores dos parâmetros na lei de formação da função com os controles deslizantes e observar o resultado dos ajustes realizados diretamente no formato do gráfico obtido.



IMAGENS: GEOGEBRA



Mãos à obra

Não escreva no livro

1. Considerando as funções cujos gráficos foram representados na etapa **C** do exemplo apresentado, resolva as questões.

a) Escreva a lei de formação dessas funções. $f(x) = 1 + 1 \cdot \text{sen}\ (1x + 1)$; $f(x) = -1 + 2{,}5 \cdot \text{sen}\ (2{,}5x - 4{,}5)$

b) Qual dessas funções tem o menor período? $f(x) = -1 + 2{,}5 \cdot \text{sen}\ (2{,}5x - 4{,}5)$

c) Determine o conjunto imagem de cada uma dessas funções. $[0, 2]$; $[-3{,}5; 1{,}5]$

2. No **GeoGebra**, realize a construção apresentada no exemplo. Em seguida, ajuste os parâmetros da função para que: Resposta pessoal.

a) todos os pontos do gráfico fiquem acima do eixo x;

b) todos os pontos do gráfico fiquem abaixo do eixo x;

c) o conjunto imagem seja $[6, -2]$;

d) seu período seja 6π.

- Qual a lei de formação da função construída em cada item anterior? Resposta pessoal.

3. Agora, no **GeoGebra**, represente o gráfico da função do tipo trigonométrica $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ de maneira análoga à apresentada no exemplo. Em seguida, elabore três questões sobre a relação entre os parâmetros a, b, c e d e o formato do gráfico correspondente à função obtida. Troque as questões com um colega para que ele as resolva, enquanto você resolve aquelas que ele elaborou. Ao final, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

O QUE ESTUDEI

O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase o desenvolvimento da competência geral 1.

Respostas pessoais.

Não escreva no livro

1 Leia com atenção cada frase a seguir e faça uma reflexão. Depois, responda se você: **concorda**, **concorda parcialmente** ou **não concorda** com cada uma das afirmações.

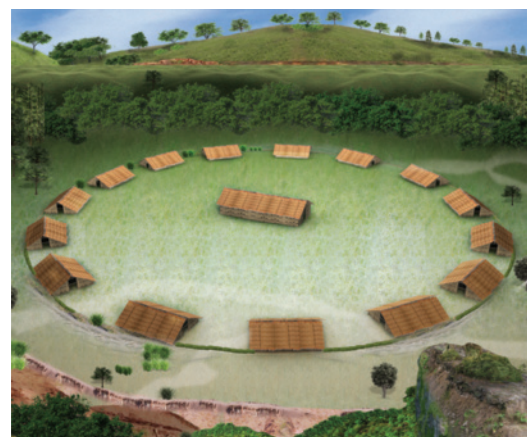
- Ouvi com atenção as explicações do professor.
- Quando precisei, pedi ajuda ao professor.
- Auxiliei o professor quando ele me pediu.
- Participei das discussões propostas à turma.
- Fiz as atividades propostas na sala de aula.
- Fiz as atividades escolares propostas para casa.
- Respeitei meus colegas nas atividades em grupo.
- Auxiliei meus colegas quando eles tiveram dúvidas.
- Levei para a sala de aula os materiais necessários.

2 Nas fichas a seguir estão indicados os principais conceitos que estudamos nesta Unidade. Reflita sobre cada um deles e verifique se você precisa retomar algum conceito para melhor compreendê-lo. Resposta pessoal.

- Comprimento da circunferência
- Arcos e ângulos em uma circunferência
- Ciclo trigonométrico
- Arcos côngruos
- Seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico
- Redução ao 1º quadrante
- Funções do tipo trigonométricas e fenômenos periódicos
- Função ímpar e função par
- Valor máximo ou mínimo das funções seno e cosseno
- Período das funções seno e cosseno
- Equações trigonométricas
- Funções seno e cosseno

3 Junte-se a dois colegas e escolham três conceitos entre os que foram listados na atividade anterior. Depois, conversem entre si sobre as aprendizagens e conhecimentos relacionados a esses conceitos e pensem em uma maneira de compartilhar essas informações com os colegas da turma. Vocês podem utilizar diferentes linguagens e ferramentas, como: a escrita de um texto em uma rede social ou blogue, a elaboração de um cartaz ou de uma apresentação visual (*slides*), a produção de um vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) etc. Resposta pessoal.

4 Na abertura desta Unidade, foram apresentadas algumas informações sobre povos indígenas no Brasil. De acordo com essas informações e os conceitos estudados nesta Unidade, junte-se a um colega e resolvam os itens a seguir. Respostas nas **Orientações para o professor**.



ALEX SILVA

a) Observem a representação de uma aldeia do povo indígena bororo, na qual as moradias estão dispostas em formato circular e, ao centro, está localizado o *baito*, uma construção onde são realizados encontros da comunidade.

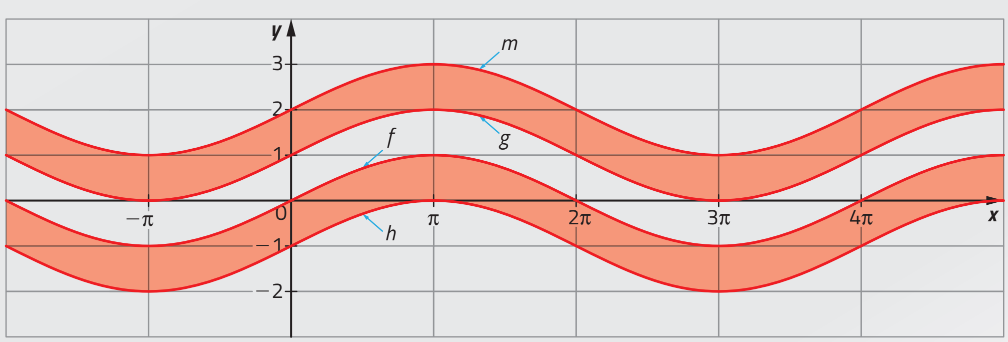
I. Todas as moradias da aldeia ficam, aproximadamente, à mesma distância do *baito*? Justifiquem.

II. Para representar uma aldeia dessas, construam no **GeoGebra** uma circunferência de 90 m de raio. Indiquem o centro dessa circunferência, correspondente ao *baito*, e marquem 15 pontos sobre ela, igualmente espaçados, para representar as moradias.

- Quantos metros tem o comprimento dessa circunferência?
- Qual a menor distância aproximada que uma pessoa percorre ao se deslocar de uma dessas moradias até o *baito* e retornar?
- Qual a medida angular do menor arco de circunferência delimitado pelos pontos que representam as moradias? Indiquem a resposta em graus e em radianos.

b) Um importante elemento da cultura de diferentes povos indígenas é a tradição das pinturas corporais e de utensílios em cerâmica, que costumam possuir padrões geométricos e representar símbolos da natureza, como a fauna e a flora locais.

Inspirado nessas pinturas, um estudante construiu, utilizando um programa de computador, o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,(kx)$, sendo k um número real não nulo. Em seguida, ele construiu o gráfico de mais três funções – g, h e m – realizando apenas deslocamentos verticais do gráfico de f. Por fim, o estudante coloriu em vermelho regiões entre alguns desses gráficos. Observem.



CBOOK PRODUÇÕES

I. Em relação à função f, determinem o conjunto imagem, o período e o valor máximo e o valor mínimo.

II. Determinem o valor de k e escrevam a lei de formação da função f.

III. Podemos classificar f como função par ou como função ímpar? Justifiquem.

IV. Descrevam o deslocamento do gráfico das funções g, h e m em relação ao da função f. Depois, escrevam a lei de formação das funções g, h e m.

+ Atividades

As atividades propostas a seguir abrangem os conceitos tratados em todo este Volume. Elas podem ser resolvidas com o objetivo de complementar seu estudo e sua autoavaliação de aprendizagem.

Enem

1. (Enem/MEC) Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais *r* km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais *r* km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais *r* km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1 560 km.
A distância *r* que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é alternativa **c**

a) 3. **b)** 7. **c)** 10. **d)** 13. **e)** 20.

2. (Enem/MEC) Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (A, B e C) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo A deveriam bater palmas a cada 2 s, os alunos do grupo B deveriam bater palmas a cada 3 s e os alunos do grupo C deveriam bater palmas a cada 4 s.
O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 s. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 s.
Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente. alternativa **d**
Qual é o termo geral da sequência anotada?

a) $12n$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 5$.
b) $24n$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 2$.
c) $12(n - 1)$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 6$.
d) $12(n - 1) + 1$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 5$.
e) $24(n - 1) + 1$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 3$.

3. (Enem/MEC) Para um principiante em corrida, foi estipulado o seguinte plano de treinamento diário: correr 300 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo. Para contabilizar seu rendimento, ele utilizará um *chip*, preso ao seu tênis, para medir a distância percorrida nos treinos. Considere que esse *chip* armazene, em sua memória, no máximo 9,5 km de corrida/caminhada, devendo ser colocado no momento do início do treino e descartado após esgotar o espaço para reserva de dados.
Se esse atleta utilizar o *chip* desde o primeiro dia de treinamento, por quantos dias consecutivos esse *chip* poderá armazenar a quilometragem desse plano de treino diário? alternativa **b**

a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 12 **e)** 13

4. (Enem/MEC) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura. alternativa **a**


ENEM

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.
O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

a) 14
b) 12
c) $7\sqrt{2}$
d) $6 + 4\sqrt{2}$
e) $6 + 2\sqrt{2}$

5. (Enem/MEC) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.
Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado? alternativa **d**

a) 38 000 **b)** 40 500 **c)** 41 000 **d)** 42 000 **e)** 48 000

6. (Enem/MEC) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

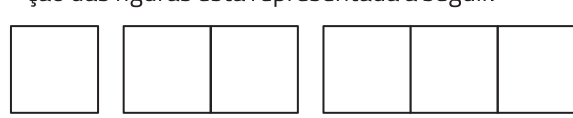
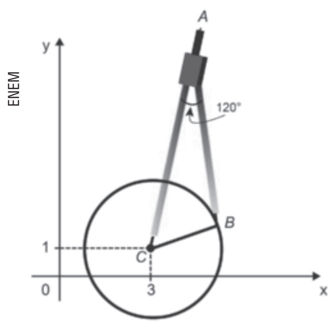


Figura **I** Figura **II** Figura **III**
EDITORIA DE ARTE

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura? alternativa **b**

a) $C = 4Q$
b) $C = 3Q + 1$
c) $C = 3Q - 1$
d) $C = Q + 3$
e) $C = 4Q - 2$

7. (Enem/MEC) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta-seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso está representada pelo ponto *A* conforme a figura.



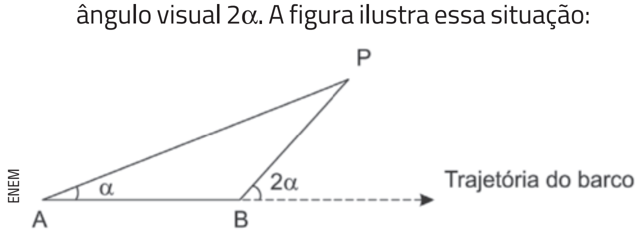
Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leqslant 5$
II	$5 < R \leqslant 10$
III	$10 < R \leqslant 15$
IV	$15 < R \leqslant 21$
V	$21 < R \leqslant 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será alternativa **d**

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

8. (Enem/MEC) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A*, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B* de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

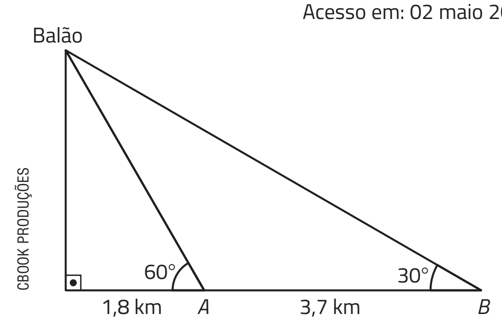


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2\,000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* será

a) 1 000 m.
b) $1\,000\sqrt{3}$ m.
c) $2\,000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m.
d) 2 000 m. alternativa **b**
e) $2\,000\sqrt{3}$ m.

9. (Enem/MEC) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



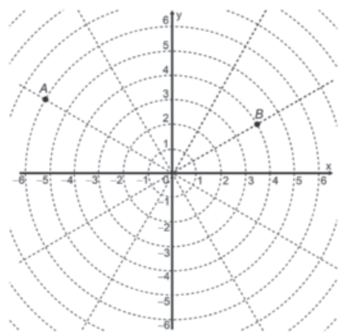
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.
Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão? alternativa **c**

a) 1,8 km **b)** 1,9 km **c)** 3,1 km **d)** 3,7 km **e)** 5,5 km

10. (Enem/MEC) Um ciclista A usou uma bicicleta com rodas com diâmetros medindo 60 cm e percorreu, com ela, 10 km. Um ciclista B usou outra bicicleta com rodas cujos diâmetros mediam 40 cm e percorreu, com ela, 5 km.
Considere 3,14 como aproximação para π.
A relação entre o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista A e o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista B é dada por alternativa **d**

a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{2}{3}$ **c)** $\dfrac{3}{4}$ **d)** $\dfrac{4}{3}$ **e)** $\dfrac{3}{2}$

11. (Enem/MEC) Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



ENEM

Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0; 0).
Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.
Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a alternativa **a**

a) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8$

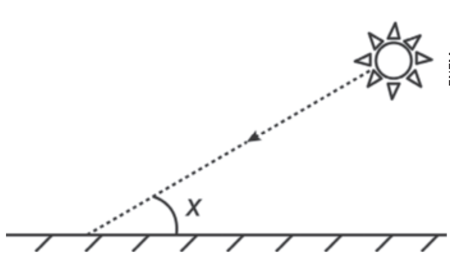
b) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{3} + 6$

c) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{3} + 4$

d) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2$

e) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{3} + 2$

12. (Enem/MEC) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura.
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



ENEM

Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo? alternativa **b**

a) 33%
b) 50%
c) 57%
d) 70%
e) 86%

13. (Enem/MEC) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}\,[b(x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.
O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são) alternativa **b**

a) a.
b) b.
c) c.
d) a e b.
e) b e c.

14. (Enem/MEC) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi alternativa **a**

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

15. (Enem/MEC) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$ sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0 \leqslant h \leqslant 24)$ e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.
Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido? alternativa **b**

a) $A = 18$ e $B = 8$
b) $A = 22$ e $B = -4$
c) $A = 22$ e $B = 4$
d) $A = 26$ e $B = -8$
e) $A = 26$ e $B = 8$

Vestibulares

Região Centro-Oeste

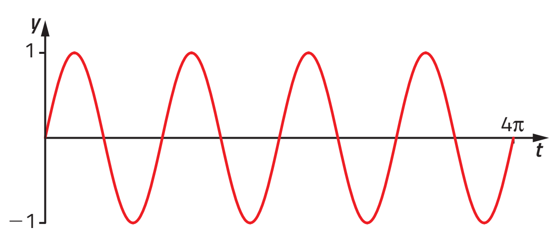
16. (UEG-GO) No primeiro semestre de 2015, a empresa "Aço Firme" fabricou 28 000 chapas metálicas em janeiro; em fevereiro sua produção começou a cair como uma progressão aritmética decrescente, de forma que em julho a sua produção foi de 8 800 chapas. Nessas condições, a produção da empresa nos meses de maio e junho totalizou alternativa **c**

a) 33 600 chapas
b) 32 400 chapas
c) 27 200 chapas
d) 24 400 chapas
e) 22 600 chapas

17. (Unemat-MT) Lança-se uma bola, verticalmente de cima para baixo, da altura de 4 metros. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $\frac{1}{2}$ da altura anterior. A soma de todos os deslocamentos (medidos verticalmente) efetuados pela bola até o momento de repouso é: alternativa **a**

a) 12 m
b) 6 m
c) 8 m
d) 4 m
e) 16 m

18. (UFGD-MS) O gráfico a seguir representa uma função periódica com amplitude $A = 1$ e período π. A função que melhor representa este gráfico é determinada por:



alternativa **c**

a) $y = 2\cos(2t)$
b) $y = \cos(4t)$
c) $y = \text{sen}(2t)$
d) $y = 2\,\text{sen}(2t)$
e) $y = \text{sen}(2t) - 3$

Região Nordeste

19. (UECE) Se as medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente 7 m e $5\sqrt{2}$ m e se a medida do ângulo entre esses lados é 135 graus, então, a medida, em metros, do terceiro lado é: alternativa **b**

a) 12.
b) 13.
c) 14.
d) 15.

20. (UERN) O nono termo de uma progressão geométrica A, de razão q, é 1 792 e seu quarto termo é 56. Dessa forma, o quarto termo de outra progressão geométrica, B, com razão $q + 1$ e cujo primeiro termo é igual ao primeiro termo da progressão A, é

a) 189. alternativa **a**
b) 243.
c) 729.
d) 946.

21. (UEPB) A diagonal menor de um paralelogramo divide um de seus ângulos internos em dois outros. Um β e outro 2β. A razão entre o maior e o menor lado do paralelogramo é alternativa **c**

a) $2\text{sen}\,\beta$
b) $\frac{1}{2\cos\beta}$
c) $2\cos\beta$
d) $\frac{1}{2\text{sen}\,\beta}$
e) $\text{tg}\,\beta$

22. (Ifal) O valor de x na expressão

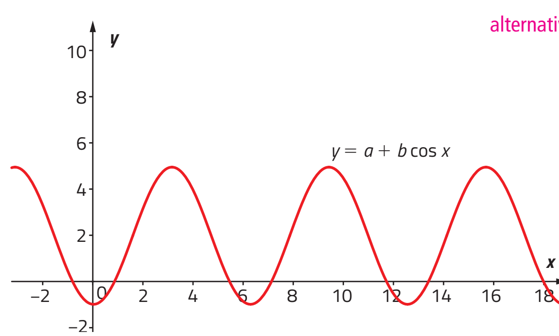
$$x = \frac{\text{tg}\ 2160° + \cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)}{\text{sen}\ 2640° - \cos\frac{5\pi}{4}}$$ é: alternativa **c**

a) 0.
b) 1.
c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.
e) $\sqrt{2}$.

23. (UEMA) Considere as expressões trigonométricas abaixo: Resposta nas **Orientações para o professor**.
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$ e $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$.
Para calcular o $\cos 2\alpha$ e o $\text{sen}\,2\alpha$, basta fazer $\alpha = \beta$, e, a partir das expressões trigonométricas, obtêm-se:
$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ e $\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}(\alpha + \alpha) = 2\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$.
De modo semelhante ao cálculo acima, desenvolva o $\cos 3\alpha$ e o $\text{sen}\,3\alpha$.

24. (UPE-PE) A função $y = a + b\cos x$, com a e b reais, representada graficamente a seguir, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -1)$ e tem valor máximo $y = 5$. Qual é o valor da soma $5a + 2b$?

alternativa **a**



ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

a) 4 **b)** −1 **c)** 3 **d)** −2 **e)** 6

25. (IFBA) A partir do solo, o pai observa seu filho numa roda-gigante. Considere a altura A, em metros, do filho em relação ao solo, dada pela função $A(t) = 12{,}6 + 4\text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{18}\right)\cdot(t - 26)\right]$ onde o tempo (t) é dado em segundos e a medida angular em radianos. Assim sendo, a altura máxima e mínima e o tempo gasto para uma volta completa, observados pelo pai, são, respectivamente: alternativa **e**

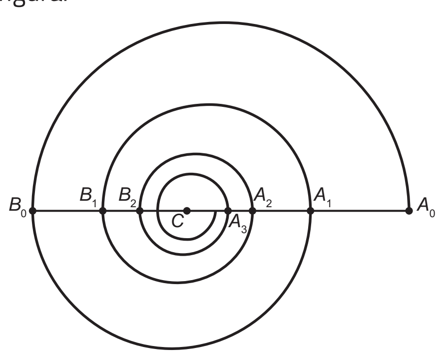
a) 10,6 metros; 4,6 metros e 40 segundos.
b) 12,6 metros; 4,0 metros e 26 segundos.
c) 14,6 metros; 6,6 metros e 24 segundos.
d) 14,6 metros; 8,4 metros e 44 segundos.
e) 16,6 metros; 8,6 metros e 36 segundos.

26. (UERN) Um determinado inseto no período de reprodução emite sons cuja intensidade sonora oscila entre o valor mínimo de 20 decibéis até o máximo de 40 decibéis, sendo t a variável tempo em segundos. Entre as funções a seguir, aquela que melhor representa a variação da intensidade sonora com o tempo $I(t)$ é alternativa **b**

a) $50 - 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.
c) $40 + 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.
b) $30 + 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.
d) $60 - 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

Região Norte

27. (UFPA) Um dos moluscos transmissores da esquistossomose é o *biomphalaria amazonica* paraense. Sua concha tem forma de uma espiral plana, como na figura:

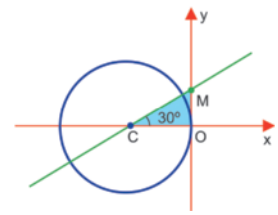


CBOOK PRODUÇÕES

A interseção do diâmetro A_0B_0 com a concha determina pontos A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, etc. A cada meia volta da espiral, a largura do diâmetro do canal da concha reduz na proporção de $\frac{2}{3}$, isto é, $B_0B_1 = \frac{2}{3}A_0A_1$, $A_1A_2 = \frac{2}{3}B_0B_1$, $B_1B_2 = \frac{2}{3}A_1A_2$, $A_2A_3 = \frac{2}{3}B_1B_2$, e assim sucessivamente. Seja o ponto C o limite da espiral, se A_0B_0 mede 6 mm, a medida de B_0C é, em mm, igual a alternativa **b**

a) 6/5 **c)** 3 **e)** 7/2
b) 12/5 **d)** 11/5

28. (UEA-AM) Em um sistema de eixos cartesianos com origem em O estão representadas uma circunferência tangente ao eixo das ordenadas, de centro $C(-1, 0)$, e uma reta t, que passa pelo ponto C (centro da circunferência) e pelo ponto M no eixo das ordenadas, conforme mostra a figura.



UEA

Nessas condições, o valor da área do triângulo colorido é igual a alternativa **e**

a) $3\sqrt{2}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$

29. (UFT-TO) Se $\text{sen}\,\theta = \frac{5}{13}$ e $\theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, então o valor de tg (2θ) é: alternativa **b**

a) $-\frac{12}{13}$ **c)** $\frac{120}{119}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $-\frac{120}{119}$ **d)** 1

Região Sudeste

30. (UERJ) Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

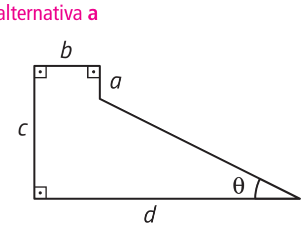
- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km. alternativa **c**
O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

a) 414 **b)** 438 **c)** 456 **d)** 484

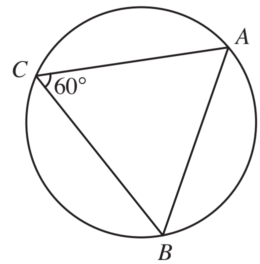
31. (Unicamp-SP) A figura a seguir exibe um pentágono em que quatro lados consecutivos têm comprimentos a, b, c e d. Se a sequência (a, b, c, d) é uma progressão geométrica de razão $q > 1$, então tan θ é igual a alternativa **a**

CBOOK PRODUÇÕES



a) $1/q$. **b)** q. **c)** q^2. **d)** $\sqrt{q}$.

32. (UFJF-MG) Uma praça circular de raio R foi construída a partir da planta a seguir:



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que $AB = 80$ m. De acordo com a planta e as informações dadas, é **CORRETO** afirmar que a medida de R é igual a: alternativa **b**

a) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}$ m
b) $\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$ m
c) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ m
d) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ m
e) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

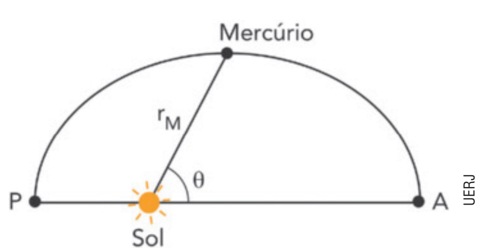
33. (Unesp-SP) Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 300 km, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30° N é igual a alternativa **c**

a) $1\,150\pi\sqrt{3}$ km
b) $1\,250\pi\sqrt{3}$ km
c) $1\,050\pi\sqrt{3}$ km
d) $1\,320\pi\sqrt{3}$ km
e) $1\,350\pi\sqrt{3}$ km

34. (UERJ) Considere a representação abaixo, de metade da órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol. A distância r_M entre o Sol e Mercúrio varia em função do ângulo θ, sendo $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.



Para o cálculo aproximado de r_M, em milhões de quilômetros, emprega-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{r_M = \frac{555}{10 - 2 \times \cos\theta}}$$

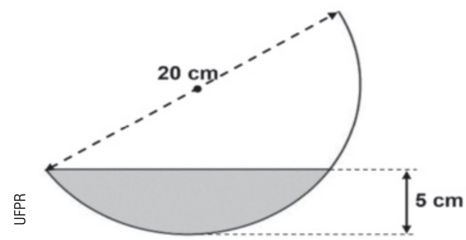
Calcule a distância PA em milhões de quilômetros.
115,625 milhões de quilômetros

Região Sul

35. (Udesc-SC) Sejam (16, 18, 20, ...) e $\left(\dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{11}{2}, ...\right)$ duas progressões aritméticas. Estas duas progressões apresentarão somas iguais, para uma mesma quantidade de termos somados, quando o valor da soma for igual a: alternativa **d**

a) 154
b) 4 774
c) 63
d) 4 914
e) 1 584

36. (UFPR) Um recipiente, no formato de hemisfério, contém um líquido que tem profundidade máxima de 5 cm. Sabendo que a medida do diâmetro do recipiente é de 20 cm, qual o maior ângulo, em relação à horizontal, em que ele pode ser inclinado até que o líquido alcance a borda, antes de começar a derramar? alternativa **d**



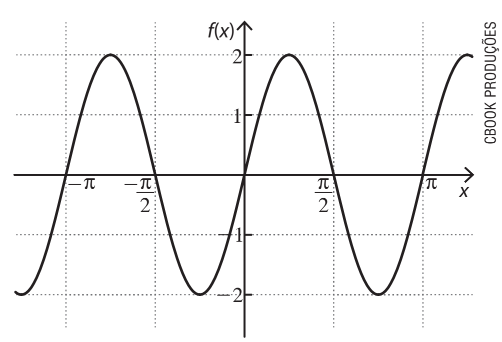
a) 75°.
b) 60°.
c) 45°.
d) 30°.
e) 15°.

37. (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}\,(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente,

a) $-2, 8, \pi$.
b) $8, -2, \pi$.
c) $\pi, -2, 8$.
d) $\pi, 8, -2$.
e) $8, \pi, -2$.

alternativa **b**

38. (UCS-RS) O gráfico abaixo representa uma função real de variável real.



Assinale a alternativa em que consta a função representada pelo gráfico. alternativa **d**

a) $f(x) = -2\cos x$
b) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2}$
c) $f(x) = 2\text{sen}\,x$
d) $f(x) = 2\text{sen}\,2x$
e) $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{x}{2}$

Unidade 1 • Sequências e noções de linguagem de programação

1. cerca de 1080 quadros
2. **a)** (7, 4, 1, −2, −5, ...)
   b) (−8, −14, −20, −26, −32, ...)
   c) $\left(\frac{9}{4}, \frac{17}{4}, \frac{25}{4}, \frac{33}{4}, \frac{41}{4}, \ldots\right)$
3. **a)** Resposta esperada: Não recursiva, pois, para determinar um termo qualquer da sequência, não é necessário conhecer o valor de um ou mais termos anteriores.
   b) finita
   c) Marcela
4. **a)** Algumas respostas possíveis: 1, 2 e 4; 2, 4 e 8; 4, 8 e 16; 8, 16 e 32.
   b) 32. 2.
5. **a)** figura **1**: 4 palitos e 1 representação de contorno de quadrado; figura **2**: 7 palitos e 2 representações de contorno de quadrado; figura **3**: 10 palitos e 3 representações de contorno de quadrado
   b) Resposta esperada:
   - 13 palitos. 4 representações de contorno de quadrado.

   c) Resposta esperada: A partir da figura **2**, acrescentam-se três palitos à figura anterior, de maneira a obter a representação de um contorno de quadrado a mais do que essa figura anterior possui.
   d) (4, 7, 10, ...). Resposta esperada: $a_n = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Resposta esperada: Recursiva: $a_1 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + 13$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$; não recursiva: $a_n = 13(n - 1)$ ou $a_n = 13n - 13$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
7. 238 e 355
   - 238: 28ª posição; 355: 41ª posição
8. 18
9. **a)** (1, 1, 2, 3, 5, ...)
   b) Resposta esperada: A partir do 3º mês, a quantidade de casais de coelhos corresponde à soma das quantidades de casais nos dois meses anteriores.
   c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 e 144; 144 casais de coelhos
   d) Resposta esperada: $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.
10. **b**, **c**, **d**
    - **b**: $r = 18$, crescente; **c**: $r = -8$, decrescente; **d**: $r = 0$, constante
11. **a)** (−2, 5, 12, 19, 26)
    b) (−29, −8, 13, 34, 55)
    c) $\left(9, \frac{28}{3}, \frac{29}{3}, 10, \frac{31}{3}\right)$
    d) (−3, −3, −3, −3, −3)
    e) (40, 36, 32, 28, 24)
12. Alternativa **c**, pois apresenta uma PA de razão negativa $r = -6$.
13. 5, 11 e 17
14. (7, 4, 1, −2, −5, −8)
15. 17, −60 e 220
16. 25 cm²
17. −517
18. **a)** 22 termos
    b) 76 termos
    c) 15 termos
19. **a)** 2018: 99 municípios; 2019: 144 municípios
    b) 2027
20. **a)** $r = 4$. Resposta esperada: Como devem ser interpolados 5 termos entre −10 e 14, temos que a PA obtida deve ter 7 termos, em que $a_1 = -10$ e $a_7 = 14$. Assim, basta fazer $a_7 = -10 + (7 - 1) \cdot r \Rightarrow 14 = -10 + 6r \Rightarrow r = 4$.
    b) (77, 65, 53, 41, 29, 17, 5, −7, −19, −31)
    c) 6 meios aritméticos
21. **a)** 21 múltiplos
    b) 37 múltiplos
    c) 42 múltiplos
22. **a)** crescente
    b) Sim, pois $a_{21} = 106$.
    c)
    - 338
    - 2

    d) $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = 8n - 62$
23. **a)** (−2, −5, −8, ...). $a_1 = -2$ e $r = -3$.
24. **a)** 8 anos de uso
    b) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$, tal que $f(n) = -562n + 8200$
25. Resposta pessoal.
26. **a)** $a_n = 125550 + (n - 1) \cdot (-1620)$ ou $a_n = -1620n + 127170$
    b) 114210 domicílios
27. **a)** 120 copos. 300 copos.
    b) 12 camadas. 19 camadas.
28. **a)** 627
    b) 1200
    c) 204880
29. 5278
30. 7200
31. 50, 41, 32, 23 e 14
32. 260 poltronas
33. alternativa **d**
34. 466000 visitantes
35. 100
36. 100°, 108°, 116°, 124° e 132°
37. 185 palitos

38. razão: 8; $a_{40} = 312$

39. a) $x = 15$
b) $m = -3$
c) $p = 40$

40. Opção **1**. R$ 856,00.

41. 4

42. 92

43. a) $\frac{55}{6}$ ou $-\frac{55}{6}$
b) $\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}$ e $\frac{115}{3}$
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.

44. a) $q = \frac{1}{3}$; crescente
b) $q = 1$; constante
c) $q = 4$; decrescente
d) $q = -6$; alternante
e) $q = 2^{-2}$; decrescente

45. a) $\sqrt{7}$, 28, $112\sqrt{7}$ e 3 136
b) $\frac{125}{8}, -\frac{25}{8}, \frac{5}{8}$ e $-\frac{1}{8}$
c) $9, 9^3, 9^5$ e 9^7

46. $\frac{4\,375}{32}$

47. $q = \frac{1}{5}$; $a_1 = 20$

48. a) 729 triângulos em preto
b) figura **10**
c) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$
d) PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer da sequência e seu antecessor é igual a uma constante denominada razão. Nesse caso, a razão $q = \frac{1}{2}$.
- $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) $\frac{3}{32}$ m

49. alternativa **c**

50. 1, 6, 36, 216 e 1 296

51. 19 termos

52. $-\frac{3}{7}$

53. a) (40, 80, 160, 320, 640, ...)
b) PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer da sequência e seu antecessor é igual a uma constante denominada razão. Nesse caso, a razão $q = 2$.
c) $a_n = 40 \cdot 2^{n-1}$
d) $f(n) = 40 \cdot 2^{n-1}$ ou $f(n) = 5 \cdot 2^{n+2}$.
e) 2 621 440 bactérias

54. aproximadamente R$ 2.154,02

55. a) $(-2, -6, -18, ...)$; $a_1 = -2$ e $q = 3$

56. Uma resposta possível: $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = \frac{1}{8} \cdot 4^{n-1}$ ou $f(n) = 2^{2n-5}$.

57. a) 6 anos
b) Uma resposta possível: $f: A \to \mathbb{R}$, com $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 6\}$, definida por $f(n) = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Temos que $f(4) = 108$ indica que a estimativa de altura dessas árvores, 4 anos após o plantio, seja de 108 cm.

58. Resposta pessoal.

59. a) $-488\,281$
b) $\frac{208}{3}$
c) 59 048
d) 1 434 891

60. a) 84 000 entregas
b) aproximadamente 608 639 entregas

61. alternativa **c**

62. alternativa **d**

63. -6

64. $\frac{546\,125}{32}$

65. a) aproximadamente 3,57 m
b)
- 46 m
- 81,02525 m

66. a) Resposta esperada: De acordo com a ordem das linhas, o primeiro número das sequências corresponde a um termo de uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = 2$. Já em cada linha, a sequência corresponde a uma PA de razão $r = 3$. Na 1ª linha tem apenas um número e, a partir da 2ª linha, a quantidade de números é o dobro da que tem na linha anterior.
b) 4 560

67. a) $-\frac{16}{5}$
b) $\frac{3125}{4}$
c) $\frac{9}{28}$
d) $\frac{2500}{99}$

68. a) $\frac{16}{9}$
b) $\frac{8104}{999}$
c) $-\frac{91}{99}$
d) $\frac{79}{33}$
- Resposta pessoal.

69. alternativa **d**

70. $x = 24$

71. a) Resposta esperada: Todo número natural é par ou é ímpar, sendo que qualquer número par é divisível por 2.

b) Sim. O passo que questiona se a divisão, realizada no passo anterior, tem resto igual a zero.

c)
- Primeiro realizamos a divisão $237 : 2 = 118$, com resto 1. Como o resto da divisão não é igual a zero, concluímos que 237 é ímpar.
- Primeiro realizamos a divisão $108 : 2 = 54$, com resto zero. Como o resto da divisão é igual a zero, concluímos que 108 é par.

72. a) O currículo é arquivado e retoma-se o processo.

b) Resposta esperada: Não, além da análise de currículo, também são analisadas as referências pessoais e profissionais do candidato e realizada uma entrevista para indicação de um candidato apto ao cargo.

c) Verificar se a entrevista indica um candidato apto ao cargo.

d) Resposta pessoal.

73. (5, −3, 13, −19, 45, ...) $a_n = -2a_{n-1} + 7$ e $a_1 = 5$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 2$

74. **e** - **a** - **d** - **f** - **c** - **b**.

76. a)
- frigorífico
- pesqueiro
- tanque de engorda

77. b) −153

78. Resposta pessoal.

79. a) Exemplo **1**: variáveis: *x*, *y*, *z*; operadores: +, =. Exemplo **2**: variáveis: *a*, *b*, soma; operadores: +, =.

b) É calculada a soma $10 + 5 = 15$.

c) Resposta esperada: No exemplo **1**, o algoritmo realiza a adição de dois números inteiros predefinidos, 10 e 5; já no exemplo **2**, o algoritmo realiza a adição de dois números quaisquer do tipo real, que devem ser inseridos ao executar o algoritmo.

80. a) itens **I** e **III**

b) Algumas respostas possíveis: 9, 5 e 2; 15, 1 e 17; 5, 3 e 2.

81. alternativa **d**

82. a) figura **II**

b) Resposta esperada: **I** – Use a caneta; repita 5 vezes (mova 150 passos; gire 72 graus para a direita). **III** – Use a caneta; repita 3 vezes (mova 150 passos; gire 120 graus para a direita).

83. a) Resposta esperada: Recursiva, pois, para obter esse termo, o termo anterior é multiplicado por −5.

b) −5. −2.

c)
- $a_n = -5 \cdot a_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ e $a_1 = -2$
- $a_n = -2 \cdot (-5)^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}^*$

84. a) Uma resposta possível: **III**, **V**, **II**, **IV** e **I**.

b) Uma resposta possível: 24.

c) Uma resposta possível: $f(x) = 2(x + 10)$ ou $f(x) = 2x + 20$.

85. a) 62,5. Aprovado.

b) 56. Reprovado.

86. Respostas pessoais.

Unidade 2 • Relações métricas e trigonometria no triângulo

1. a) $x = 117$

b) $x = 2$

2. alternativa **a**

3. alternativa **a**

4. alternativa **b**

5. R$ 6.840,00

6. Resposta pessoal.

7. sim. 4

8. **a** e **c**: caso **LAL**; **b** e **e**: caso **LLL**; **d** e **f**: caso **AA**

9. $x \simeq 2{,}07$ cm e $y = 4$ cm

10. b) 4 m

11. a)
- **A**, **B** e **D**
- **C** e **E**

b) Resposta esperada: Sim, elas têm formatos de polígonos semelhantes quando obtidas nas resoluções **A**, **B** e **D** e quando obtidas nas resoluções **C** e **E**. Nessas situações, possuem, respectivamente, ângulos internos congruentes (ângulos retos) e lados correspondentes proporcionais.

12. Resposta pessoal.

13. a) 16 cm

b) aproximadamente 45 mm

c) aproximadamente 6,67 m

d) 9 dm

14. alternativa **a**

15. a) 4,8 cm

b) 2,88 cm

c) 2,16 cm e 3,84 cm

16. a) 28π cm ou aproximadamente 87,92 cm

b) $98\sqrt{3}$ cm^2 ou aproximadamente 169,74 cm^2

17. 300 cm

18. a) Resposta esperada: Como a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados do triângulo é igual à área do quadrado construído sobre o maior lado, pode-se concluir que as medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo e que os números 3, 4 e 5 formam um terno pitagórico.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

19. sen $\alpha = \frac{35}{43}$; cos $\alpha = \frac{4\sqrt{39}}{43}$; tg $\alpha = \frac{35\sqrt{39}}{156}$

20. **a)** triângulo *ABC*: 28,8 m; triângulo *DEF*: 14,4 m

b) sen $\alpha = \frac{4}{5}$; cos $\alpha = \frac{3}{5}$; tg $\alpha = \frac{4}{3}$

c) sen $\beta = \frac{3}{5}$; cos $\beta = \frac{4}{5}$; tg $\beta = \frac{3}{4}$

21. **a)** $\frac{12}{13}$

b) $\frac{5}{13}$

c) 1

- Resposta esperada: Infinitos triângulos retângulos semelhantes, cujos ângulos agudos medem α e $90° - \alpha$.

22. **a)** tg $\beta = \frac{2}{3}$

b) 3 m

c) 27 m^2

23. aproximadamente 6,19 m

24. seno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cosseno: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; tangente: 1

25. Resposta pessoal.

26. **a)** $x = 22$ cm e $y = 11\sqrt{2}$ cm

b) $x \simeq 3{,}76$ m e $y \simeq 1{,}37$ m

27. **a)** $\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$

b) $\alpha \simeq 32°$ e $\beta \simeq 58°$

28. aproximadamente 5,2 m

29. **b)** aproximadamente 1 555,63 m

30. **a)** aproximadamente 224,47 m

b) aproximadamente 102 m

31. **a)** **I** e **III**

b) mínimo: aproximadamente 3,89 m; máximo: aproximadamente 5 m

c) Resposta pessoal.

32. **b)** aproximadamente 21,20 m

c) aproximadamente 13,25 m

33. aproximadamente 96,17 m

34. aproximadamente 87,4 m

35. **a)** aproximadamente 59°

b) aproximadamente 40°

c) 45°

36. de 10 m até 12,4 m

37. **a)** Respostas esperadas: tg $\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, com $0° < \alpha < 90°$; sen $\alpha = \cos(90° - \alpha)$, com $0° < \alpha < 90°$.

b) Resposta pessoal.

38. **a)** 4 m^2

b) Guarapuava (PR)

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

39. Resposta esperada:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow 1 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha$$

40. **a)** aproximadamente 13,61 cm

b) aproximadamente 22,79 m

41. **b)** 481,41 m

42. aproximadamente 276,76 m

43. **a)** Respostas possíveis: $\alpha = 60°$ e $\beta = 75°$ ou $\alpha = 120°$ e $\beta = 15°$

b) $\alpha \simeq 46°$ e $\beta \simeq 56°$

c) $\alpha \simeq 44°$ e $\beta \simeq 59°$

d) $\alpha \simeq 82°$ e $\beta \simeq 38°$

44. Resposta pessoal.

45. Maurício: aproximadamente 10,78 m; Pamela: aproximadamente 9,14 m

46. $x = 25$ m.

47. alternativa **a**

48. alternativa **b**

49. 135°

50. aproximadamente 35,78 cm

51. **a)** aproximadamente 187,7 m

b) med($A\hat{C}B$) $\simeq 53°$ e med($A\hat{B}C$) $\simeq 39°$

52. 15 cm

53. **a)**
- $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{F}$ e $\vec{H}$; $\vec{A}$ e $\vec{D}$; $\vec{C}$, $\vec{G}$ e $\vec{I}$
- $\vec{B}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}$ e $\vec{H}$; $\vec{C}$ e $\vec{I}$
- $\vec{A}$ e $\vec{D}$; $\vec{B}$ e $\vec{G}$; $\vec{C}$ e $\vec{H}$; $\vec{E}$, $\vec{F}$ e $\vec{I}$

c) $d \simeq 20{,}26$ m

Unidade 3 • Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas

1. **a)** $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OG}$

b) $\overline{CG}$

c) $\overline{AH}$, $\overline{CG}$ e $\overline{EF}$

2. **a)** 31,4 cm

b) 56,52 dm

c) 21,98 m

3. **a)** 2,5 cm

b) 400 cm

c) 70 cm

d) 12 cm

4. Respostas pessoais.

5. catraca **B**: 600 voltas; catraca **C**: 1 200 voltas

6. $\frac{2}{\pi}$ unidade de medida de comprimento ou aproximadamente 0,637 unidade de medida de comprimento

7. aproximadamente 25,12 cm

8. **a)** 180° **b)** 72° **c)** 30° **d)** 270° **e)** 60° **f)** 45°

9. comprimento de $\overset{\frown}{APB}$: aproximadamente 11,775 cm; med $(\overset{\frown}{APB}) = 135°$

10. **a)** med$(\overset{\frown}{AB}) = \frac{5\pi}{6}$ rad
b) med$(\overset{\frown}{AB}) = \frac{10\pi}{9}$ rad
c) med$(\overset{\frown}{AB}) = \frac{17\pi}{9}$ rad
d) med$(\overset{\frown}{AB}) = \frac{25\pi}{18}$ rad

11. 300° ou $\frac{5\pi}{3}$ rad

12. 65,94 cm

13. 14,99 cm

15. **a)** 170°
b) $\frac{11\pi}{9}$ rad
c) $\frac{8\pi}{9}$ rad
d) 330°
e) 80°
f) $\frac{2\pi}{9}$ rad

16. **a)** $\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}$ e $\frac{37\pi}{6}$
b) $\frac{25\pi}{6}, \frac{37\pi}{6}, \frac{49\pi}{6}$ e $\frac{61\pi}{6}$
c) $-\frac{35\pi}{6}, -\frac{23\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \frac{37\pi}{6}, \frac{49\pi}{6}, \frac{61\pi}{6}, \frac{73\pi}{6}, \frac{85\pi}{6}, \frac{97\pi}{6}$ e $\frac{109\pi}{6}$
e) $-\frac{23\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{13\pi}{6}$
f) $-\frac{59\pi}{6}, -\frac{47\pi}{6}, -\frac{35\pi}{6}$ e $-\frac{23\pi}{6}$

17. **a)** $315° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{5\pi}{12}$ rad $+ k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$
c) $\frac{17\pi}{10}$ rad $+ k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$

19. **a)** 690°
b) 26 casas

20. **a)** 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ rad
b) H

21. 4º quadrante

22. alternativa **c**

23. **a)** −0,940 **b)** −0,466 **c)** 0,940 **d)** 11,430 **e)** −0,629 **f)** 0,891

24. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. 54 m

26. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
c) $-\sqrt{3}$
d) $\frac{1}{2}$

27. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

28. **a)** $\frac{24}{25}$ **b)** $-\frac{204}{253}$

29. $\alpha = 15°$

30. **a)** $x = \frac{\pi}{4}$ rad $+ k\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$

31. $\sqrt{2}$

32. **a)** $\frac{24}{25}$
b) $-\frac{7}{25}$
c) $-\frac{24}{7}$

33. **a)** $\text{sen } 2\alpha = \text{sen } (\alpha + \alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$
b) $\cos 2\alpha = \cos (\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$
c) $\text{tg } 2\alpha = \text{tg } (\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{2 \cdot \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

34. **a)** −1 **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

35. **a)** $\frac{\pi}{2}$
b) $-\pi$, π e 3π
c) $-\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$

36. **a)** $-6 \leqslant m \leqslant -5$
b) $8 \leqslant m \leqslant 10$
c) $-\frac{7}{5} \leqslant m \leqslant 1$
d) $\frac{2}{3} \leqslant m \leqslant \frac{4}{3}$

37. **a)** Resposta esperada: No gráfico de função par, é possível identificar simetria de reflexão em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, se um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de uma função par, então o ponto $P'(-a, b)$ também pertence a esse gráfico. Já no gráfico de função ímpar, é possível identificar simetria de rotação em torno da origem O do sistema de eixos cartesianos, em 180°, ou seja, se um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de uma função ímpar, então o ponto $P'(-a, -b)$ também pertence a esse gráfico.

b) Algumas respostas possíveis: função par: $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$; função ímpar: $f(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = x$, $f(x) = x^3$.
c) Resposta pessoal.

38. a) valor mínimo: 1; valor máximo: 3
b) valor mínimo: -7; valor máximo: -3
c) valor mínimo: $\frac{2}{3}$; valor máximo: 2
d) valor mínimo: -2; valor máximo: 8

39. Resposta pessoal.

40. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{9\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{4}\right\}$

41. $A\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, $B\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$, $F(2\pi, 0)$ e $G\left(\frac{13\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

42. a) 2π b) $\frac{\pi}{4}$ c) 8 d) 6π

43. a) $Im(f) = [-7, 7]$ c) $Im(m) = [0, 8]$
b) $Im(g) = [-3, 13]$ d) $Im(n) = [2, 3]$

44. alternativa **d**

45. Resposta pessoal.

47. b) sim. em três pontos

48. alternativa **c**

49. alternativa **b**

50. alternativa **a**

51. a) $p(t) = 90 + 20 \cdot \cos(2{,}5\pi t)$
b) II

52. a) 0,18 ampere; $-0{,}18$ ampere
b) $I = 0{,}18$; $\omega = 120\pi$
c) $i(t) = 0{,}18 \cdot \text{sen}(120\pi t)$
d) 0 ampere; 0,18 ampere

53. Resposta pessoal.

54. Resposta pessoal.

55. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

56. a) $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ou 2π
b) $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{4}$ ou $\frac{15\pi}{4}$

57. 3 raízes reais

58. 30°, 60° e 90°

59. alternativa **d**

60. Resposta pessoal.

+Atividades

Enem

1. c	5. d	9. c	13. b
2. d	6. b	10. d	14. a
3. b	7. d	11. a	15. b
4. a	8. b	12. b	

Vestibulares

Região Centro-Oeste

16. c 17. a 18. c

Região Nordeste

19. b 20. a 21. c 22. c 24. a 25. e 26. b

Região Norte

27. b 28. e 29. b

Região Sudeste

30. c 31. a 32. b 33. c
34. 115,625 milhões de quilômetros

Região Sul

35. d 36. d 37. b 38. d

Base Nacional Comum Curricular

Competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular citadas neste Volume

Competências gerais da Educação Básica

Competência geral 1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Competência geral 2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Competência geral 5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Competência geral 7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

Competência específica 3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Competência específica 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Competência específica 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para o Ensino Médio

Competência específica 1 – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

Competência específica 2 – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Competência específica 3 – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Bibliografia comentada

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

- Aborda diferentes possibilidades de integração de atividades de modelagem matemática com a sala de aula.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Tradução de Eva Nick *et al*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

- Discute o papel e a amplitude da psicologia educacional na concepção de ensino e aprendizagem significativa.

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

- Apresenta os principais tópicos da Matemática elementar por meio de uma abordagem em que os conceitos mais complexos são construídos a partir das noções mais básicas.

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

- Apresenta conceitos básicos da Álgebra linear.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. (Tendências em Educação Matemática, 2).

- Expõe resultados de estudos sobre a informática educativa nas aulas de Matemática.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

- Apresenta tópicos sobre a história da Matemática, com destaque para os estudiosos que a desenvolveram ao longo do tempo.

BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

- Trata de conceitos básicos de Estatística, como análise de dados, probabilidades e variáveis aleatórias e traz os tópicos sobre inferência estatística.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2012.

- Apresenta conceitos de Matemática elementar, bem como a relação entre esses conceitos e seu contexto histórico.

CHANG, R. **Química Geral**: conceitos essenciais. Tradução de Maria José Ferreira Rebelo *et al*. São Paulo: AMGH Editora Ltda., 2010.

- Trata de conceitos e princípios da Química, bem como de suas aplicações na vida prática.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2017.

- Aborda aspectos da cognição, da natureza da Matemática e questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

- Narra trechos da história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos.

GARDNER, H. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

- Apresenta ideias fundamentais da teoria das inteligências múltiplas, assim como sugestões de como aplicá-las em sala de aula.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**: mecânica. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 1.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**: gravitação, ondas e termodinâmica. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 2.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física:** eletromagnetismo. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2016. v. 3.

- Série de livros que aborda diversas áreas da Física, como Mecânica, Ondulatória, Termodinâmica, Eletromagnetismo, Óptica e Relatividade.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática elementar**: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

- Aborda o estudo da análise combinatória e do cálculo de probabilidade.

HEWITT, P. G. **Física conceitual**. Porto Alegre: Bookman, 2015.

- Apresenta conceitos e princípios da Física.

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. **Cálculo e aplicações**. São Paulo: Blucher, 1999.

- Exemplifica o uso da tecnologia no trabalho com os conceitos para o cálculo de uma variável.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

- Aprofunda o tratamento de aspectos das simbolizações concretas, orais e escritas dos números ao longo da história.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 3 v. (Coleção do Professor de Matemática).

- Esta coleção aborda uma variedade de temas matemáticos do Ensino Médio, por meio de discussões conceituais, exemplos e atividades.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: Impa, 2015.

- Abrange conceitos de Álgebra linear e de Geometria analítica, plana e espacial.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P de. **Noções de probabilidade e estatística**. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2007. (Coleção Acadêmica).

- Apresenta introdução a conceitos de probabilidade e de estatística, destacando relações entre estatística descritiva, probabilidade e variáveis aleatórias.

MORAIS FILHO, D. C. de. **Manual de redação matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

- Além de considerações gerais sobre a boa redação matemática, o livro abrange a estruturação das frases, sugestões técnicas, dicas de gramática, uso correto de termos, de ortografia na matemática e de notações nessa área.

NEVES, I. C. B. *et al*. **Ler e escrever**: compromisso de todas as áreas. 9. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

- Reúne textos de diversas áreas do conhecimento, que destacam a maneira como cada uma delas pode se engajar em uma proposta de ensino interdisciplinar.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

- Reúne uma coletânea de textos com diferentes perspectivas sobre o movimento da pesquisa em educação matemática.

PAIS, L. C. **Educação escolar e as tecnologias da informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Trajetória).

- Organiza um conjunto de ensaios referentes a várias questões sobre a inserção da informática na educação escolar.

PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

- Propõe reflexões sobre aspectos da Matemática estudada na Educação Básica e apresenta propostas didáticas que buscam oportunizar na sala de aula conceitualizações, reflexões e questionamentos.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

- Descreve métodos para resolver problemas e propõe quatro princípios da resolução de problemas.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

- Analisa práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos e que podem ser transpostas para a sala de aula.

REECE, J. B. *et. al*. **Biologia de Campbell**. Tradução de Anne D. Vilela *et al*. Porto Alegre: Artmed, 2015.

- Aborda conceitos de diversas áreas das Ciências Biológicas.

RIDPATH, I. **Astronomia**: guia ilustrado. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

- Apresenta informações sobre Astronomia, como sua história, a formação do Sistema Solar, as constelações, entre outros tópicos.

SILVEIRA, P.; ALMEIDA, A. **Lógica de programação**: crie seus primeiros programas usando JavaScript e HTML. São Paulo: Casa do Código, 2014.

- Apresenta conceitos básicos de programação e de lógica de programação.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Tendências em Educação Matemática).

- Trata de questões sobre interdisciplinaridade e aprendizagem no ensino de Matemática e apresenta situações ocorridas em sala de aula que exemplificam diferentes abordagens interdisciplinares.

VERAS, L. L. **Matemática financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

- Apresenta conceitos relacionados à Matemática financeira e propõe, inclusive, o uso da calculadora.

Documentos oficiais

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.>. Acesso em: 31 jun. 2020.

- Documento que regulamenta as aprendizagens essenciais na Educação Básica.

______________. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF, 2013.

- Documento normativo obrigatório que orienta sobre a estrutura do currículo das escolas da Educação Básica.

______________. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, DF, 2000.

- Conjunto de textos que norteiam a elaboração dos currículos escolares do Ensino Médio.

______________. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, DF, 2006.

- Documento com orientações que buscam atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o Ensino Médio.

______________. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, DF, [s.d.].

- Documento que visa complementar os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) apresentando orientações que têm em vista a escola em sua totalidade.

Siglas de vestibulares

Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio

Ifal: Instituto Federal de Alagoas

IFBA: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa

UCS-RS: Universidade de Caxias do Sul

Udesc-SC: Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

UECE: Universidade Estadual do Ceará

UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás

UEMA: Universidade Estadual do Maranhão

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UERN: Universidade Estadual do Rio Grande do Norte

UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria

UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins

Unemat-MT: Universidade do Estado do Mato Grosso

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

UPE-PE: Universidade de Pernambuco

Orientações para o professor

Apresentação

As mudanças que vêm ocorrendo no mundo têm causado significativo impacto sobre as sociedades. As novas tecnologias da informação e da comunicação, por exemplo, produziram profundas mudanças nas relações interpessoais, na democratização da informação, na cultura juvenil e no mundo do trabalho. A internet, os programas de computador e os aplicativos de *smartphones* e *tablets* tornaram possível o acesso a conhecimentos, que, até pouco tempo atrás, eram restritos a determinados grupos de estudiosos. Todas essas mudanças afetaram diretamente a educação, sobretudo na sala de aula.

Esta Coleção foi elaborada considerando esse ambiente em transformação nos aspectos social, tecnológico e cultural. Acreditamos que o estudo da Matemática é de fundamental importância na formação de cidadãos aptos a viver em sociedade, fazendo valer seus direitos e deveres individuais e coletivos.

Modelos de práticas de aula mais atuais, que buscam considerar os estudantes e os professores como protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, têm sido cada vez mais adotados. Nesse sentido, estudos em educação matemática têm produzido um amplo e variado repertório de concepções, ideias e teorias que buscam promover o ensino da Matemática. Nestas **Orientações para o professor**, procuramos incluir elementos que compõem essa produção acadêmica, como textos sobre tendências em educação matemática e avaliação. Outro fator relevante nesse ambiente educacional em mudança é a implementação do Novo Ensino Médio e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Considerando também que o Livro do Estudante exige complementos que potencializem as aulas, propusemos aqui recursos importantes, como comentários específicos, que ampliam as discussões sobre os conceitos em estudo, complementam as atividades propostas e indicam elementos externos ao Livro Didático, como *sites*, vídeos, aplicativos, entre outros recursos.

Com isso, esperamos que a efetivação do uso dos livros da Coleção em sala de aula seja a mais completa possível, valorizando o trabalho docente e estimulando a participação e o comprometimento dos estudantes.

O autor.

Sumário

1. Conhecendo a Coleção

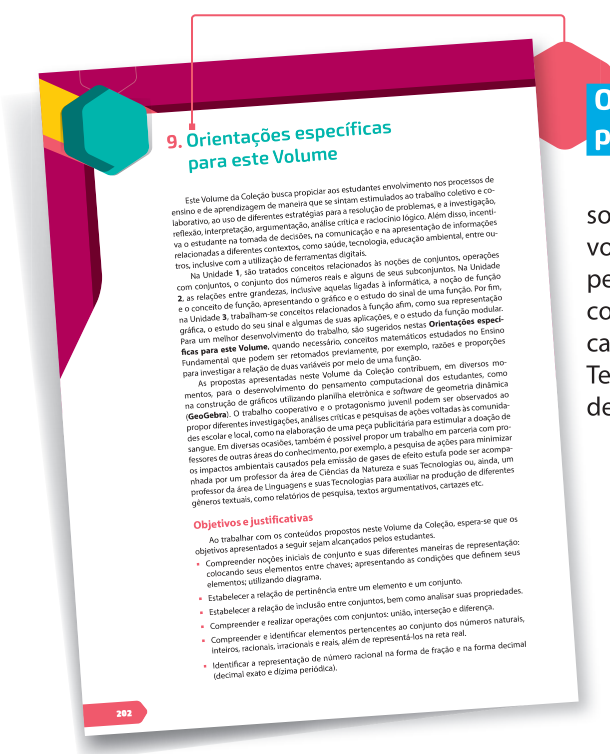
Material impresso

Orientações para o professor

Esta Coleção é composta de seis livros da área de Matemática e suas Tecnologias destinados ao Ensino Médio. Em cada Volume estão presentes as **orientações gerais**, comuns aos seis livros da Coleção, e as **orientações específicas**.

As orientações gerais apresentam os pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a Coleção, bem como reflexões acerca do ensino e da aprendizagem da área de Matemática e suas Tecnologias, além de discussões sobre tendências em educação matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um dos documentos que nortearam as reflexões e a elaboração desta Coleção.

Nas orientações específicas são apresentados comentários, complementos e orientações didáticas correspondentes às atividades propostas e aos conteúdos disponíveis nas páginas do Livro do Estudante. Nessa parte, as orientações para o professor foram estruturadas como indicamos a seguir.



9. Orientações específicas para este Volume

Este Volume da Coleção busca propiciar aos estudantes envolvimento nos processos de ensino e de aprendizagem de maneira que se sintam estimulados ao trabalho coletivo e colaborativo, ao uso de diferentes estratégias para a resolução de problemas, e a investigação, reflexão, interpretação, argumentação, análise crítica e raciocínio lógico. Além disso, incentiva o estudante na tomada de decisões, na comunicação e na apresentação de informações relacionadas a diferentes contextos, como saúde, tecnologia, educação ambiental, entre outros, inclusive com a utilização de ferramentas digitais.

Na Unidade **1**, são tratados conceitos relacionados às noções de conjuntos, operações com conjuntos, o conjunto dos números reais e alguns de seus subconjuntos. Na Unidade **2**, as relações entre grandezas, inclusive aquelas ligadas à informática, a noção de função e o conceito de função, apresentando o gráfico e o estudo do sinal de uma função. Por fim, na Unidade **3**, trabalham-se conceitos relacionados à função afim, como sua representação gráfica, o estudo do seu sinal e algumas de suas aplicações, e o estudo da função modular. Para um melhor desenvolvimento do trabalho, são sugeridos nestas **Orientações específicas para este Volume**, quando necessário, conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental que podem ser retomados previamente, por exemplo, razões e proporções para investigar a relação de duas variáveis por meio de uma função.

As propostas apresentadas neste Volume da Coleção contribuem, em diversos momentos, para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, como na construção de gráficos utilizando planilha eletrônica e *software* de geometria dinâmica (**GeoGebra**). O trabalho cooperativo e o protagonismo juvenil podem ser observados ao propor diferentes investigações, análises críticas e pesquisas de ações voltadas às comunidades escolar e local, como na elaboração de uma peça publicitária para estimular a doação de sangue. Em diversas ocasiões, também é possível propor um trabalho em parceria com professores de outras áreas do conhecimento, por exemplo, a pesquisa de ações para minimizar os impactos ambientais causados pela emissão de gases de efeito estufa pode ser acompanhada por um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ou, ainda, um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias para auxiliar na produção de diferentes gêneros textuais, como relatórios de pesquisa, textos argumentativos, cartazes etc.

Objetivos e justificativas

Ao trabalhar com os conteúdos propostos neste Volume da Coleção, espera-se que os objetivos apresentados a seguir sejam alcançados pelos estudantes.

- Compreender noções iniciais de conjunto e suas diferentes maneiras de representação: colocando seus elementos entre chaves; apresentando as condições que definem seus elementos; utilizando diagrama.
- Estabelecer a relação de pertinência entre um elemento e um conjunto.
- Estabelecer a relação de inclusão entre conjuntos, bem como analisar suas propriedades.
- Compreender e realizar operações com conjuntos: união, interseção e diferença.
- Compreender e identificar elementos pertencentes ao conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, além de representá-los na reta real.
- Identificar a representação de número racional na forma de fração e na forma decimal (decimal exato e dízima periódica).

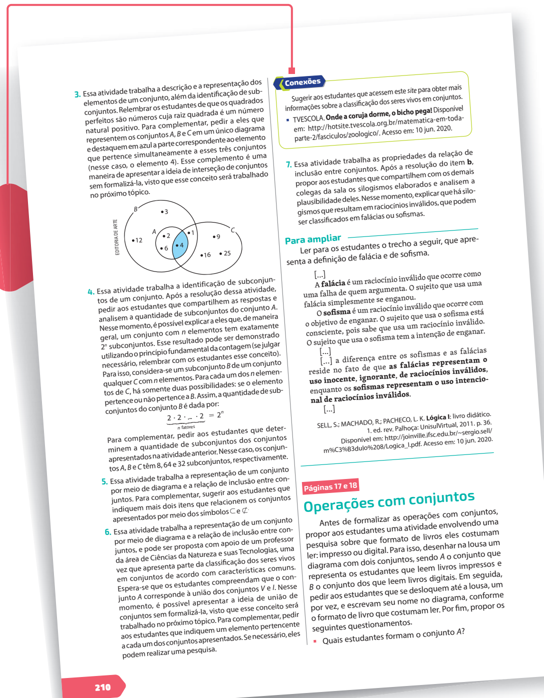
202

Orientações específicas para este Volume

São apresentadas informações gerais sobre o Volume da Coleção, como os objetivos a serem desenvolvidos, a justificativa da pertinência desses objetivos, as indicações das competências gerais, competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias, e sugestão de cronograma para o desenvolvimento das Unidades.

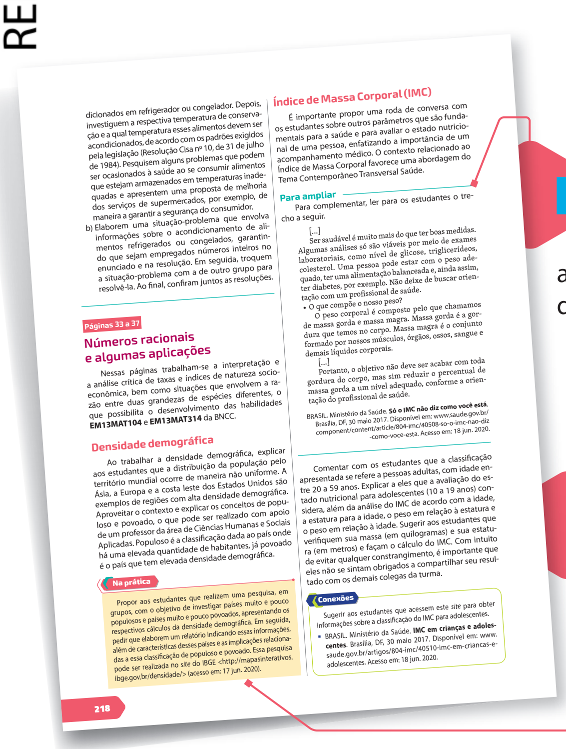
Orientações unidade a unidade

São apresentadas orientações sobre os conteúdos propostos, bem como formas de articular a abordagem desses conteúdos ao desenvolvimento das competências e habilidades da BNCC. São propostas questões problematizadoras, sugestões de ampliação de atividades, além de encaminhamentos que podem auxiliar o professor a esclarecer dúvidas e planejar estratégias de ensino.



Conexões

São apresentadas sugestões de referências bibliográficas complementares para pesquisa ou consulta (*sites*, vídeos, livros, documentos etc.), diferentes daquelas que estão disponíveis no Livro do Estudante e que podem contribuir para a formação continuada do professor, bem como para o trabalho em sala de aula, permitindo a ampliação das atividades propostas.



Para ampliar

São apresentadas sugestões que contemplam a abordagem proposta no Livro do Estudante, como textos divulgados pela mídia, esquemas e infografias.

Na prática

São apresentadas propostas complementares como atividades práticas, indicações de experimentos, sugestões de uso de recursos tecnológicos, entre outras.

Livro do Estudante

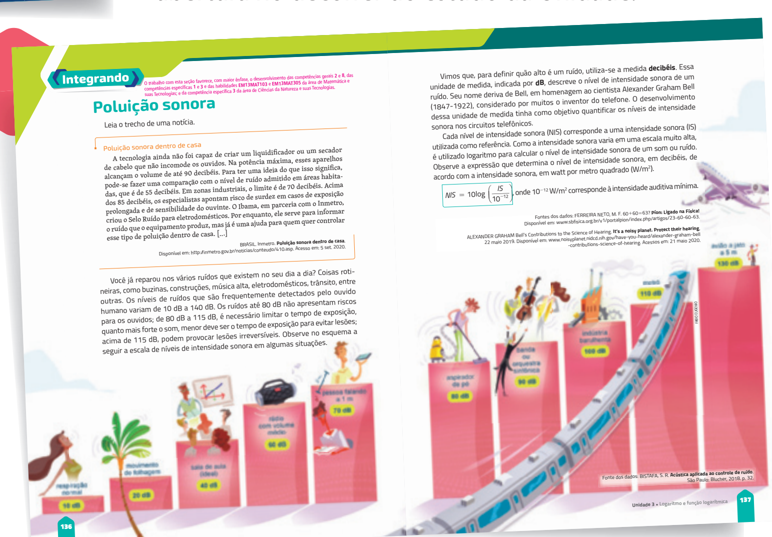
Esta Coleção é composta de seis livros da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio. Cada um desses livros é organizado em três Unidades que possuem abertura, atividades, seções e boxes. A seguir, apresentaremos informações sobre alguns desses elementos.

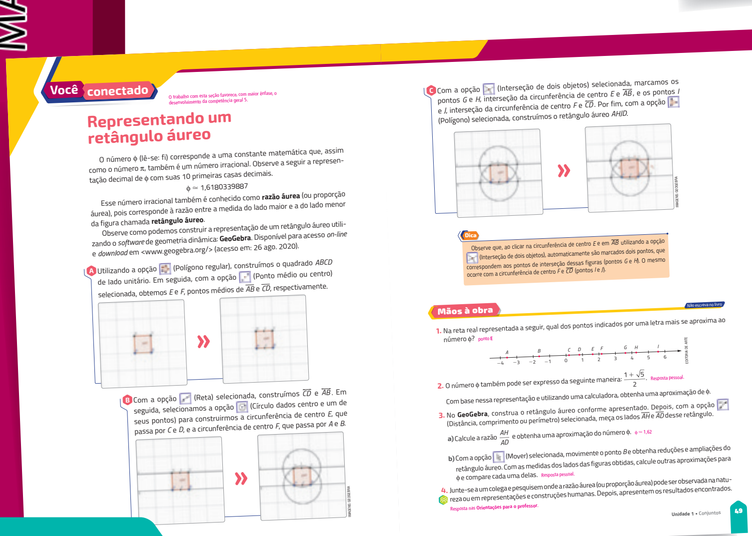
Abertura de Unidade

A abertura de cada Unidade é organizada em página dupla. Em geral, ela apresenta uma diversidade de recursos, como imagens, textos e infografias. Além disso, são propostas algumas questões com o objetivo de identificar a compreensão do estudante em relação ao tema da Unidade e a aspectos de seu conhecimento prévio sobre algum conceito que será estudado. É importante propor o trabalho com a abertura da Unidade de acordo com as características próprias da turma ou com os objetivos específicos para a aula, como a realização da leitura individual ou coletiva e a discussão acerca das questões. Sempre que julgar oportuno, retomar com os estudantes a abertura no decorrer do estudo da Unidade.

Integrando

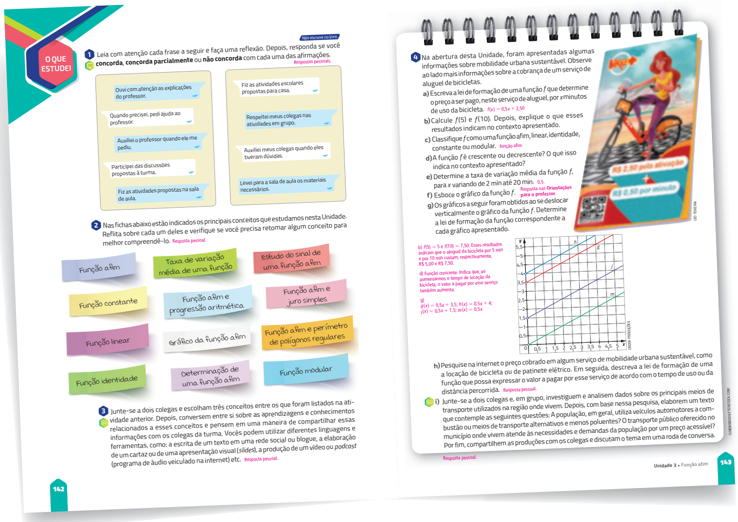
Esta seção propõe o estudo de temas que relacionam a área de Matemática e suas Tecnologias às outras áreas do conhecimento, o que possibilita a integração de conceitos sob diferentes perspectivas. Nesse sentido, sugere-se dialogar com professores das áreas relacionadas para planejar a aula em que a seção será realizada e avaliar a possibilidade de organizar a turma para que analise as informações apresentadas e resolva as atividades propostas em pequenos grupos.





Você conectado

Nesta seção, apresentada ao final de cada Unidade, são propostas atividades que envolvem o estudo de conceitos matemáticos com o apoio do *software* de geometria dinâmica **GeoGebra** ou da planilha eletrônica **LibreOffice Calc**, ambos de livre acesso na internet. As atividades propostas devem ser realizadas de acordo com a realidade na qual a escola está inserida, ou seja, podem ser desenvolvidas em um laboratório de informática, com os estudantes organizados em pequenos grupos, ou coletivamente em um computador portátil, que o professor pode levar para a sala de aula, acompanhado de um projetor ou, ainda, como uma atividade extraclasse.



O que estudei

Esta seção, organizada ao final de cada Unidade, propõe um momento de reflexão e de autoavaliação, tanto para o estudante quanto para o professor. Em relação ao estudante, são consideradas suas atitudes comportamentais e sua compreensão dos conceitos estudados na Unidade. Já em relação ao professor, sua autoavaliação é condicionada às respostas dadas pelos estudantes, as quais podem ser objetos de reflexão a respeito de sua prática docente. Essa reflexão, por sua vez, pode propiciar ajustes nos planejamentos de aula das Unidades seguintes.

1. Na questão **1**, o estudante deve fazer um retrospecto de sua postura nas aulas de Matemática. As respostas aos itens dessa questão devem ser individuais, de maneira a evidenciar, da melhor forma possível, suas atitudes comportamentais. Nesse sentido, o estudante pode eleger alguns itens para os quais respondeu "concorda parcialmente" ou "não concorda" como pontos de atenção para o estudo da Unidade seguinte, buscando compreender melhor os assuntos que estiverem sendo tratados. Sob o ponto de vista do professor, além das análises individuais, cabe uma leitura ampla para identificar ações que poderão ser tomadas para uma correção de rota coletiva. Um exemplo é o estabelecimento ou ajuste no contrato didático que mantém com a turma. No decorrer do ano, sugere-se reservar momentos para que o estudante possa comparar suas respostas a essa questão ao longo do estudo das Unidades e verificar como seu comportamento evoluiu.

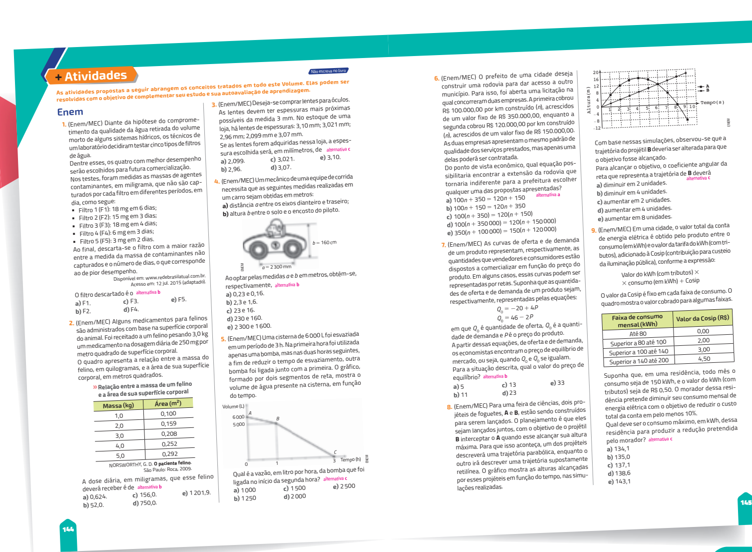
2. A questão **2** pode ser, em um primeiro momento, trabalhada de maneira individual, possibilitando a cada estudante identificar significados para os conceitos estudados na Unidade e indicados nas fichas. Em um segundo momento, a abordagem pode ser coletiva, permitindo ao professor perceber conceitos que uma parte significativa da turma pode não ter compreendido satisfatoriamente. Esses momentos caracterizam oportunidades para que o professor estabeleça um plano de ação para a turma, no qual podem ser propostas monitorias, grupos de estudo, aulas de reforço, entre outras ações.

3. A questão **3** possibilita ao estudante trabalhar de maneira coletiva ao reunir-se em grupo para propor, de forma criativa, explicações de conceitos estudados na Unidade. É importante valorizar as produções dos grupos de estudantes e incentivar o compartilhamento com a turma. Sugerimos que sejam distribuídos os conceitos entre os grupos para que sejam contemplados todos aqueles indicados nas fichas da questão **2**.

4. A questão **4** é complementar às questões **2** e **3**, uma vez que se propõe a identificar a compreensão dos conceitos matemáticos estudados na Unidade, com base na retomada do tema abordado na abertura da Unidade. Porém, aqui, busca-se que isso se dê à medida que o estudante resolve problemas, fazendo uso dos conceitos matemáticos estudados na Unidade. No entanto, caso a resolução proposta pelo estudante para certo problema seja efetivada por meio de uma estratégia na qual sejam utilizados conceitos diferentes daqueles estudados na Unidade, é importante que o professor a valorize e, se possível, compartilhe com a turma.

+ Atividades

Nesta seção, apresentada ao final de cada Volume da coleção, são propostas questões do Enem e de vestibulares aplicadas nas diferentes regiões do Brasil e que tratam de conceitos estudados em cada Unidade. Essas questões podem ser propostas no decorrer do estudo das Unidades e serem consideradas no processo avaliativo dos estudantes.



2. O Novo Ensino Médio

O Novo Ensino Médio é regulamentado pela resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018, que atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), e pela lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, que traz um conjunto de alterações na legislação vigente[1]. Para a implementação do Novo Ensino Médio foram também publicados o Guia de Implementação do Novo Ensino Médio[2] e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[3].

Essa legislação e os documentos oficiais propõem uma renovação curricular das instituições públicas e privadas que oferecem vagas para esse segmento de ensino. Trata-se de uma ação resultante do Plano Nacional da Educação vigente para o período de 2014 a 2024, cujas metas 3 e 6 preveem, respectivamente, a "universalização progressiva do atendimento escolar de jovens de 15 a 17 anos, além da renovação do Ensino Médio, com abordagens interdisciplinares e currículos flexíveis", e a "ampliação da oferta da educação de tempo integral, com estratégias para o aumento da carga horária e para a adoção de medidas que otimizem o tempo de permanência do estudante na escola" (BRASIL, 2019, p. 7). Essa proposta, portanto, constitui uma renovação resultante de um longo debate educacional que começa a tomar forma com a promulgação da Constituição Brasileira em 1988 e com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em 1996 (LDB/96) e que se viabiliza juridicamente com as mais recentes regulamentações.

Além da ampliação da carga horária, a legislação propõe a flexibilização do currículo escolar, especificando uma parte para a formação geral básica, na qual os conteúdos são obrigatórios e comuns a todas as escolas de Ensino Médio, e outra a ser definida com a participação dos estudantes, que poderão escolher itinerários formativos segundo seus interesses e disponibilidade nas instituições de ensino. Essas duas partes do currículo devem se complementar, de maneira que uma ajude a outra a atribuir significado ao processo de ensino-aprendizagem.

Essencial ao novo projeto para o Ensino Médio, a formação integral é definida pela própria legislação como o desenvolvimento intencional dos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais dos estudantes, por meio de processos educativos que promovam a autonomia, o comportamento cidadão e o protagonismo "em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida" (BRASIL, 2018a, p. 15). Para que essa prática seja alcançada, a organização curricular deve propiciar a devida articulação dos conteúdos das diferentes disciplinas (componentes curriculares) com as práticas sociais dos mais diferentes campos da atividade humana, tendo como consequência esperada a atribuição de significado a esses conteúdos pelos estudantes.

Para garantir as práticas propostas para o Ensino Médio e balizar a especificação da parte obrigatória e comum, espera-se o alinhamento dos materiais didáticos e das práticas realizadas nas escolas de todo o país com as competências e habilidades apresentadas pela BNCC. Essas orientações não desconsideram o conhecimento acumulado pela sociedade ao longo da história, mas entendem que ele precisa ser contextualizado e problematizado, a fim de que seja reconstruído e consolidado pelos estudantes para, assim, permitir a construção de novos conhecimentos que possam ser aplicados no entendimento do mundo contemporâneo, identificando problemas e propondo soluções.

1 Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e nº 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho – CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. (BRASIL, 2018a, p. 468.)

2 Disponível em: http://novoensinomedio.mec.gov.br/#!/guia. Acesso em: 29 jun. 2020.

3 Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse propósito ganha impulso quando o processo contribui para a indissociabilidade entre teoria e prática, atitudes e valores, análise e ação. Por isso, as competências são entendidas como "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018a, p. 8). Ao mesmo tempo, as habilidades são entendidas como "conhecimentos em ação, com significado para a vida, expressas em práticas cognitivas, profissionais e socioemocionais, atitudes e valores continuamente mobilizados, articulados e integrados" (BRASIL, 2018b, p. 3).

Outra novidade implementada no Novo Ensino Médio é a organização curricular por área do conhecimento. Embora essa proposta já estivesse presente nos documentos educacionais oficiais, ela foi consolidada de maneira efetiva na BNCC, por meio do agrupamento das competências e habilidades em quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

3. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define um conjunto de aprendizagens essenciais que os estudantes brasileiros devem desenvolver durante a Educação Básica, independentemente da região onde moram. O principal objetivo é garantir que todos os estudantes brasileiros tenham a mesma oportunidade de aprender o que é considerado essencial. O documento é exclusivo à educação escolar e está orientado por princípios que visam uma formação humana integral e uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

Além da equiparação das oportunidades de aprendizagem, buscando reduzir as desigualdades históricas estabelecidas, o desenvolvimento de uma base comum curricular visa outros fatores como assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, orientar a elaboração de um currículo específico de cada escola ou rede escolar, pública ou privada, e instruir as matrizes de referência das avaliações e dos exames externos.

Uma das características desse documento é que ele não define o modo como ensinar nem impede que sejam contempladas no dia a dia escolar as especificidades regionais. Assim, a BNCC (BRASIL, 2018a) estabelece um conjunto de conhecimentos básicos que devem ser assegurados, sem interferir na diversidade cultural e regional e na autonomia dos educadores.

Essas aprendizagens essenciais devem coexistir para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais no decorrer da Educação Básica.

Em articulação com as competências gerais e com as áreas do conhecimento em que o Ensino Médio está organizado, a BNCC define competências específicas para cada uma dessas áreas (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e habilidades que lhes correspondem.

Nesta Coleção, buscou-se articular, em diversos momentos, abordagens que integrassem o desenvolvimento de competências gerais e competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias. Por exemplo, ao propor o trabalho com o tema "poluição sonora", tratou-se com maior ênfase as competências gerais **2** e **8**, uma vez que tal abordagem foi pautada em conhecimentos científicos do estudo da intensidade sonora e em análise crítica envolvendo cuidados físicos, em especial a audição; além disso, propiciou tratar das competências específicas **1** e **3** e das habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT305**, uma vez que esse estudo sobre a intensidade sonora desenvolveu-se com base em modelo logarítmico e em grandezas correspondentes.

Nas **Orientações específicas para este Volume**, são apresentadas as competências gerais, as competências específicas e as habilidades trabalhadas com maior ênfase em cada Unidade deste Volume.

As competências gerais

A seguir, estão listadas as dez competências gerais da Educação Básica definidas pela BNCC.

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2018a, p. 9-10.)

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)

Discussões acerca do papel da escola na sociedade atual implicaram em modificações metodológicas e curriculares na Educação. Os temas contemporâneos surgiram com a proposta de construção da cidadania, entre os quais destacam-se: direitos da criança e do adolescente; educação para o trânsito; educação ambiental; educação alimentar e nutricional; processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso; educação em direitos humanos; educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena; saúde; vida familiar e social; educação para o consumo; educação financeira e fiscal; trabalho; ciência e tecnologia; e diversidade cultural. Esses temas transcendem e perpassam todas as áreas do conhecimento.

Nas aulas de Matemática, as abordagens de questões sociais, por meio de conhecimentos matemáticos, ao mesmo tempo que possibilitam estabelecer relações com outras áreas do conhecimento, contextualizações e reflexão crítica, conferem ao trabalho do professor a possibilidade de contribuir para a formação cidadã dos estudantes.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018a, p. 19),

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

Por essa perspectiva, procura-se contribuir para o rompimento da barreira da fragmentação do conhecimento, proporcionando aos estudantes uma visão de reintegração de conteúdos e de procedimentos acadêmicos que ficaram por muito tempo isolados uns dos outros pelo método de disciplinas escolares.

Nesta Coleção, os temas contemporâneos são discutidos em diversos momentos, sempre em conexão com os conceitos matemáticos em estudo e, por vezes, estabelecendo relações com outras áreas do conhecimento. Por exemplo, em uma proposta de estudo de conceitos estatísticos, envolvendo a situação de *bullying*, em especial no ambiente escolar, tratou-se dos direitos da criança e do adolescente. Outro exemplo, no contexto do estudo sobre noções da teoria de conjuntos, é proposta uma abordagem que envolve procedimentos de transfusão sanguínea, o que estabelece um trabalho relacionado ao tema saúde e em conexão com competências da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A BNCC e os currículos

Considerando os múltiplos conhecimentos desenvolvidos pela humanidade ao longo do tempo, o currículo escolar é aquele que seleciona e organiza o que os estudantes devem aprender, regulando as práticas didáticas que se desenvolvem na sala de aula (SACRISTÁN, 2013). A partir dessa perspectiva, é fácil ver que existem diversos atores que contribuem para a elaboração do currículo escolar: as políticas educativas nacionais, as secretarias de Educação de Estados e Municípios, as escolas e os professores. Embora cada um desses atores assuma a responsabilidade de concretizar o currículo em diversos níveis, todos eles deveriam trabalhar buscando atingir as mesmas metas educacionais.

Sendo uma das principais políticas curriculares nacionais, a BNCC é o documento que define quais são as **aprendizagens essenciais** que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica (BRASIL, 2018a). Tomando a BNCC como ponto de partida, serão as redes de ensino e as escolas as encarregadas de definir seu currículo escolar. Para isso, deverão adequar as orientações da BNCC às realidades de cada localidade e contexto escolar, assim como às características dos estudantes. Nesse processo, as redes e as instituições escolares poderão tomar decisões relativas a como irão contextualizar os conteúdos, segundo sua realidade específica, definir as diversas formas de organização dos componentes curriculares, construir procedimentos de avaliação formativa, que levem em conta os contextos concretos de aprendizagem, selecionar e produzir materiais e recursos para apoiar o processo de ensino e aprendizagem, entre outras. Considerando suas esferas de autonomia, as redes de ensino e as escolas poderão incorporar a seus currículos temáticas contemporâneas atuais de natureza transversal, tais como a educação ambiental, a educação alimentar e nutricional, a educação para o consumo, a educação financeira e fiscal, entre outras. Cabe destacar que a Matemática pode ser uma importante ferramenta para trabalhar esses tópicos no Ensino Médio. Assim, a BNCC e os currículos escolares desempenham papéis diferentes, mas complementares, e ambos reconhecem o compromisso da educação na formação e no desenvolvimento global do ser humano.

Considerando as especificidades e os desafios do Ensino Médio, a BNCC organiza as aprendizagens essenciais para esse nível em **áreas do conhecimento** (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) definindo, para cada uma delas, **competências específicas** e **habilidades** a serem desenvolvidas. Essa forma de organização, que privilegia a integração dos componentes curriculares, tem seu impacto na formulação do currículo sem excluir, necessariamente, componentes curriculares; o objetivo é fortalecer as relações e a integração entre eles para que o estudante possa melhor compreender a complexidade da realidade e nela intervir. Tal organização impacta, ademais, no trabalho dos professores, que são chamados a desenvolver atividades de planejamento e implementação de maneira cooperativa e conjunta com os de outras áreas do conhecimento.

A área de Matemática e suas Tecnologias

Na BNCC, a Matemática é destacada como uma área do conhecimento essencial para os estudantes da Educação Básica, tanto por suas aplicações como também por suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e engajados. Para o Ensino Médio, a proposta é a de que as aprendizagens desenvolvidas na etapa anterior sejam consolidadas, ampliadas e aprofundadas (BRASIL, 2018a, p. 527) com foco na construção de uma visão integrada da Matemática e de sua aplicação à realidade, bem como com outras áreas do conhecimento.

Nesse sentido, o documento explicita que

> [...] quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BRASIL, 2018a, p. 528.)

O documento também apresenta o compromisso que se deve ter no Ensino Médio com a ampliação do letramento matemático, definido como:

> [...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018a, p. 266.)

Dessa maneira, a proposta é a de que sejam desenvolvidas habilidades relacionadas, principalmente, ao modo de raciocinar, representar, comunicar e argumentar, visando à ampliação dos conhecimentos matemáticos e maior reflexão e abstração dos estudantes para resolver problemas mais complexos, para que sejam capazes de compreender o mundo e nele atuar.

Para isso, a BNCC cita os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem. Esses processos podem ser tomados como formas de organização da aprendizagem matemática e levam em consideração a análise de situações do cotidiano, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática.

Com base no que foi apresentado anteriormente, a BNCC delimita competências específicas e habilidades relacionadas a cada uma delas para a área de Matemática e suas Tecnologias. Diferentemente do que é apresentado para o Ensino Fundamental, as competências específicas e habilidades para o Ensino Médio não focam em conteúdos específicos, mas na formação geral dos estudantes para a cidadania e o protagonismo no mundo em que vivem. Essas competências não têm uma ordem preestabelecida e pode ocorrer a mobilização de uma ou mais delas em determinadas situações. Já as habilidades podem contribuir para o desenvolvimento de uma ou mais competências específicas.

Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018a, p. 532.)

Essa competência propõe aos estudantes que utilizem seus conhecimentos matemáticos como ferramenta para interpretar e compreender situações cotidianas, a fim de analisarem criticamente e refletirem sobre informações relacionadas a elas.

Nesta Coleção, a competência específica **1** é tratada, por exemplo, no estudo do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM), abordando suas principais características, seu processo de cálculo e sua análise de resultados.

Habilidades
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. p. 533.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018a, p. 534.)

O desenvolvimento dessa competência visa contribuir para que os estudantes sejam atuantes na sociedade em que vivem, que possam identificar e investigar eventuais problemas em sua comunidade buscando e propondo ações para solucioná-los individual ou coletivamente.

Nesta Coleção, a competência específica **2** é tratada, por exemplo, no estudo sobre orçamento financeiro em situações que envolvem planejamento e organização de gastos pessoais ou familiares, utilizando ferramentas digitais, análise de orçamentos, reflexões e possíveis tomadas de decisão.

Habilidades
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. p. 534.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018a, p. 535.)

Essa competência está relacionada à ação de resolver situações-problema, contemplando tanto contextos próprios da Matemática quanto de outras áreas do conhecimento e do cotidiano do estudante. Além da resolução, é proposto ao estudante que elabore problemas, a fim de mobilizar e refletir sobre os conceitos estudados.

Nesta Coleção, a competência específica **3** é tratada, por exemplo, no estudo sobre funções trigonométricas, em que são propostas a resolução e a elaboração de problemas envolvendo fenômenos da natureza com comportamento periódico e que podem ser modelados por funções.

Habilidades
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. p. 536-537.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2018a, p. 538.)

Essa competência trata da utilização e da compreensão de diferentes tipos de registros na resolução de situações-problema, buscando expressar ideias matemáticas relacionadas e possibilitando a ampliação da capacidade do estudante de pensar matematicamente.

Nesta Coleção, a competência específica **4** é tratada, por exemplo, no estudo sobre noções de linguagem de programação, que envolve tarefas e situações cotidianas cujas execuções podem ser descritas por meio de um algoritmo expresso por escrito ou por um fluxograma.

Habilidades
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. p. 539.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018a, p. 540.)

O desenvolvimento dessa competência possibilita aos estudantes perceberem a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo da Matemática e se apropriarem dessa ideia para raciocinar logicamente e validar proposições. Ao investigar, formular hipóteses e realizar tentativas de validá-las ou refutá-las, os estudantes buscam utilizar os conceitos matemáticos estudados em suas argumentações e, dessa maneira, estabelecer relações entre eles.

Nesta Coleção, a competência específica **5** é tratada, por exemplo, no estudo de progressões aritméticas e de progressões geométricas, que podem ser associadas a algumas funções e, assim, deduzir fórmulas e analisar propriedades.

Habilidades
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. p. 541.

4. Fundamentos teóricos e metodológicos da Coleção

Em uma sociedade globalizada, o ensino de Matemática tem papel fundamental na formação de cidadãos conscientes, críticos e participativos. O incentivo a práticas reflexivas no estudo da Matemática escolar pode favorecer o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas do dia a dia e a quebra de paradigmas.

Nesta Coleção, os fundamentos teóricos e metodológicos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem buscam favorecer o trabalho coletivo e colaborativo como uma maneira de estimular a participação, a reflexão e a comunicação entre os estudantes.

Sempre que possível, procurou-se propor os conceitos matemáticos a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, alicerces para a construção de novos conhecimentos. O encadeamento dos conteúdos matemáticos foi pensado com a finalidade de convidar os estudantes a expor e escutar ideias, a formular, confrontar e comunicar procedimentos de resolução de problemas, a argumentar e validar outros pontos de vista.

Os Volumes desta Coleção foram organizados para apoiar o trabalho do professor procurando, quando possível, fazer uso de diferentes tendências metodológicas. As propostas interdisciplinares e as temáticas de caráter social permitem o desenvolvimento de competências como as da leitura, da escrita e da oralidade, e ainda oferecem elementos para a composição de situações contextualizadas para as atividades.

O Livro Didático da área de Matemática e suas Tecnologias

O Livro Didático é um importante instrumento no processo de ensino-aprendizagem. Considerando o trabalho de Gérard e Roegiers (1998), Pereira (2010) apresenta as funções do Livro Didático de acordo com duas perspectivas. Em relação ao estudante, são atribuídas aos livros didáticos múltiplas funções, entre as quais: a aprendizagem e o progresso de competências; a estabilização, a avaliação e a integração das aprendizagens; a apresentação da informação rigorosa e de fácil utilização e a educação social e cultural. Na perspectiva do professor, o Livro Didático tem, entre outros, o papel: de auxiliar o docente no desenvolvimento de suas funções; de colaborador na formação contínua dos docentes ao apresentar novos caminhos e estratégias para a renovação de suas práticas pedagógicas; de instrumento que auxilia na preparação de aulas e nos processos de avaliação.

> A aprendizagem pode se tornar mais significativa, quando diferentes formas de representação são contempladas no livro didático. Além de valorizar uma abordagem interdisciplinar com diferentes textos, espera-se que o livro apresente números, equações, figuras, tabelas, gráficos, símbolos, desenhos, fotos, entre outros elementos que contribuem nas estratégias de articulação entre conteúdos e disciplinas. Quanto mais intensas forem a interatividade e a articulação, mais significativa será a aprendizagem. O aluno realiza articulações, quando consegue, por exemplo, a partir da leitura de um texto, montar uma tabela ou um gráfico, equacionar um problema ou descrever um argumento. Deve, ainda, ser estimulado a realizar movimentos em várias direções, tal como a passagem da leitura de uma tabela para a redação de um texto, para uma representação gráfica ou para o exercício da oralidade. Embora o interesse seja trabalhar com representações, não podemos esquecer que a apresentação do conteúdo pressupõe vínculos com os conhecimentos prévios dos alunos, considerando a possibilidade de uso de registros espontâneos. (PAIS, 2007, p. 52-53.)

Nesta Coleção, os conteúdos foram organizados levando em consideração as diferentes formas de representação dos objetos matemáticos. Nesse sentido, os estudantes são convidados, em diversos momentos, a dialogar entre si e com o professor e a realizar registros que podem se dar de diversas maneiras: utilizando linguagem matemática ou natural (materna), empregando gráficos ou diagramas, usando representações pictóricas ou outras, a fim de incentivar a reflexão e a autonomia do pensamento.

Consideramos que o Livro Didático é um dos recursos educativos que o professor tem a seu dispor. Outros recursos didáticos, como a calculadora, o laboratório de informática e o laboratório de ensino de

Matemática, são elementos que também compõem o ambiente educacional e podem auxiliar e enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. A prática cotidiana da sala de aula exige cada vez mais que o professor seja dinâmico e procure despertar nos estudantes a curiosidade, o interesse e o prazer de aprender.

Proposta didático-pedagógica

A proposta didático-pedagógica desta Coleção tem por objetivo contribuir para uma formação ampla do estudante, não apenas em aspectos cognitivos, mas também em sua formação cidadã e na observância no mundo do trabalho. Nela, procurou-se articular, sempre que possível, temas contemporâneos e interdisciplinares a conceitos matemáticos, oferecendo ao professor diferentes estratégias metodológicas e o aprimoramento de sua prática pedagógica. O tratamento dado aos conteúdos matemáticos, em sala de aula, deve levar em consideração os recursos disponíveis para que o trabalho seja efetuado.

> O professor tem também em conta, naturalmente, os alunos, as suas capacidades e interesses. Há alunos que reagem bem a certo tipo de propostas, outros que preferem outro tipo, outros que têm uma atitude relativamente indiferente. Cada vez com maior frequência, encontramos alunos que revelam grande desinteresse em relação a tudo o que tem a ver com a escola em geral e com a Matemática em particular. Dentro de uma mesma turma, há, muitas vezes, alunos com características muito diversas no que respeita aos seus conhecimentos matemáticos, interesse pela Matemática, atitude geral em relação à escola, condições de trabalho em casa, acompanhamento por parte de família, etc. A diversidade dos alunos que o professor tem na sua sala de aula deve ser por ele ponderada, de modo a tentar corresponder, de modo equilibrado, às necessidades e interesses de todos. (PONTE, 2005, p. 19-20.)

A fim de sinalizar a proposta didático-pedagógica que fundamentou a elaboração desta Coleção, apresentam-se abordagens relacionadas à concepção de Matemática no Ensino Médio e ao ensino de Matemática.

Concepção de Matemática no Ensino Médio

A Matemática e suas ideias estão presentes nos currículos desde a Educação Infantil. Seu ensino e sua aprendizagem são marcados por diversas concepções do professor e dos estudantes.

Para Ponte (1992), as concepções, de forma geral, têm uma natureza essencialmente cognitiva e podem estruturar o sentido que damos às coisas e, por vezes, atuar como elemento que bloqueia e limita nossas possibilidades de atuação e compreensão.

> As concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros). Assim, as nossas concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes. (PONTE, 1992, p. 185.)

Para entender melhor essas concepções, Ponte (1992, p. 196) sugere que o saber matemático abrange quatro características fundamentais:

> - a *formalização* segundo uma lógica bem definida;
> - a *verificabilidade*, que permite estabelecer consensos acerca da validade de cada resultado;
> - a *universalidade*, isto é, o seu caráter transcultural e a possibilidade de o aplicar aos mais diversos fenômenos e situações;
> - a *generatividade*, ou seja, a possibilidade de levar à descoberta de coisas novas.

Thompson (1992) destaca que, das concepções de Matemática, existem aquelas de ordem pedagógica, que podem estar centradas: no conteúdo com ênfase na compreensão conceitual; no conteúdo com ênfase na execução; no estudante; na organização da sala de aula; e no conteúdo com ênfase nas situações problemáticas.

O surgimento de novas orientações curriculares, a participação em ações de formação ou a leitura de materiais educativos podem suscitar novas perspectivas em relação à prática pedagógica.

No entanto, independentemente da concepção de Matemática, é importante que o professor tenha parâmetros em sua prática. De acordo com a BNCC, por exemplo, é necessário que o professor esteja ciente de que, para dar continuidade às aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, os estudantes do Ensino Médio

> [...] devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018a, p. 529.)

O ensino de Matemática

O ensino de Matemática precisa privilegiar a exploração de uma variedade de noções matemáticas que contribuam para que os estudantes construam e desenvolvam seu conhecimento matemático, sem perder o prazer, o interesse e a curiosidade. Por isso, é importante conciliar o trabalho com os conceitos matemáticos a abordagens que valorizem a integração entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento, a proposição de temáticas sociais nas atividades a serem desenvolvidas e o estímulo ao uso adequado das novas tecnologias da informação e comunicação no estudo.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018a), no Ensino Médio deve-se ter o compromisso de promover ações que ampliem o letramento matemático, o qual, segundo o Programme for International Student Assessment (PISA), consiste na

> [...] *capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática do mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos.* (INEP, 2012, p. 18.)

Ainda de acordo com a BNCC,

> [...] Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (BRASIL, 2018a, p. 529.)

Para tanto, faz-se necessário criar um ambiente propício em sala de aula que possa ter como base o diálogo e a comunicação. Assim, o professor deve estimular os estudantes a se comunicar (oralmente, por exemplo) ou a registrar (por meio de textos, esquemas ou outras formas de registro) suas ideias matemáticas. O hábito de expressá-las pode ser desenvolvido questionando aos estudantes sobre como pensaram para realizar determinada atividade ou para resolver algum problema ou desafio. As dramatizações também podem ser estimuladas como uma forma de expressão de ideias matemáticas.

Em relação às características das intervenções por parte do professor, elas devem ser construtivas, dando oportunidade aos estudantes de reverem suas posições e perceberem as incoerências, quando existirem, contribuindo, assim, para a construção de seus conhecimentos. O professor pode fazer algumas intervenções por meio de perguntas, como as indicadas a seguir.

- Como você obteve esse valor? Que estratégias você utilizou?
- O que você pode concluir a partir desse resultado?
- Como você pode convencer alguém de que sua resposta está correta?
- É possível obter esse mesmo resultado por meio de outra estratégia?
- Vamos testar essa outra estratégia?
- Você pode afirmar que os procedimentos que utilizou são válidos? Explique.
- A estratégia que você utilizou nessa situação pode ser empregada em quais outros casos?

É importante que os estudantes sejam incentivados a buscar diferentes formas de pensar, ampliando sua capacidade cognitiva e sua atitude diante de novas situações. Aliado a isso, ressalta-se a realização de atividades coletivas e cooperativas, o que favorece a socialização, a troca de ideias, a observação de outros pontos de vista, o reconhecimento de outras formas de pensar e de realizar as atividades.

A argumentação, a inferência e o pensamento computacional

Assim como em outras áreas do conhecimento, a área de Matemática e suas Tecnologias possui características próprias que definem o tipo de conhecimento por ela desenvolvida. O modo de desenvolver **raciocínios matemáticos** é uma dessas características. Nesse tipo particular de raciocínio, a argumentação matemática, a produção de inferências e o pensamento computacional possuem um papel central.

A **argumentação matemática** é indispensável para que os estudantes possam assimilar significados dos objetos matemáticos e desenvolver a racionalidade matemática. Para envolver os estudantes em atividades de argumentação matemática, é necessário que o professor procure oferecer oportunidades para explorar os porquês de determinados resultados ou situações; resolver desacordos por meio de explicações e justificativas válidas de um ponto de vista matemático; formular conjecturas, investigar sua plausibilidade e refutá-las ou validá-las por meio da procura de contraexemplos ou a avaliação de demonstrações matemáticas, respectivamente (BOAVIDA; GOMEZ; MACHADO, 2002).

Fica evidente, então, que para desenvolver as capacidades argumentativas dos estudantes é necessário propor tarefas que devem ir além da simples manipulação de símbolos ou procedimentos matemáticos. É necessário desafiá-los com atividades investigativas que tenham potencial de originar discussões matemáticas, confrontar ideias e resoluções e justificar suas soluções. Nessa direção, a BNCC propõe, também, o uso de diferentes tecnologias para que os estudantes do Ensino Médio investiguem e explorem conjecturas vinculadas a conceitos e propriedades matemáticas, observem padrões, analisem dados e informações de maneira crítica, modelem e solucionem problemas da vida cotidiana. Nesse processo, é importante propor uma trajetória que leve os estudantes a compreender como se originam e se formulam as argumentações matemáticas. É particularmente importante que eles aprendam a distinguir uma conjectura de uma afirmação demonstrada, que compreendam que a apresentação de vários exemplos não garante a validade de uma conjectura e que vivenciem a elaboração de demonstrações matemáticas como um modo de explorar o motivo da validade de uma conjectura. Nesta Coleção, há momentos propícios para esse tipo de abordagem, como na investigação de relações entre as razões trigonométricas em triângulos ou no estudo de expressões de cálculo de áreas de figuras planas.

A reflexão sobre a maneira na qual se estruturam as argumentações matemáticas nos leva a outro ponto central dos raciocínios matemáticos: a produção de **inferências**. Inferir é o processo por meio do qual se derivam conclusões a partir de certas premissas. Em Lógica, podem-se distinguir três tipos de inferências: as **deduções**, que partem de uma regra geral e uma premissa para inferir um caso particular; as **induções**, que partem de premissas menores e buscam sua generalização mediante a experimentação e a comprovação; e as **abduções**, que partem de dados que descrevem uma situação e colocam uma hipótese que melhor explique ou esclareça esses dados. Embora a Matemática, quando considerada como disciplina formal, muitas vezes se apoie em inferências dedutivas, os três tipos de inferência têm um papel relevante quando consideramos os processos de produção dos conhecimentos matemáticos. Assim, é importante que os estudantes do Ensino Médio tenham oportunidades de vivenciar o processo de formulação envolvendo esses três tipos de inferência. Isso é possível quando o professor propõe formular conjecturas a partir de experimentações com materiais concretos, apoios visuais e/ou tecnologias digitais – mobilizando a abdução ou a indução – buscando, ademais, contraexemplos para refutá-las e/ou argumentos para validá-las. Essa validação deve ser feita utilizando argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições matemáticas (BRASIL, 2018a), o que contribui para o desenvolvimento de inferências do tipo dedutivo. Ao propormos, por exemplo, o estudo da sequência de Fibonacci, é possível estimular os estudantes a perceber as regularidades entre seus elementos, a inferir sobre a determinação dos elementos seguintes aos apresentados e a conjecturar sobre uma lei de formação que possa reger de maneira recursiva a composição de tal sequência.

Visando colaborar para que os estudantes construam uma visão integrada da Matemática, aplicada a uma realidade na qual as tecnologias ocupam um papel cada vez mais central, é importante que eles também tenham oportunidade de desenvolver o **pensamento computacional** que, segundo a BNCC, envolve a compreensão, a análise, a definição, a modelação, a resolução, a comparação e a automatização de problemas e soluções por meio do desenvolvimento de algoritmos (BRASIL, 2018a). Mobilizar o pensamento computacional contribui para o desenvolvimento do pensamento abstrato, distinguindo níveis de abstração nos problemas para poder solucioná-los; o pensamento algorítmico, que requer encontrar uma série de passos eficazes para resolver o problema; o pensamento lógico, formulando e excluindo hipóteses; e o pensamento dimensionável, vinculado à decomposição de um problema em pequenas partes. Podemos ver, assim, que promover o desenvolvimento do pensamento computacional é, também, uma oportunidade rica para que os estudantes desenvolvam o raciocínio matemático. Para isso, o professor pode utilizar diferentes tecnologias como planilhas eletrônicas, *software* de geometria dinâmica, calculadoras e aplicativos que permitam investigar situações matemáticas, auxiliando na elaboração e na interpretação de algoritmos, além de propor a utilização de alguma linguagem de programação e o uso de registros por meio de fluxograma ou algoritmo. Nesse sentido, na Coleção há momentos que possibilitam ao professor estimular os estudantes no desenvolvimento do pensamento computacional, como no estudo de noções de linguagem de programação, em que se propõe, por exemplo, o trabalho com a linguagem **Scratch**.

Metodologias ativas e algumas tendências em educação matemática

As profundas modificações que vêm ocorrendo em nossa sociedade, principalmente aquelas vinculadas ao desenvolvimento tecnológico, desafiam os professores a adotar as chamadas **metodologias ativas**, ou seja, estratégias de ensino em que os estudantes assumem uma postura ativa na problematização e na análise de situações complexas. Dentro do campo da educação matemática, diversos pesquisadores têm proposto práticas de ensino-aprendizagem que se enquadram como metodologias ativas, ganhando destaque, no Ensino Médio, a resolução de problemas, a modelagem matemática, a investigação matemática, as tecnologias e a educação matemática, a educação matemática crítica, entre outras.

A resolução de problemas toma como ponto de partida, e como meio de aprendizagem, os problemas entendidos como situações perante as quais os estudantes não possuem, de antemão, métodos para chegar à solução (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005). Será no próprio processo de resolver o problema que os estudantes construirão seus conhecimentos matemáticos. Já a modelagem matemática desafia os estudantes a compreender uma situação real e complexa por meio da criação de um modelo matemático que sirva para interpretá-la e realizar predições. Assim, com essa perspectiva, pode-se promover relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e, ao ressaltar sua aplicabilidade, despertar o interesse dos estudantes pela Matemática. Em relação à investigação matemática, os estudantes podem ser desafiados a enfrentar situações relativamente complexas com o objetivo de, por meio de reflexão e formulação de conjecturas, transformá-las em problemas que possam ser abordados à luz da Matemática. Por sua vez, as tecnologias e a educação matemática propõem aos estudantes que façam uso dos mais variados recursos tecnológicos para investigar, compreender e resolver situações-problema. Essa perspectiva sublinha que as tecnologias reorganizam os processos do pensamento matemático, assim como os modos de comunicação dentro da sala de aula (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2016). A educação matemática crítica salienta a importância de os estudantes desenvolverem tanto conhecimentos matemáticos como a capacidade para interpretar e atuar em uma situação social e política em que esses conhecimentos podem ser mobilizados. A partir desse enfoque, a Matemática está presente em diversas atividades do dia a dia e, como tal, exerce muitas funções sobre as quais os estudantes precisam refletir (SKOVSMOSE, 2014).

Essas perspectivas possuem pontos em comum, podendo o professor utilizá-las em combinação. Quando experimentadas em conjunto, elas possibilitam aos estudantes que não só desenvolvam conhecimentos matemáticos, mas também vivenciem os processos mediante os quais se produz conhecimento em Matemática e, mais importante ainda, os mobilizem para compreender e intervir em situações da sua vida cotidiana.

Resolução de problemas

Iniciar a aula com a proposição de um problema, que para Onuchic e Allevato (2011, p. 81) "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer", pode ser o ponto de partida para a construção de um novo conceito matemático.

Ao trabalhar com a resolução de problemas como uma proposta para o ensino de conteúdos matemáticos, faz-se necessário ocupar-se de uma prática na qual o conhecimento é construído por meio das interações sociais dos estudantes. Essa tendência metodológica prioriza o trabalho em grupo, em que as discussões podem ser orientadas pelo professor. Onuchic e Allevato (2005, p. 223) defendem que a "Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o 'dar sentido'. Ao resolver problemas os alunos necessitam refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema; [...]".

Na sala de aula, o professor, ao trabalhar com a resolução de problemas, proporciona aos estudantes a oportunidade de mobilização de seus conhecimentos prévios e o gerenciamento das informações disponíveis. Esse processo, além de contribuir para o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, conduz a construção ou a ampliação de conhecimentos.

Vale ressaltar que os estudantes poderão desenvolver diferentes estratégias para resolver os problemas, cabendo ao professor valorizá-las.

Onuchic e Allevato (2011, p. 83-85) elaboraram, com base nos resultados de suas pesquisas, um roteiro para auxiliar o professor a trabalhar com a resolução de problemas. Esse roteiro considera nove etapas para a organização da aula:

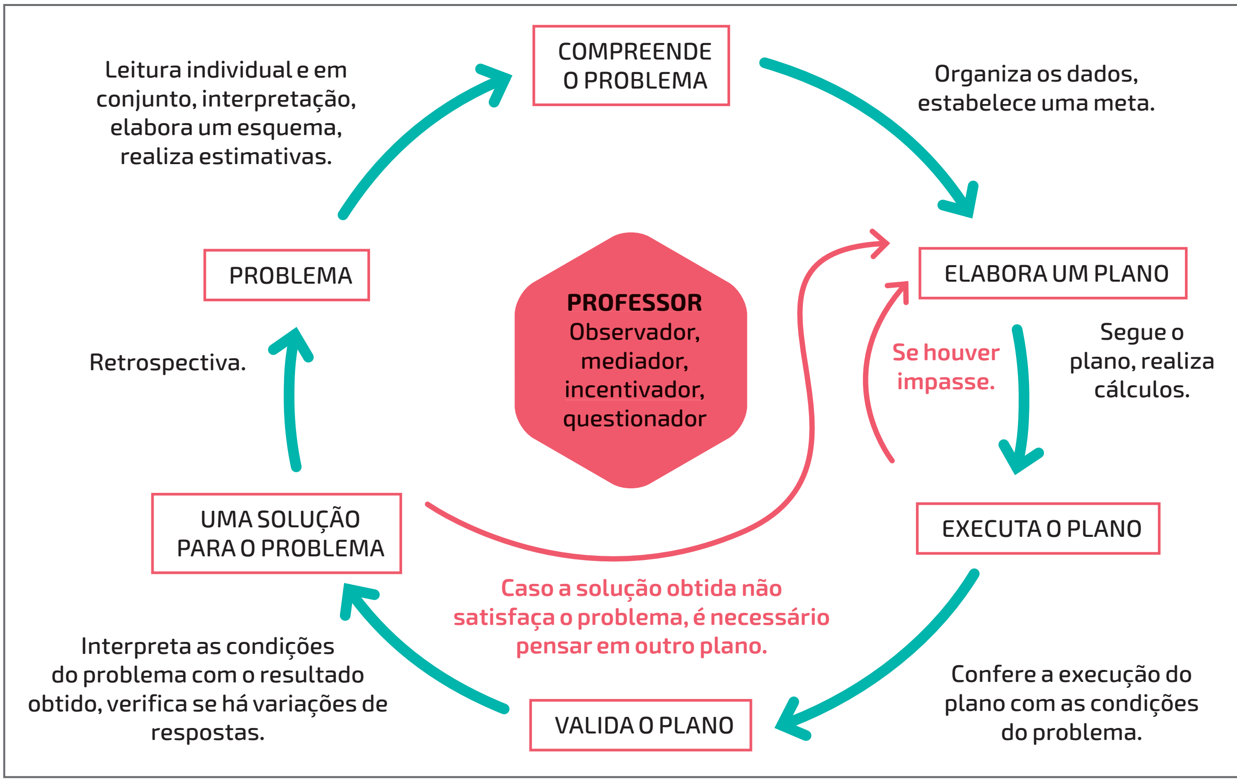
- *Preparação do problema* – Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
- *Leitura individual* – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
- *Leitura em conjunto* – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

  [...]
- *Resolução do problema* – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
- *Observar e incentivar* – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

  [...]
- *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
- *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
- *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
- *Formalização do conteúdo* – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Como pode se dar a resolução de um problema

O esquema a seguir apresenta as etapas e as relações entre elas, com as quais a resolução de problemas pode ser desenvolvida nas aulas de Matemática.



Fonte dos dados: POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. p. 25-27.

Os estudantes, ao resolverem os problemas, podem, de acordo com a abordagem proposta, tornar-se participantes ativos de sua aprendizagem, inserindo-se em um contexto no qual o estudo de Matemática ocorre dentro de um movimento que possibilita fazer análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e formulação de ideias.

Nesta Coleção, são apresentadas atividades resolvidas e, em algumas delas, a resolução é desenvolvida de acordo com quatro etapas: compreender o enunciado, elaborar um plano, executar o plano e verificar os resultados. Com isso, busca-se que o estudante se familiarize com uma estrutura de abordagem para resolver problemas e, com isso, possa gradativamente formatar seu próprio modelo de abordagem a ser aplicado nas atividades propostas.

Modelagem matemática

A modelagem matemática traz para a aula um ambiente investigativo e comunicativo, no qual se pode construir conhecimento.

Entre as diferentes perspectivas de modelagem matemática, optou-se neste texto pela apresentada por Almeida e Ferruzzi (2009), uma alternativa pedagógica na qual, com base em situações oriundas da realidade, os conteúdos matemáticos se desenvolvem. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2009), trata-se de criar possibilidades para enxergar situações do cotidiano por lentes matemáticas, ou seja, de interpretar e analisar situações do cotidiano por meio de linguagem matemática, e, assim, tomar decisões acerca delas.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12),

> [...] uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

Durante o processo de interpretação matemática da situação inicial, há a necessidade de transformar a linguagem natural em linguagem matemática. Nessa direção, Almeida e Silva (2012, p. 627) destacam que

> [...] um aspecto importante numa atividade de modelagem matemática é a necessidade de os próprios alunos, a partir de uma situação-problema não matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise.

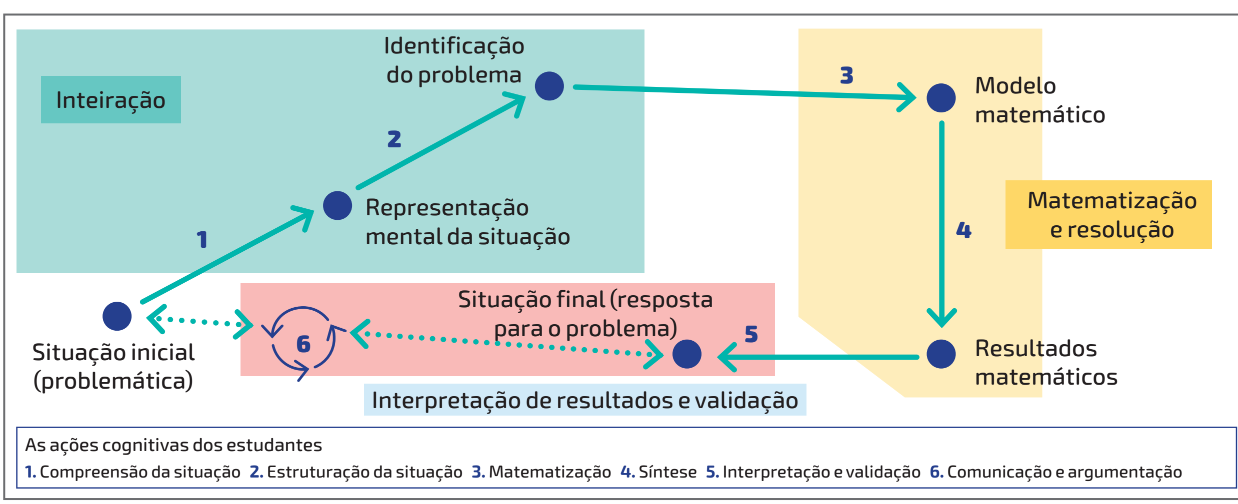
De forma geral, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, estão presentes ações como buscar informações sobre a situação inicial, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, realizar simplificações, obter um modelo matemático, validar e solucionar problema. Essas ações podem ser subsidiadas por orientações do professor.

Embora a construção de um modelo matemático seja importante em uma atividade de modelagem matemática, ela não é considerada o fim desse tipo de proposta, mas uma alternativa que pode permitir a compreensão global da situação investigada e da matemática utilizada.

Em sala de aula, uma atividade de modelagem matemática pode ser desenvolvida por estudantes reunidos em grupos e, então, o professor tem o papel de orientador. A situação-problema pode emergir de uma proposta do professor, dos estudantes ou do material didático que está sendo utilizado.

O trabalho com modelagem matemática pode promover relações interdisciplinares, motivação, levantamento de conhecimentos prévios, trabalho cooperativo, desenvolvimento do pensamento matemático, uso de diferentes representações, uso do computador e de outros recursos didáticos, desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo e aprendizagem significativa.

» Fases da Modelagem matemática e as ações cognitivas dos estudantes



Fonte dos dados: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. O que é Modelagem matemática na educação matemática? *In*: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012. p. 19.

Nesta Coleção, é possível desenvolver trabalhos com modelagem matemática em diferentes momentos. Por exemplo, no estudo de função trigonométrica, é desenvolvido um modelo para descrever a variação da duração solar do dia em determinado município brasileiro e é proposta aos estudantes a realização de uma abordagem análoga para o município ou a região em que moram, relacionando também esse estudo a outras áreas do conhecimento ao tratar da geração de energia solar.

Investigação matemática

Uma investigação matemática, de forma geral, consiste em um processo que transforma uma situação aparentemente confusa em um ou mais problemas que podem ser esclarecidos, ordenados e organizados de tal modo que possam ser resolvidos por meio de um olhar matemático.

De acordo com Ponte (2003, p. 2),

> [...] investigar não é mais do que conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.

Em uma investigação matemática estão presentes quatro momentos principais: 1) o reconhecimento e a exploração da situação e a formulação de questões; 2) a formulação de conjecturas; 3) a realização de testes e reformulações das conjecturas; 4) a argumentação e a avaliação do trabalho realizado (PONTE, 2003). Uma tarefa desenvolvida segundo a perspectiva da investigação matemática aproxima o trabalho dos estudantes ao trabalho dos matemáticos, sendo tarefa de ambos estabelecer os problemas, as hipóteses para resolvê-los, testar suas hipóteses, refutá-las e elaborar suas conclusões.

Todo esse processo se desenvolve segundo um cronograma próprio e envolve a apresentação da situação de forma oral ou escrita, a execução individual ou em grupo, o desenvolvimento da investigação matemática e o momento no qual os estudantes relatam aos colegas e ao professor o trabalho realizado.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2007, p. 41), a

> [...] fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação.

O papel do professor em uma investigação matemática é criar um ambiente propício ao diálogo, à interação e à pesquisa, provocando em seus estudantes a vontade de resolver as atividades investigativas. Geralmente, em uma investigação, o ponto de partida é uma situação aberta, e a participação efetiva dos estudantes na formulação das questões que serão estudadas é fundamental, cabendo a quem investiga a sua concretização. É essa dinâmica que favorece o envolvimento do estudante no processo de aprendizagem (BERTINI; PASSOS, 2008).

Nesta Coleção, é possível trabalhar a investigação matemática em diferentes momentos. Por exemplo, durante o estudo sobre a velocidade de conexão à internet, em que se desenvolvem os conceitos sobre razão entre grandezas, é proposta uma atividade investigativa, em grupo, para que os estudantes avaliem a velocidade de *download* e de *upload* de planos de internet contratados nas residências em que moram ou na residência de algum membro da comunidade, verificando se estão de acordo com as normas estabelecidas pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel).

Tecnologias e a educação matemática

O acelerado desenvolvimento tecnológico das últimas décadas tem provocado transformações sociais e culturais na relação do ser humano com o conhecimento. As novas tecnologias propiciam a criação de ambientes de aprendizagem que ampliam os canais de informações e, ao mesmo tempo, formam e transformam os processos de ensino e de aprendizagem.

Howland, Jonassen e Marra (2011) argumentam que a tecnologia deve ser entendida como uma parceira intelectual e uma ferramenta com a qual os estudantes possam aprender como organizar e resolver problemas, compreender novos fenômenos, construir modelos desses fenômenos e, dada uma situação não conhecida, definir metas e regular a própria aprendizagem.

Pesquisadores da área de educação matemática, como Borba e Penteado (2016, p. 48), destacam a importância das diferentes mídias na produção de conhecimento que é "produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias ou seres-humanos-com-tecnologias". Para esses pesquisadores, o computador provoca a reorganização da atividade humana. Muitas das novas tecnologias proporcionam interatividade, criando ambientes em que os estudantes têm acesso a resultados intermediários que não poderiam ser observados em situações tradicionais.

A interatividade é um dos aspectos mais relevantes de ferramentas desse tipo para o ensino e a aprendizagem. Com o *software* **GeoGebra**, por exemplo, podem ser exploradas estruturas algébricas ou geométricas de forma dinâmica e avaliada a influência de seus parâmetros, além da visualização simultânea de suas diferentes representações. Nesta Coleção, a seção **Você conectado**, organizada ao final de cada Unidade, propõe o uso do

GeoGebra ou da planilha eletrônica **LibreOffice Calc** para ampliar o estudo de diversos conceitos matemáticos. Cabe destacar também o trabalho desenvolvido com noções de linguagem de programação, em que são propostas atividades que buscam explicitar ideias sobre algoritmos, representações por fluxogramas e, em especial, a linguagem de programação **Scratch**.

Educação matemática crítica

A formação de cidadãos críticos no âmbito escolar está atrelada ao desenvolvimento, nos estudantes, da capacidade de analisar situações reais de forma reflexiva. Skovsmose (2004) destaca que um dos pontos-chave da educação crítica consiste no fato de o processo educacional estar relacionado com problemas existentes fora do universo educacional. E, nesse sentido, destaca que dois dos critérios fundamentais para a seleção de um problema são os seguintes:

> O subjetivo: o problema deve ser concebido como relevante na perspectiva dos estudantes, deve ser possível enquadrar e definir o problema em termos próximos das experiências e do quadro teórico dos estudantes. E o objetivo: o problema deve ter uma relação próxima com problemas sociais objetivamente existentes (SKOVSMOSE, 2004, p. 19-20).

A Matemática supõe a submissão da realidade a modelos matemáticos preestabelecidos, que dão suporte a decisões e moldam o cotidiano. Em muitos casos, a Matemática escolar apresenta os cálculos matemáticos como verdades absolutas. Ao se deparar com problemas que, além de conteúdos matemáticos, requerem uma reflexão crítica, os estudantes têm a possibilidade de perceber seu papel de cidadãos atuantes na sociedade.

Para Skovsmose (2007, p. 19), "[...] a educação não pode apenas representar uma adaptação às prioridades políticas e econômicas (quaisquer que sejam); a educação deve engajar-se no processo político, incluindo uma preocupação com a democracia".

Para esse autor, "democracia" se refere ao "modo de vida", à maneira de negociar e fazer mudanças, às formas de ação em grupo e em comunidades. Se os estudantes são capazes de analisar de forma reflexiva a Matemática que existe nos modelos prontos apresentados na sociedade, serão capazes de exercer sua cidadania.

A educação matemática crítica é um campo de investigação da educação matemática que lhe confere o objetivo de promover a participação crítica dos estudantes na sociedade em que estão inseridos, discutindo questões políticas, ambientais, econômicas, sociais, entre outras, nas quais a Matemática se faz presente.

Nesta Coleção, são diversos os momentos em que a concepção de educação matemática crítica pode ser identificada. Por exemplo, ao se explorar normas técnicas para a construção de rampas de acesso em prédios públicos, visando a uma análise crítica e reflexiva sobre a acessibilidade para pessoas com deficiência física ou mobilidade reduzida.

5. Os estudantes no Ensino Médio

As transformações que vêm ocorrendo na sociedade contemporânea também têm causado impacto nos estudantes do Ensino Médio, resultando em mudanças tanto no campo das relações sociais como no mundo do trabalho, sendo ambos caracterizados, na atualidade, pela sua fluidez e pelo seu dinamismo. Essa situação coloca novos desafios para os docentes, em geral, e para o ensino da Matemática, em particular.

Dimensões física, social, emocional e cultural dos estudantes

No cenário atual, é importante que o professor considere, de maneira intencional e explícita, não só o desenvolvimento intelectual, mas também as **dimensões física**, **social**, **emocional e cultural dos estudantes**. Assim, para além do trabalho com os conteúdos e com as competências e habilidades próprias das diversas áreas do conhecimento, é necessário criar espaços para que os estudantes do Ensino Médio conheçam seu corpo, seus sentimentos e suas emoções, lidando com as relações interpessoais de forma a ser respeitado, respeitando também os demais. Considerando a Matemática como uma área frequentemente associada a um baixo rendimento acadêmico, à ansiedade e ao desenvolvimento de emoções negativas, o professor precisa assumir a convicção de que todos seus estudantes podem aprender e alcançar seus objetivos em relação a essa área, independentemente de suas características pessoais, seus percursos ou suas histórias (BRASIL, 2018a). Transformar a maneira com a qual os estudantes se vinculam com a Matemática é possível quando o professor orienta seu trabalho no sentido de despertar o espírito investigativo e a curiosidade dos estudantes, incentivando o levantamento de hipóteses, procurando conhecer suas explicações dos fenômenos cotidianos e propiciando o confronto de ideias para poder construir de forma gradativa os conceitos e procedimentos matemáticos.

Reflexos da violência no âmbito escolar e local

Em uma sociedade caracterizada, entre outras coisas, pelo confronto entre diversos grupos culturais e sociais, o trabalho do professor no Ensino Médio requer a promoção de uma cultura de paz, tanto dentro da escola como na esfera social mais ampla. Para isso, o professor deverá promover o diálogo e a solução não violenta de conflitos, permitindo que os estudantes manifestem opiniões divergentes, mas de maneira respeitosa. Visto que o desempenho em Matemática é considerado socialmente como um importante indicador das capacidades dos estudantes, será particularmente importante propor atividades orientadas à promoção da saúde mental deles, sobretudo no que tange ao combate da violência autoprovocada e a intimidação sistemática (*bullying* e *cyberbullying*), combatendo estereótipos e discriminações de qualquer natureza. Em escala mais ampla, faz-se necessário ao professor estimular o bom convívio entre os estudantes, promovendo o diálogo entre eles, que muitas vezes carregam consigo elementos culturais distintos em sua formação social, sempre considerando como parâmetro os direitos humanos e os princípios democráticos (BRASIL, 2018a).

Culturas juvenis

Os professores do Ensino Médio são desafiados, também, a compreender a juventude não como um período de passagem da infância para a maturidade, mas como uma etapa singular e dinâmica. Participantes ativos da sociedade, os jovens são, também, produtores de múltiplas **culturas juvenis** (DAYRELL, 2007). Acolher tais culturas na escola requer o desenvolvimento de um trabalho de forma transversal que, de maneira intencional, promova o respeito à diversidade, potencialize os interesses de cada estudante e considere as novas formas de aprendizagem originadas pelo desenvolvimento tecnológico. Particularmente, é necessário considerar que os jovens, mais do que meros consumidores, têm se tornado protagonistas da **cultura digital** (BRASIL, 2018a). Torna-se essencial, então, que o professor ofereça oportunidades para que os estudantes compreendam os impactos da revolução digital em nossa sociedade. Nesse ponto, a Matemática tem muito a contribuir. Algumas tarefas que o professor pode desenvolver para atingir esses objetivos são propor a análise crítica de informações quantitativas apresentadas em diferentes mídias; fomentar o uso das tecnologias digitais para representar matematicamente fenômenos e processos, assim como favorecer a utilização dessas tecnologias para construir simulações e/ou modelos matemáticos que permitam encontrar soluções para problemas reais. Nesta Coleção, além das situações que permeiam toda a obra, são propostas seções específicas que buscam estimular o trabalho com elementos da cultura digital. Na seção **Você conectado**, são apresentados exemplos que exploram conceitos matemáticos utilizando o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra** ou a planilha eletrônica **LibreOffice Calc**; em seguida, são propostas atividades para que os estudantes ponham em prática os conhecimentos adquiridos. O boxe **Conexões** sugere aos estudantes *sites*, vídeos etc. que possibilitam articular o tema em estudo a algum elemento externo ao livro.

Projeto de vida e mundo do trabalho

O Ensino Médio se orienta, ademais, a oferecer ferramentas para que os estudantes possam definir seu **projeto de vida**, ou seja, possam definir aquilo que almejam para sua trajetória profissional e para seu estilo de vida, considerando tanto sua identidade como as demandas sociais e culturais do contexto no qual estão inseridos. É particularmente importante que, no Ensino Médio, os estudantes possam desenvolver competências que lhes permitam se inserir de maneira crítica, criativa e responsável em um mundo do trabalho complexo, imprevisível e dinâmico. É primordial preparar os estudantes para ocupar "profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos" (BRASIL, 2018a, p. 473). Para isso, a área de Matemática e suas Tecnologias tem um papel central nesses processos. Nessa direção, o professor deverá propor atividades que visibilizem as bases científicas e tecnológicas próprias dos processos produtivos e nas quais os estudantes mobilizem recursos e ferramentas matemáticas para resolver problemas complexos que exijam reflexão e abstração e, simultaneamente, desenvolvam uma visão integrada da Matemática e da sua aplicação à realidade.

6. O papel do professor de Matemática

Na sala de aula, o professor é o agente condutor das situações instrucionais e interacionais. Confirmando o que foi apresentado nos **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (BRASIL, 1997), com o avanço das tecnologias de informação, à medida que o papel dos estudantes foi se redefinindo diante do saber, o papel do professor que ensina Matemática foi se redimensionando. Os estudantes são protagonistas da construção de sua aprendizagem, e o professor é o organizador, o facilitador, o incentivador, o mediador entre o saber matemático e os estudantes. Utilizando diferentes práticas, o professor em sala de aula articula o conhecimento matemático com a formação da cidadania, promovendo assim não só a formação integral dos estudantes, mas também importantes mudanças sociais.

O professor mediador não oferece respostas prontas; ele dialoga. Não há como imaginar uma situação instrucional que não seja baseada no diálogo. O professor questiona, é questionado, dá voz aos estudantes, valoriza, respeita e promove a autonomia deles.

O professor do século XXI tem consciência de que aprende no ato de ensinar, considerando, portanto, a sala de aula como um local de aprendizagens mútuas.

Em relação ao Livro Didático, procuramos dar autonomia e respeitar a atuação do professor, orientando-o a reconhecer os momentos nos quais deve desafiar, indagar e conduzir os estudantes à reflexão e à problematização de situações que vão além das apresentadas nesta Coleção. Cabe destacar também a importância do trabalho participativo entre o professor da área de Matemática e suas Tecnologias e os professores de outras áreas, buscando o planejamento e a realização de aulas e projetos multidisciplinares.

Saberes docentes para o ensino de Matemática

Um professor de Matemática que atua no Ensino Médio, além de conhecer as diferentes abordagens metodológicas, precisa ter os saberes necessários para construir novas práticas pedagógicas que permitam identificar avanços, dificuldades e possibilidades para a ampliação das aprendizagens de seus estudantes.

E ainda, o professor deve ser "capaz de articular os diferentes saberes escolares à prática social ao desenvolvimento de competências para o mundo do trabalho" (BRASIL, 2013, p. 171). Isso pode ser feito ao propor situações-problema que envolvam diversos contextos do cotidiano do estudante, considerando seus diferentes perfis e procurando relacioná-las a outras áreas do conhecimento, bem como a conhecimentos da própria Matemática, por meio de atividades, trabalhos em grupos, utilização de tecnologias, textos científicos divulgados pela mídia etc. Dessa maneira, o professor contribui para o desenvolvimento da capacidade do estudante de realizar análises críticas, criativas e propositivas.

A maneira como o professor compreende a Matemática irá influenciar o modo como trata tais articulações. Nesse sentido, saberes de conteúdo matemático e saberes pedagógicos estão inter-relacionados.

O saber profissional do professor é um saber pluridimensional, uma vez que o professor é aquele que planeja, executa, avalia, ou seja, é aquele que, na sala de aula, é responsável pela gestão de um pequeno universo.

Laboratório de Ensino de Matemática (LEM): um ambiente educacional

A expressão **ambiente educacional** é usada de modo geral para designar o contexto em que ocorrem o ensino e a aprendizagem. Neste texto, ao nos referirmos ao ambiente educacional, estamos considerando a perspectiva de Troncon (2014, p. 265), que define esse ambiente como o

> [...] conjunto de elementos, de ordem material ou afetiva, que circunda o educando, que nele deve necessariamente se inserir e que o inclui, quando vivencia os processos de ensino e aprendizado, e que exerce influência definida sobre a qualidade do ensino e a eficácia do aprendizado. Destaque-se que um aspecto particular deste conceito é a inclusão do educando como elemento que participa do ambiente, o que tem a implicação de lhe atribuir responsabilidades na manutenção e no aperfeiçoamento do ambiente que integra.

Esse autor ainda destaca que o ambiente educacional tem impacto na construção do conhecimento dos estudantes, o que, consequentemente, denota a importância e a atenção que deve receber, com o propósito de aprimorá-lo e de aperfeiçoar o processo educacional.

Um ambiente educacional é composto basicamente de dois elementos: um de natureza material (mobiliário, iluminação, espaço físico etc.) e outro de caráter afetivo (respeito, segurança, entre outros). É necessário enfatizar que parte importante dos componentes do ambiente educacional é aquela relativa ao ambiente físico em que se dá o aprendizado, ou seja, as condições materiais que cercam o ensino e a aprendizagem.

Um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser considerado um ambiente educacional que consiste em um espaço munido de material para que professor e estudantes desenvolvam seus trabalhos de ensinar e aprender Matemática. O LEM pode potencializar o trabalho desenvolvido em sala de aula, evitando que o professor precise deslocar grande quantidade de material de um local para outro.

Esse espaço pode ser uma sala, um armário ou outro local dentro da escola, destinado a armazenar o material construído pelos próprios estudantes em conjunto com o professor, material industrializado, livros e revistas relacionadas a temas matemáticos, livros didáticos e paradidáticos, jogos, peças que representam sólidos geométricos, instrumentos de medida, calculadoras, computadores, lousa digital, televisor, pôsteres, cartolinas, papéis sulfite, tesouras, entre outros. Segundo Lorenzato (2006, p. 7),

> [...] o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

Um laboratório com essas características pode ser estruturado por meio do trabalho conjunto entre professores das diferentes áreas e turmas, diretor e outros responsáveis da escola, além da colaboração dos estudantes. Por exemplo, nesta Coleção, durante o estudo de função afim, é proposta a realização de um experimento que envolve o deslocamento de uma bolha de ar para simular um movimento retilíneo uniforme. Para realizar esse experimento são necessários alguns materiais que os estudantes podem confeccionar ou obter em um laboratório de química ou de outras áreas em um trabalho conjunto com o professor de Matemática.

Durante as atividades ou experimentos realizados em laboratórios, é importante que a segurança e a integridade dos estudantes e de outras pessoas presentes sejam garantidas.

Outros ambientes para o ensino de Matemática

A sala de aula é um espaço físico considerado um ambiente convencional de ensino e de aprendizagem. Todavia, não é o único espaço em que a construção do conhecimento pode ocorrer.

De acordo com D'Ambrosio (2005, p. 22), o

> [...] cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura.

Nesse sentido, os espaços extraescolares, considerados ambientes não convencionais de ensino, podem promover a construção de conhecimentos e os desenvolvimentos cognitivo e comportamental. Por exemplo, ao propor um trabalho de investigação envolvendo prédios públicos, que tenham rampas de acesso, do município em que os estudantes moram, conhecimentos matemáticos podem ser construídos ou evidenciados na medição das dimensões da rampa, na análise e na comparação com o padrão de inclinação estabelecido pela legislação, entre outros aspectos. Além de promover a aprendizagem de conteúdos matemáticos, pode-se desenvolver a formação de um cidadão crítico e engajado ao elaborar um relatório com informações sobre os prédios analisados e sugerir ações que possam contribuir para a melhoria da acessibilidade nesses prédios.

Museus, parques recreativos, jardins botânicos, zoológicos, unidades de conservação, feiras, exposições e planetários são exemplos de espaços não convencionais que também podem ser utilizados para o desenvolvimento de atividades de educação formal. Nas **Orientações específicas para este Volume**, são apresentadas sugestões de ambientes como esses, onde os estudantes podem realizar visitas relacionadas aos conteúdos matemáticos ou temas abordados em diferentes momentos durante o trabalho com esta Coleção.

Para Xavier e Fernandes (2011, p. 226),

> [...] no espaço não convencional da aula, a relação de ensino e aprendizagem não precisa necessariamente ser entre professor e aluno(s), mas entre sujeitos que interagem. Assim, a interatividade pode ser também entre sujeito e objetos concretos ou abstratos, com os quais ele lida em seu cotidiano, resultando dessa relação o conhecimento.

Podemos considerar que os afazeres do cotidiano envolvem ideias matemáticas, e essas ideias podem não ser apreendidas na escola, mas no ambiente familiar e recebidas de amigos, colegas e familiares.

De forma geral, a utilização de ambientes não convencionais para o ensino e a aprendizagem é uma prática pouco explorada na educação formal. O professor interessado em utilizar um espaço não convencional deve fazer um planejamento para evidenciar a compreensão das funções, do funcionamento e das potencialidades desse espaço para a educação formal. Além disso, precisa considerar as limitações do espaço escolhido e solicitar à escola e aos pais ou responsáveis uma autorização em caso de necessidade de saída dos estudantes do ambiente escolar.

Algumas escolas mantêm projetos dentro da própria instituição, em espaços como laboratórios, ateliês, auditórios, bibliotecas, salas de vídeos, oficinas, hortas, jardins, entre outras dependências usadas para o desenvolvimento das aulas. Essa iniciativa promove uma ampliação do contexto escolar que ultrapassa as paredes da sala de aula e, em alguns casos, extrapola os limites da escola. Na Coleção, existem alguns momentos em que é possível articular conceitos de empreendedorismo com os estudantes, explorando, assim, o contexto do mercado de trabalho.

Existe uma variedade de espaços não convencionais em diferentes contextos, que exibem alguma relação direta ou indireta com os conteúdos das áreas do conhecimento e, em especial, com conteúdos matemáticos.

Aprendizagem matemática

A Matemática no contexto escolar é, muitas vezes, temida e considerada pouco importante para grande parte de estudantes que não vê qualquer relação entre o que aprende na sala de aula e o que encontra no mundo fora dos muros da escola.

Quando a abordagem é feita exclusivamente de maneira expositiva, a Matemática escolar tende a afastar os estudantes e precisa ser “reinventada” para propiciar um ensino e uma aprendizagem significativa, criativa, prática e contextualizada de acordo com a realidade social e cultural do estudante.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), para a ocorrência de aprendizagem significativa, por exemplo, além de considerar os conhecimentos prévios dos estudantes, é necessária a existência de uma predisposição positiva deles para aprender e materiais de ensino potencialmente significativos. Ao distinguir a aprendizagem significativa de outras aprendizagens, esses autores afirmam que

> [...] a aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder. A aprendizagem automática, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto, ou aprendizagem de séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa, e também (independente do potencial significativo contido na tarefa) se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal (por exemplo, como uma série arbitrária de palavras). (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 23.)

A disposição dos estudantes para aprender não depende somente de sua estrutura cognitiva, mas também de motivação e materiais disponíveis no ambiente educacional. Os recursos materiais correspondem ao espaço físico que circunda os estudantes e aos materiais dos quais fazem uso durante a realização das atividades. Os recursos de caráter afetivo dizem respeito às relações estabelecidas entre os estudantes e entre estudante e professor.

Situações que envolvem o cotidiano dos estudantes tendem a motivá-los para o estudo dos conteúdos matemáticos e podem constituir elementos motivacionais em sua predisposição para aprender. Ambientes educacionais diferenciados, como o LEM, também podem estimular a motivação, mas sua ausência não pode limitar o trabalho do professor e tampouco inviabilizar o processo de aprendizagem.

Ainda que a aprendizagem não seja um ato que se possa compartilhar, pois é algo individual, o trabalho em grupo favorece as interações e a negociação dos significados atribuídos aos objetos matemáticos durante a atividade.

O uso de computadores, telefones celulares e *tablets* com fins pedagógicos, nesse nível de escolaridade, pode ser uma ação social de caráter motivacional que promove a interação entre os pares e estimula a elaboração de estratégias e de formas de representação por meio de expressões textual, gráfica e oral.

As atividades matemáticas que trabalham com construções preestabelecidas podem ser consideradas situações que privilegiam a resolução de problemas.

As habilidades e competências cognitivas e sociais desenvolvidas com esse tipo de atividade passam a fazer parte da estrutura mental dos estudantes, que podem ser generalizadas em outras situações.

O ensino de Matemática precisa despertar nos estudantes o prazer de aprender Matemática, e os conceitos matemáticos devem ser compreendidos como elementos que contribuirão para sua vida social. Tais conceitos, em algumas situações, podem ser desenvolvidos por meio de atividades que envolvam contextos relacionados ao cotidiano dos estudantes, que sejam desafiadoras, que favoreçam o raciocínio, a reflexão e o pensamento lógico.

Esta Coleção busca valorizar os conhecimentos prévios dos estudantes, o trabalho tanto individual quanto em grupo, a relação com outras áreas do conhecimento, o uso de diferentes tecnologias ou recursos digitais e aplicativos, diversos contextos da possível realidade dos estudantes, entre outros recursos que ajudarão o professor em sala de aula.

Leitura e argumentação nas aulas de Matemática

Considerada como uma prática social, a comunicação não se limita ao uso da fala. Ela envolve, também, a produção da escrita, a utilização de símbolos e de expressões pictóricas e corporais, assim como os processos de interpretação dessas diferentes linguagens. A comunicação é, então, essencial para os processos de interação social e de desenvolvimento humano. Dessa maneira, o aperfeiçoamento das competências leitoras e argumentativas dos estudantes é um objetivo que transpassa o Ensino Médio, não sendo priorizado somente na área de Linguagens e suas Tecnologias, mas também nas outras áreas do conhecimento. Particularmente, o professor de Matemática pode contribuir, de maneira decisiva, na aprendizagem de estratégias de leitura de textos matemáticos ou que contenham dados ou argumentos de natureza matemática.

Nas últimas décadas, as práticas que requerem a mobilização de competências leitoras têm se multiplicado e se diversificado. Muitas delas exigem do leitor a mobilização de conhecimentos matemáticos para interpretar, por exemplo, informações estatísticas veiculadas nas mídias e na publicidade. Assim, visando à formação de cidadãos críticos, é importante que os professores ofereçam oportunidades para que os estudantes do Ensino Médio possam interpretar, interagir e argumentar sobre esses textos nos suportes em que aparecem e nas situações reais.

Por sua vez, os textos matemáticos também possuem suas características específicas, sendo necessário que o professor atue como mediador nos processos de interação dos estudantes com esses textos (OLIVEIRA; PIRES, 2010). Visando aprimorar a compreensão e interpretação dos textos matemáticos, incluindo enunciados de situações-problema, o professor deve fornecer aos estudantes dados relevantes e condições que, assim como em outras situações similares, possam ser utilizadas em sua resolução.

A apropriação da linguagem simbólica própria da Matemática tem-se mostrado uma tarefa complexa, com muitos dos obstáculos vinculados à interpretação e à utilização da linguagem algébrica. Nessa direção, o trabalho envolvendo a leitura de textos e a produção de argumentos matemáticos utilizando diversas linguagens – algébrica, discursiva, gráfica, pictórica etc. – tem sido uma estratégia frutífera. O professor pode propor múltiplas tarefas com essa orientação ao solicitar, por exemplo, a leitura e a interpretação de textos que combinam a linguagem discursiva com a gráfica, a produção de argumentos matemáticos utilizando diversos tipos de linguagens, a tradução de informações expressas em linguagem algébrica para a linguagem discursiva, a escrita de textos discursivos que apresentem o desenvolvimento de um problema e sua solução, a leitura e a escrita de relatórios que sintetizem dados expressos em tabelas e gráficos estatísticos, a elaboração de enunciados de problemas a partir de uma expressão algébrica, entre outros. A utilização dos diversos tipos de registros próprios da Matemática contribuirá para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e para o aprimoramento da comunicação na sala de aula.

Estratégias de cálculo e o uso da calculadora

Nas aulas de Matemática, é importante propor situações que possibilitem aos estudantes utilizarem diferentes estratégias de cálculo, ampliando seu repertório. Essas estratégias podem envolver cálculos por escrito, cálculo mental, uso de calculadora científica ou computador, entre outras. Nesse nível de escolaridade, é importante que os estudantes escolham as próprias estratégias, julgando a mais adequada para resolver determinados problemas.

Realizar um cálculo por escrito auxilia os estudantes a registrar e organizar os resultados no papel.

Ao realizar um cálculo mental, são mobilizadas estratégias que visam rapidez e eficiência na obtenção de uma resposta e é possível trabalhar de maneira simultânea a memória e a concentração. Segundo Buys (2001), o cálculo mental permite aos estudantes calcular livremente, sem restrições, desenvolvendo novas estratégias de cálculo ou o uso de números de referência e estratégias que já possuem. Para esse autor, há três características presentes no cálculo mental: operar com números e não com dígitos; usar propriedades elementares das operações e relações numéricas; e permitir o recurso a registros auxiliares em papel.

As calculadoras científicas devem ser um dos instrumentos tecnológicos presentes nas aulas de Matemática e disponíveis aos estudantes, pois seu uso de maneira reflexiva pode contribuir para o aprendizado, auxiliando os estudantes a investigar e a identificar regularidades e propriedades, generalizar, conferir cálculos por escrito, realizar cálculos mais complexos, tomar decisões etc.

Nesta Coleção, são propostas situações que podem estimular os estudantes a realizar cálculos mentalmente na busca por estimativas, a recorrer à calculadora para identificar padrões ou conferir resultados de cálculos. Nos cálculos envolvendo logaritmos, por exemplo, o cálculo por escrito pode ajudar na aplicação da definição ou de propriedades operatórias de logaritmos; já o cálculo mental pode ser realizado para reduzir algumas etapas do cálculo por escrito; por fim, a calculadora científica pode ser utilizada para conferir os resultados e auxiliar na análise e na verificação da solução do problema, quando necessário.

Relações com outras áreas do conhecimento e seus componentes curriculares

A Matemática escolar é desafiadora, tanto para os estudantes quanto para os professores. Observando os contextos social e tecnológico, pode-se identificar o descompasso que há entre esses contextos e o sistema educacional.

Junto das críticas ao modelo escolar, que é desconfigurado e engessado, temos, por um lado, a Matemática como uma área compartimentalizada, enquanto, do outro lado, temos uma sociedade *high tech* que a desafia e exige inovações.

Assim, buscando atender às necessidades e expectativas dos jovens do Ensino Médio, a BNCC define e organiza as aprendizagens essenciais por áreas do conhecimento e incentiva a integração entre tais áreas.

Estabelecer relações entre conceitos e ideias próprias da Matemática e de outras áreas do conhecimento, com o propósito de superar a fragmentação dos saberes, possibilita abordar uma situação-problema sob diferentes perspectivas.

Durante as aulas de Matemática, algumas situações podem ser aproveitadas para o professor estabelecer relações com outras áreas do conhecimento. Uma pergunta feita por um estudante durante o desenvolvimento de um conteúdo matemático, por exemplo, pode ter potencial para desencadear abordagens de conteúdos de outras áreas.

Para Tomaz e David (2008), os professores dos diversos componentes curriculares podem conversar para levantar aspectos comuns de sua prática e compará-los com os de outro professor que trabalha com os mesmos estudantes, a fim de encontrar alternativas para potencializar as oportunidades de interdisciplinaridade em sala de aula, tornando essa prática mais usual.

Nesta Coleção, procurou-se estabelecer relações entre a Matemática e suas Tecnologias a outras áreas do conhecimento, com destaque para a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, no decorrer das propostas de atividades ou de desenvolvimentos conceituais. Cabe destacar a seção **Integrando**, em que conceitos matemáticos e de outras áreas do conhecimento se articulam para possibilitar a investigação de situações oriundas do cotidiano ou do campo científico. Por exemplo, ao estudar Geometria espacial de posição envolvendo o Sistema Braille, é possível estabelecer relações com a área de Linguagens e suas Tecnologias ao tratar de uma linguagem não verbal que também possibilita a comunicação, nesse caso, de um sistema de escrita e leitura tátil. Outro exemplo, ao estudar a função exponencial no contexto da datação de fósseis, é estabelecer relações com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ao discutir o decaimento radioativo e a dinâmica populacional, respectivamente.

Trabalho com projetos

No âmbito escolar, podemos entender um projeto como uma atividade desenvolvida por um grupo de pessoas da comunidade escolar. Tal atividade, orientada de acordo com um objetivo comum e que estabelece relações com ações mobilizadas para a formação do cidadão, demanda certo tempo para ser concluída. Para isso, é importante que a comunidade envolvida no desenvolvimento do projeto se organize de maneira a planejá-lo, considerando seu início e sua conclusão. Nesse sentido, o desenvolvimento de um projeto pode ter as seguintes etapas: organização, planejamento, execução e finalização.

Como uma atividade desenvolvida no âmbito educacional, o projeto também precisa ser avaliado. Para isso, orienta-se que a avaliação seja realizada durante seu desenvolvimento, analisando se cada etapa está de acordo com os objetivos propostos e como cada participante tem colaborado com a atividade proposta.

Ao desenvolver um projeto, é possível estabelecer diálogos entre as pessoas, promovendo a troca de ideias. Isso viabiliza articulações entre conhecimentos de diferentes áreas, possibilitando a estudantes de diferentes perfis realizar um processo investigativo para observar e analisar o mundo à volta, assumindo, assim, a postura de cidadãos críticos e atuantes.

Os professores de diferentes áreas do conhecimento precisam interagir, de modo que sua atuação conjunta seja capaz de conduzir os interesses dos participantes do projeto, bem como articular os conteúdos a serem abordados, possibilitando a construção do conhecimento e do desenvolvimento da atitude crítica dos estudantes.

Nesta Coleção, por exemplo, após o estudo de estatística envolvendo uma pesquisa sobre saneamento básico, com dados secundários relacionados a mortes por doenças diarreicas e à falta de acesso à rede de água tratada em determinada região, é possível propor a elaboração de um projeto com a turma, considerando o município ou o estado em que moram, a fim de ampliar a abordagem apresentada sobre o tema. Além disso, nas **Orientações específicas para este Volume**, são indicados momentos propícios para o desenvolvimento de uma proposta de projeto.

7. Orientações para avaliação

Avaliar é uma ação que consiste em atribuir valor a algo. É proveniente do latim, *valere*, e pode ocorrer de maneira formal ou informal nas salas de aula. A avaliação, no contexto escolar, refere-se à atribuição de um valor para o rendimento escolar.

Ao se referir ao processo de aprendizagem, não se pode reduzir a avaliação a um momento único no qual esse “valor” é atribuído. Ele deve ser tratado como um processo realizado de forma contínua e prolongada. Segundo pesquisadores como Hadji (1994), o objetivo da avaliação escolar é o de contribuir para a aprendizagem, tanto dos estudantes quanto do professor. Com esse objetivo, a avaliação oferece ao professor informações sobre os possíveis conhecimentos prévios e o processo de aprendizagem dos estudantes, bem como de sua conduta de ensino em sala de aula. Aos estudantes, a avaliação possibilita uma análise sobre sua própria aprendizagem por permitir coletar informações sobre o percurso, os êxitos e as dificuldades apresentadas.

No início de cada Unidade desta Coleção são propostas duas páginas de abertura que tratam de um tema relacionado ao conteúdo a ser estudado em seguida e, a partir desse tema, são apresentadas questões que buscam identificar a compreensão do estudante sobre o tema e indícios de conhecimentos prévios acerca dos conteúdos a serem estudados na Unidade. E ainda, nas **Orientações específicas para este Volume**, serão apresentados os conceitos relacionados àqueles que serão tratados em cada Unidade e com os quais os estudantes possivelmente já trabalharam em anos anteriores. Esses elementos visam contribuir para a organização do trabalho do professor, de maneira que ele possa prever abordagens complementares, caso sejam necessárias.

Assim como essas propostas de avaliação formativa, também é importante considerar a preparação dos estudantes para exames em larga escala. Nesta Coleção, além das atividades propostas, ao final de cada Volume é apresentada a seção **+ Atividades**, contendo questões selecionadas que envolvem os conteúdos estudados nas Unidades que compõem o Volume.

Tradicionalmente, a avaliação escolar se dá a partir da utilização de um ou mais instrumentos, entre os quais se destacam as provas escritas, que são aplicadas geralmente ao final de um período escolar. Nessa perspectiva, uma das principais funções da avaliação é certificar, por meio de notas ou conceitos, o que supostamente permite verificar se o estudante domina as competências e capacidades que faziam parte do objeto de ensino (HADJI, 1994). Há, nessa perspectiva, uma supervalorização de aspectos quantitativos no processo avaliativo.

Além da função de certificar, cabe à avaliação regular a aprendizagem, de modo a contribuir com esse processo. Para Hadji (1994), uma avaliação cujos resultados possam ser utilizados pelo professor e pelos estudantes para a tomada de decisão deve ter em vista que a aprendizagem dos estudantes é considerada formativa e é realizada com o propósito de diagnosticar possíveis falhas nos processos de ensino e de aprendizagem. Nessa perspectiva, no processo avaliativo, há maior valorização de aspectos qualitativos do que quantitativos.

Concordamos com D'Ambrosio (2005, p. 78) quando o autor afirma que a

> [...] avaliação deve ser uma orientação para o professor na condução de sua prática docente e jamais um instrumento para reprovar ou reter alunos na construção de seus esquemas de conhecimento teórico e prático. Selecionar, classificar, filtrar, reprovar e aprovar indivíduos para isto ou aquilo não são missão de educador. Outros setores da sociedade devem se encarregar disso.

A avaliação em sala de aula em geral deve ser condizente com a forma como as aulas ocorrem. Se a dinâmica da aula privilegia a repetição de exercícios, a execução de algoritmos, e esse é o processo de ensino que precisa ser aprimorado, naturalmente a avaliação, mesmo quando realizada na perspectiva da avaliação formativa, busca verificar os erros dos estudantes na tentativa de eliminá-los. Nesse sentido, ao verificar um erro, em geral pede-se aos estudantes que realizem a atividade novamente, e novamente... e novamente, até realizarem-na de maneira considerada correta. Desse modo, os erros são carregados de aspectos negativos e podem levar os estudantes a sentirem que serão punidos ao cometê-los. Por outro lado, se a dinâmica da aula privilegia a investigação, a ação dos estudantes perante tarefas que devem ser executadas, a avaliação pode compreender todos os processos que ocorrem durante a aula.

De todo modo, a avaliação pode ser subsidiada por diferentes recursos – os instrumentos de avaliação. Eles devem fornecer ao professor informações – quanto à capacidade dos estudantes para resolver situações-problema, saber utilizar a linguagem matemática, lidar com instrumentos de construção, utilizar-se de raciocínio matemático, comunicar-se por meio oral – para que ele possa, então, inferir aspectos da aprendizagem e do raciocínio matemático.

Estratégias de avaliação

Concordamos com a conceitualização de Sacristán (1998, p. 298), que afirma que a avaliação pode ser entendida como:

> [...] qualquer processo por meio do qual alguma ou várias características de um aluno/a, de um grupo de estudantes, de um ambiente educativo, de objetivos educativos, de materiais, professores/as, programas, etc., recebem a atenção de quem avalia, analisam-se e valorizam-se suas características e condições em função de alguns critérios ou pontos de referência para emitir um julgamento que seja relevante para a educação.

Para esse autor, fica evidente que a avaliação, como um de seus propósitos, tem de contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem na escola. Nessa direção, de acordo com Hadji (1994), o papel da avaliação é compreender a situação dos estudantes, de modo a regular os processos de ensino e de aprendizagem. Quando realizada sob esse aspecto, Hadji (1994) considera que esse tipo de avaliação é formativa. O autor atribui, também, outro propósito para a avaliação – o de inventário –, ou seja, de certificar, de atestar a aquisição de determinado conhecimento. Nesse caso, tem-se que a avaliação é somativa. O terceiro propósito apresentado por Hadji (1994) é o prognóstico, em que a avaliação tem por objetivo orientar os estudantes em suas escolhas, informá-los sobre suas aptidões e capacidades. Nesse caso, a avaliação é do tipo diagnóstica.

As estratégias de avaliação propostas por Hadji (1994) e que podem ser desenvolvidas por meio de diferentes instrumentos de avaliação valorizam as produções escritas dos estudantes. Essas produções escritas revelam, além da execução de algoritmos específicos, o nível de compreensão dos conceitos envolvidos na resolução de um problema, pois, quando um estudante deve escrever um texto a respeito de problemas resolvidos por ele, esse texto deve ser o mais claro possível, deve convencer e esclarecer o leitor a respeito dos procedimentos utilizados na resolução, bem como das ideias matemáticas nela contidas.

Ponte *et al.* (1997) afirmam que as produções escritas de estudantes possuem um grande valor formativo, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia e da reflexão desses estudantes em relação à sua própria aprendizagem. Tais produções podem ser elaboradas individualmente ou em grupo, podendo ter diferentes formas. Por exemplo, pode-se solicitar aos estudantes que comentem e expliquem a resolução de um problema ou um texto, bem como descrevam e analisem os resultados de alguma atividade de investigação da qual participaram. Assim, as produções escritas são, além de fator de aprendizagem, elementos importantes para a avaliação.

Trabalhando com o erro

No contexto educacional, no âmbito da avaliação da aprendizagem, o erro deve ser entendido como uma possibilidade de "enxergar" como os estudantes lidam com uma questão ou um conteúdo matemático. Essa possibilidade pode orientar o trabalho do professor em sala de aula, além de servir de base para seu planejamento.

Cabe ao professor parar e analisar os procedimentos que levaram os estudantes a errar. Santos e Buriasco (2008) consideram essa abordagem como "maneiras de lidar". Esses autores defendem que cada estudante apresenta um modo de lidar com o conhecimento matemático. Os diferentes modos

> [...] devem ser tomados como ponto de partida para construir um espaço de negociação e legitimação dos significados atribuídos a tais conhecimentos. Assim, as maneiras de lidar que são diferentes das consideradas corretas apresentam-se a favor da aprendizagem dos alunos, permitindo aos professores oportunidades de leitura do modo como os alunos pensam sobre um determinado conteúdo. A partir dessa leitura, eles podem planejar suas ações para promover a aprendizagem, as atividades e as discussões a serem estabelecidas com os alunos. Consequentemente, os professores podem deixar de "mostrar os caminhos" e passar a indagar sobre os caminhos que os alunos estão construindo, provocando momentos de instabilidade, reflexão e confirmação nos quais aconteçam suas aprendizagens. (SANTOS; BURIASCO, 2008, p. 105.)

Recomenda-se ao professor afastar o paradigma de que o erro consiste em algo negativo, em que a falta é relacionada à ausência de conhecimento. O erro precisa ser trabalhado em sala de aula com o objetivo de ser transposto, de forma que os estudantes avancem na aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Alguns instrumentos de avaliação

Como aprender é um processo diferente para cada pessoa, é necessário adotar práticas avaliativas em que o foco seja ter indícios de ocorrência de aprendizagem por meio das informações obtidas. Nesse sentido, diversos instrumentos de avaliação devem ser implementados nas aulas, em especial, nas aulas de Matemática.

> Em muitos casos, a informação obtida por meio de um instrumento acaba por completar ou esclarecer uma informação que já fora obtida por outro. Entretanto é preciso se ter claro que um instrumento, muitas vezes, prioriza certos aspectos sobre outros. Por isso é importante saber o que cada instrumento é capaz de revelar, que informações é possível recolher com ele e que limitações ele possui. (SANTOS, 2008, p. 18.)

Nesta Coleção, a seção **O que estudei** possibilita tanto ao professor quanto ao estudante identificar a necessidade de retomar algum conteúdo, estabelecendo-se como um instrumento avaliativo.

Na sequência, apresentamos de forma sucinta alguns instrumentos de avaliação que julgamos pertinentes às aulas de Matemática do Ensino Médio: prova escrita e prova escrita em fases, prova-escrita-com-cola, atividades e trabalhos em grupo e autoavaliação. No entanto, o professor pode ser criativo e investir em outros instrumentos que deem suporte para investigar indícios de aprendizagem dos estudantes.

Prova escrita e prova escrita em fases

A prova escrita é um instrumento de avaliação que tem o objetivo de estabelecer uma comunicação que permite ao professor fazer uma análise da competência escritora do estudante.

Na elaboração de uma prova escrita, o professor deve utilizar diferentes situações que promovam o uso de variadas representações e estratégias, além de estabelecer critérios de correção, considerando os "percursos" que os estudantes podem utilizar. Para tanto, é necessário que os procedimentos sejam listados e pontuados, revendo-os sempre que preciso, antes ou durante a correção. A correção deve ser pautada nos procedimentos utilizados pelos estudantes para obter a solução. Um professor atento aos indícios de aprendizagem não deve considerar somente a solução final apresentada.

Combinando as vantagens da prova escrita com outras tarefas, De Lange (1999) propôs a prova escrita em duas fases. De forma geral, esse instrumento segue os mesmos pressupostos da prova escrita usual, diferenciando no modo como os estudantes são solicitados a resolvê-la – em dois momentos, ou duas fases.

Na primeira fase, os estudantes respondem, em um tempo limitado, questões discursivas que abordam conhecimentos que deveriam ter aprendido, sem indicações do professor. A prova é recolhida e corrigida pelo professor, que deve inserir comentários e/ou questionamentos que permitam estabelecer uma comunicação escrita na qual os estudantes possam explicar o que fizeram. Nessa fase, o professor não valida as respostas, isto é, não coloca certo ou errado. Os comentários e questionamentos devem exigir reflexão por parte dos estudantes.

Na segunda fase, os estudantes recebem a prova novamente e a resolvem considerando os comentários e/ou questionamentos inseridos. Eles têm a oportunidade de fazer uma complementação do que não foi feito na primeira fase, reelaborando sua solução ou mesmo resolvendo a questão pela primeira vez. Essa fase é realizada em casa, quando o estudante julgar conveniente e sem tempo limitado para a resolução. Após o período combinado entre as partes, a prova é devolvida ao professor para que ele faça uma nova correção.

Se o professor julgar necessário, podem ser feitas adaptações de acordo com a realidade de sua turma, e outras fases podem ser implementadas. Com isso, prolonga-se o processo de avaliação de forma que o professor analise se o objetivo da aprendizagem foi alcançado.

Prova-escrita-com-cola

Usualmente o ato de colar é visto como um dos problemas escolares que permeiam os mais diversos níveis de ensino, podendo ser entendido como desvio de conduta para tirar proveito ou podendo ser considerado até mesmo um meio de corrupção. Esse ato "está associado à atitude de trazer para o momento da avaliação informações que não correspondem ao conhecimento já construído [...], trata-se de conceber a cola como uma forma de pesquisa ilícita" (ZANON; ALTHAUS, 2008, p. 24).

Diversas situações podem ser consideradas como cola, por exemplo: consultar a prova, trocar de prova ou conversar com um colega no momento da prova, fazer registro em folhas de papel ou até mesmo no próprio corpo, consultar livros, cadernos ou aparelhos eletrônicos, entre outras.

> É inegável que a prova desperta uma forte carga emocional, como ansiedade (capaz de bloquear o desempenho, o pensamento e causar lapso de memória – "o branco"), medo da nota baixa e da reprovação, nervosismo, dúvidas, insegurança, esquecimento etc. Por isso, a cola pode se configurar como um meio de diminuir a ansiedade – se houver esquecimento, ela pode gerar segurança – como uma fuga ao fracasso, uma estratégia de defesa ou uma porta de escape à prova que tem poder de atribuir notas baixas, reprovar e refletir na imagem pessoal. (SOUZA, 2018, p. 19.)

Uma maneira de utilizar um dos tipos de cola como recurso para possibilitar a aprendizagem é por meio do instrumento de avaliação prova-escrita-com--cola, que, de acordo com Forster (2016), foi nomeado dessa maneira justamente para evidenciar a ideia de que é possível trazer a cola "oficialmente" para a prova. Esse mesmo autor informa que uma prova-escrita--com-cola é basicamente

> [...] uma prova escrita na qual o aluno tem a sua disposição um pedaço de papel, a cola, em que ele pode anotar as informações que julgar pertinentes para utilizar durante a realização da prova. Para que os alunos façam a cola, é desejável que seja estabelecido um padrão comum a todos. Por exemplo, é preciso definir as dimensões do papel, se o texto da cola deve ser manuscrito ou não, se deve ser feito individualmente ou não. (FORSTER, 2016, p. 27.)

Esse tipo de instrumento de avaliação se diferencia de uma prova com consulta, principalmente porque os registros devem estar em um papel com dimensões delimitadas e os próprios estudantes devem produzi-los. Segundo Forster (2016), a intenção é que eles utilizem esse instrumento como um meio de estudo, e a limitação do papel pode auxiliar nesse sentido, pois é necessário estudar o assunto para ter condições de recolher as informações mais relevantes para inserir na cola.

> Numa perspectiva subversiva, ela [cola] torna-se um recurso à aprendizagem, um meio de estudo e pesquisa. Demanda estudo prévio, escolhas (porque o espaço é limitado), análise, produção pessoal e reflexão. Torna-se a única fonte permitida de ser consultada no momento da realização da prova e elaborada pelo próprio estudante. Sua permissão evita a exclusiva memorização dos conteúdos. A natureza do instrumento de avaliação altera a essência da cola porque permite ao aluno dialogar por escrito com o professor, personalizando a prova, e com seus colegas fora da sala de aula, possibilitando trocas e aprendizagem. (SOUZA, 2018, p. 111.)

Atividades e trabalhos em grupo

O trabalho em grupo tem como objetivo a troca de ideias entre os estudantes, o que possibilita o desenvolvimento da colaboração, da cooperação, da comunicação e da argumentação.

Cohen e Lotan (2017, p. 1) definem trabalho em grupo como "[...] alunos trabalhando juntos em grupos pequenos de modo que todos possam participar de uma atividade com tarefas claramente atribuídas". O professor, além de explicar aos estudantes suas ações como solucionadoras de um problema, deve explicitar aspectos a serem considerados, tais como os objetivos do trabalho e os critérios de avaliação.

O trabalho em grupo não pode ser entendido pelos estudantes como a junção das carteiras e cada um realizando sua atividade individualmente. "Trabalho em grupo não é a mesma coisa que agrupamento por habilidade, no qual o professor divide a sala por critério acadêmico para que possa ensinar para grupos mais homogêneos" (COHEN; LOTAN, 2017, p. 1-2). Pode ocorrer de um grupo ser formado por estudantes com características muito diferentes entre si, sejam elas relacionadas aos conhecimentos que possuem, habilidades, atitudes e valores.

Para estimular a participação dos integrantes dos grupos e avaliar o desempenho de cada um, o professor pode entregar uma única folha com a atividade proposta, solicitar que organizem as ideias em conjunto e as escrevam em uma folha. Durante esse processo, o professor pode circular entre os diferentes grupos de forma a perceber o que está sendo discutido, tendo cuidado para não dar a resposta quando sua ajuda for solicitada. Essa estratégia pode ser utilizada para avaliar os estudantes ao realizarem as atividades em grupo propostas nesta Coleção, ao final das quais são solicitadas a elaboração de relatórios, peças publicitárias (fôlder, cartaz, vídeo ou *podcast*), escritas de textos em uma rede social ou blogue, *slides* etc. Uma maneira de auxiliar na avaliação dos argumentos é pedir aos estudantes que anotem o que considerarem relevante e que foi discutido entre eles.

Autoavaliação

De acordo com Haydt (1995, p. 147), a autoavaliação é "[...] uma forma de apreciação normalmente usada quando nos dedicamos a atividades significativas, decorrentes de um comportamento intencional". Assim, para realizar uma autoavaliação escolar, os estudantes precisam analisar e interpretar seus conhecimentos, o que lhes permite refletir de maneira crítica sobre o que fizeram ou deixaram de fazer na construção desses conhecimentos. A autoavaliação é um instrumento que possibilita aos estudantes analisar e refletir sobre o que estudaram e como fizeram isso.

Essa mesma autora afirma que, ao se autoavaliar, o estudante participa de forma mais ampla e ativa de sua aprendizagem. Isso ocorre "[...] porque ele tem oportunidade de analisar seu processo nos estudos (o quanto rendeu e quanto poderia ter rendido), bem como suas atitudes e comportamentos frente ao professor e aos colegas" (HAYDT, 1995, p. 147-148).

Uma autoavaliação pode ser constituída de perguntas, respondidas de forma oral ou escrita, que possibilitam aos estudantes realizar uma interpretação pessoal sobre o percurso de sua aprendizagem, tendo consciência de suas dificuldades e limitações. Por meio dessa tomada de consciência, eles podem rever seu processo de estudo, além de auxiliarem o professor no planejamento de suas intervenções futuras em sala de aula.

O professor pode realizar a autoavaliação ao longo do ano por meio de questionários ou fichas. Dependendo do objetivo, ela pode ser realizada antes do início do estudo de um conteúdo ou ao final. Quando realizada no início, o que se autoavalia são os conhecimentos prévios dos estudantes. Quando realizada ao final do estudo de um conteúdo, permite aos estudantes que revejam a construção do conhecimento e reflitam sobre possíveis equívocos pelos quais passaram.

Deve-se evitar entregar uma extensa ficha com perguntas que os estudantes necessitam responder, pois a autoavaliação caracteriza-se como um momento de reflexão e não pode se tornar algo exaustivo. De forma geral, devem ser propostas perguntas específicas e objetivas. Em uma ficha de autoavaliação podem ser fornecidas algumas respostas-padrão para os estudantes assinalarem, como "sim", "não" e "às vezes". Entre os diferentes elementos presentes em uma autoavaliação, podem ser privilegiados aspectos procedimentais, de conteúdo, de convivência social, de conduta dos estudantes, entre outros. Nesse sentido, a seção **O que estudei**, organizada ao final de cada Unidade da Coleção, constitui um instrumento de autoavaliação. As questões propostas nessa seção contribuem para que o estudante se avalie em aspectos procedimentais, atitudinais e acerca de conteúdos estudados na Unidade. Considerando a estrutura fixa com a qual essas questões são propostas, uma possibilidade ao professor é organizar, para cada estudante, um arquivo com as respostas dessas questões ao longo do ano letivo, permitindo uma análise do desenvolvimento não apenas relativo a esse estudante, mas também de suas práticas em sala de aula durante esse período.

8. Bibliografia consultada e comentada

Apresentamos aqui as principais referências que nortearam a produção desta Coleção e que podem contribuir com a formação continuada do professor. Por consequência, estas referências podem, também, fomentar o processo de ensino e aprendizagem, ampliando e complementando o que foi proposto na obra. Contudo, cabe destacar que diversas outras sugestões são indicadas ao longo destas **Orientações para o professor**.

Livros e artigos

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**: Revista em Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 117-234, 2009.

- Nesse artigo, os autores apresentam uma situação-problema para evidenciar a possibilidade de trabalhar atividades de modelagem matemática em sala de aula sob a perspectiva socioepistemológica.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 18, p. 623-642, 2012.

- Análise de uma atividade de modelagem para investigar relações entre ações cognitivas evidenciadas em atividades desse tipo e os modos de inferência na semiótica peirceana.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

- Essa obra apresenta a definição e as características da modelagem matemática, atividades que foram desenvolvidas na Educação Básica, incluindo discussões e encaminhamentos para a sala de aula, e outros temas a serem trabalhados nessa perspectiva.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. O registro gráfico em atividades de modelagem matemática – um estudo da conversão entre registros segundo a teoria dos registros de representação semiótica. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIEMAT, II. São Paulo, 2009.

- Discussão sobre as conversões ligadas ao registro gráfico realizadas por estudantes de uma turma de licenciatura em atividades de modelagem matemática.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

- Obra em que David Paul Ausubel apresenta sua teoria da aprendizagem significativa.

BERTINI, L. F.; PASSOS, C. L. B. **Uso da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem nas séries iniciais do ensino fundamental**. 2008. Disponível em: www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/135-1-A-gt8_bertini_ta.pdf. Acesso em: 10 jul. 2020.

- Nesse artigo, as autoras distinguem problema de exercício e defendem a realização de investigações matemáticas pelos estudantes para promover sua aprendizagem.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2016.

- Livro que apresenta a modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, apresentando sua definição e exemplos de modelos.

BOAVIDA, A. M.; GOMEZ, A.; MACHADO, S. Argumentação na aula de matemática: olhares sobre um projeto de investigação colaborativa. **Educação em matemática**, Lisboa, n. 70, p. 18-26, 2002.

- Relato da experiência de implementar tarefas com foco na argumentação matemática em sala de aula.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. (Tendências em Educação Matemática).

- Trabalho sobre o uso de informática educativa no ambiente escolar, contendo debates relacionados às políticas governamentais e questões epistemológicas e pedagógicas.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

- Esse livro apresenta propostas de uso de tecnologias nas aulas de Matemática.

BUYS, K. Mental Arithmetic. *In*: HEUVEL-PANHUIZEN, M. van den (ed.). **Children Learn Mathematics**. Rotterdam/Taipei: Sense, 2001. p. 121-146. Developed by the TAL Team. Utrecht: Freudenthal Institute (Fi), Utrecht University and National Institute for Curriculum evelopment (SLO).

- Trabalho que propõe discussão e reflexão sobre estratégias de cálculo mental por crianças e adolescentes.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas [recurso eletrônico]. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

- Nesse livro, as autoras apresentam e defendem a ideia do trabalho em grupo em turmas heterogêneas como uma estratégia potencialmente eficaz de ensino-aprendizagem, além de teorias e orientações para a prática em sala de aula.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005. (Perspectivas em Educação Matemática).

- Discussão geral relacionada à educação matemática, propondo uma reflexão sobre a Matemática, aspectos teóricos e temas ligados à sala de aula e à prática docente.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em Educação Matemática).

- Com essa obra, o autor procura proporcionar uma visão geral da etnomatemática, principalmente aspectos mais teóricos.

DAYRELL, J. A escola "faz" as juventudes? Reflexões em torno da socialização juvenil. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 28, n. 100, p. 1105-1128, 2007.

- Nesse artigo, é possível conhecer mais sobre as culturas juvenis e sua relação com a escola.

DE LANGE, J. **Framework for Classroom Assessment in Mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

- Nessa publicação, o autor apresenta os objetivos da avaliação escolar e lista padrões e princípios para sua realização nas aulas de Matemática.

FORSTER, C. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2016. 123p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

- Estudo sobre a utilização de uma prova-escrita-com-cola como recurso na avaliação que oportuniza a aprendizagem.

GÉRARD, F.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Tradução de Júlia Ferreira e Helena Peralta. Porto: Porto Editora, 1998.

- Esse livro tem como objetivo dar apoio para a concepção e a avaliação de manuais escolares, apresentando, entre outros elementos, quais são suas funções.

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Porto Editora, 1994.

- Proposta de abordagem de avaliação da aprendizagem escolar, incluindo reflexões e análises relacionadas aos tipos de avaliação.

HAYDT, R. C. C. **Avaliação do processo ensino-aprendizagem**. São Paulo: Ática, 1995.

- Nessa obra, a autora discute as funções da avaliação escolar, incluindo a autoavaliação como parte do processo de ensino-aprendizagem.

HOWLAND, J. L.; JONASSEN, D.; MARRA, R. M. **Meaningful Learning with Technology**. 4. ed. Boston: Pearson, 2011.

- Demonstração de como os professores podem utilizar a tecnologia para estimular e auxiliar na aprendizagem significativa dos estudantes.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. (Formação de professores).

- Discussão sobre o papel de Laboratórios de Ensino de Matemática (LEM) no ensino e na aprendizagem de Matemática.

OLIVEIRA, E. C.; PIRES, C. M. C. Uma reflexão acerca das competências leitoras e das concepções e crenças sobre práticas de leitura nas aulas de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 931-953, 2010.

- Artigo sobre as competências leitoras em Matemática.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

- Esse texto apresenta informações gerais sobre resolução de problemas.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

- Esse artigo apresenta os estudos sobre resolução de problemas desenvolvidos até então pelo grupo de pesquisa do qual as autoras participavam.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

- Com essa obra, o autor propõe uma reflexão acerca de aspectos metodológicos do ensino da Matemática, incluindo uma análise do Livro Didático.

PEREIRA, A. B. Manuais escolares: estatutos e funções. **Revista Lusófona de Educação**, Lisboa, n. 15, 2010. Disponível em: www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1645-72502010000100014&lng=pt&tlng=pt. Acesso em: 10 jul. 2020.

- Análise de três obras sobre manuais escolares.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

- Estudo de métodos de resolução de problemas, incluindo uma proposta de etapas para resolver problemas.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

- Análise de como a investigação matemática pode ser desenvolvida em sala de aula a partir de resultados de pesquisas.

PONTE, J. P. da. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. *In*: ________. **Educação matemática**: temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.

- Nesse artigo, o autor busca discutir questões relacionadas às concepções dos professores de Matemática envolvendo suas crenças, seus saberes profissionais e suas práticas.

PONTE, J. P. da. *et al*. **Didáctica da matemática**. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário, 1997.

- Nesse texto, são apresentadas informações sobre didática da Matemática.

PONTE, J. P. da. Gestão curricular em matemática. *In*: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005.

- Esse artigo trata da gestão curricular que o professor realiza considerando seus estudantes e suas condições de trabalho.

PONTE, J. P. da. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa: APM, 2003. CD-ROM.

- Apresentação dos conceitos de investigar, ensinar e aprender e analisar relações entre eles no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

SACRISTÁN, J. G. A avaliação no ensino. *In*: SACRISTÁN, J. G.; GÓMEZ, A. I. P. **Compreender e transformar o ensino**. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

- Capítulo sobre avaliação no ensino, no qual o autor apresenta e discute seu conceito, prática, funções, classificações, entre outros.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso Editora, 2013.

- Reflexão sobre a organização e o desenvolvimento do currículo.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. 166p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

- Pesquisa em que a autora realiza uma análise da interpretação do enunciado, das estratégias e procedimentos, e das relações com o contexto do problema que estudantes do Ensino Médio fazem ao resolvê-lo.

SANTOS, J. R. V. dos; BURIASCO, R. L. C. Da ideia de erro para as maneiras de lidar: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. *In*: BURIASCO, R. L. C. **Avaliação e educação matemática**. Recife: SBEM, 2008. p. 87-108. (Coleção SBEM).

- Análise crítica de alguns trabalhos de pesquisadores sobre análise de "erros" de estudantes em diversos contextos e caracterização dos seus processos de resolução considerando o que eles trazem.

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

- Nessa obra, o autor apresenta um panorama geral sobre a educação na sociedade globalizada, em termos filosóficos e políticos, incluindo o papel da Matemática.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. 2. ed. Campinas: Papirus, 2004. (Perspectivas em Educação Matemática).

- Discussão de aspectos políticos da educação matemática, com foco na questão da democracia.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2014.

- Nesse livro, o autor apresenta conceitos e preocupações que caracterizam uma educação matemática crítica.

SOUZA, J. A. de. **Cola em prova escrita**: de uma conduta discente a uma estratégia docente. 2018. 146p. Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

- Investigação do uso de cola em uma prova escrita em fases como estratégia de ensino e como meio de repensar a prática letiva em aulas de Matemática.

THOMPSON, A. G. Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. *In*: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Nova York: MacMillan, 1992. p. 127-146.

- Capítulo sobre crenças e concepções de professores referentes à Educação Matemática.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

- Nesse livro, são apresentadas algumas perspectivas teóricas e exemplos de situações de sala de aula em que é possível perceber diferentes abordagens interdisciplinares de conteúdos escolares.

TRONCON, L. E. A. Ambiente educacional. **Medicina**, Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 264-271, 2014.

- Artigo sobre ambiente educacional e seus principais componentes, incluindo uma discussão da participação desse tipo de ambiente no aprendizado.

XAVIER, O. S.; FERNANDES, R. C. A. A aula em espaços não convencionais. *In*: VEIGA, I. P. A. **Aula**: gênese, dimensões, princípios e práticas. 2. ed. Campinas: Papirus, 2011. (Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

- Discussão e reflexão sobre a ocorrência de aula em ambientes que transcendem o ambiente físico de uma sala de aula convencional.

ZANON, D. P.; ALTHAUS, M. M. **Instrumentos de avaliação na prática pedagógica universitária**. Ponta Grossa: UEPG-PR, 2008. Semana Pedagógica.

- Texto sobre diferentes instrumentos de avaliação escolar, incluindo suas características e exemplos.

Documentos oficiais

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2016]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 10 jul. 2020.

- Conhecida como Constituição Cidadã, é o atual conjunto de leis fundamentais que organiza o estado brasileiro.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Diário Oficial da União, 1996.

- Legislação que regulamenta o sistema educacional do Brasil no âmbito público ou privado, da Educação Básica até o Ensino Superior.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 jul. 2020.

- Documento que regulamenta as aprendizagens essenciais na Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. **DOU**, Brasília, 21 nov. 2018b.

- Documento que atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1997.

- Conjunto de textos que norteiam a elaboração dos currículos escolares do Ensino Fundamental.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Secretários da Educação. Fórum Nacional dos Conselhos Estaduais de Educação. **Guia de implementação do novo Ensino Médio**. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://novoensinomedio.mec.gov.br/#!/guia. Acesso em: 10 jul. 2020.

- Documento de apoio às redes e aos sistemas de ensino que objetiva contribuir com as mudanças previstas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) para o novo Ensino Médio, promovendo orientações e caminhos possíveis para a sua efetivação nas escolas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica**. Brasília, DF, 2013.

- Normas obrigatórias que definem os princípios, fundamentos e procedimentos na Educação Básica, a fim de orientar o planejamento curricular das escolas brasileiras e dos sistemas de ensino.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano nacional de educação**: PNE. Brasília, DF: INEP, 2014.

- Documento que determina diretrizes, metas e estratégias para a política educacional brasileira de 2014 até 2024. São estabelecidas 20 metas que abrangem todos os níveis de formação.

BRASIL. Ministério da Educação. **Relatório Nacional PISA 2012** – Resultados brasileiros. Brasília, DF: INEP, 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2014/relatorio_nacional_pisa_2012_resultados_brasileiros.pdf. Acesso em: 10 jul. 2020.

- Documento sobre os resultados nacionais do Pisa de 2012.

Instituições e grupos de estudo para a formação continuada do professor

ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO (ANPEd). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.anped.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Entidade que congrega programas de pós-graduação *stricto sensu* em Educação.

ASSOCIAÇÃO NACIONAL DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA (ANPMat). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: http://anpmat.sbm.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Associação de professores de Matemática que atuam na Educação Básica em todo o país.

CENTRO DE ESTUDOS MEMÓRIA E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CEMPEM). Campinas, 2020. Disponível em: www.cempem.fe.unicamp.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Órgão vinculado ao Departamento de Metodologia de Ensino da Faculdade de Educação da Unicamp, voltado para o apoio à docência, à pesquisa e à extensão na área de educação matemática.

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFiCO E TECNOLÓGICO (CNPq). Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.cnpq.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Fundação pública cujas principais atribuições são fomentar as pesquisas científica, tecnológica e de inovação e a formação de pesquisadores.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (Capes). Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.capes.gov.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Instituição que busca a expansão e a consolidação dos cursos de mestrado e doutorado em todo o país.

FENOMENOLOGIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (FEM). São Paulo, 2020. Disponível em: http://fem.sepq.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo de estudos cujo objetivo é pesquisar questões sobre o conhecimento matemático e sobre a fenomenologia.

GRUPO DE ESTUDOS CONTEMPORÂNEOS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (GECEM). Florianópolis, 2020. Disponível em: http://gecem.ufsc.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo multidisciplinar de professores, estudantes e pesquisadores que realizam pesquisas voltadas para a produção de conhecimentos matemáticos, para os processos de ensino e de aprendizagem matemática e para a formação de professores.

GRUPO DE ESTUDOS DE INFORMÁTICA APLICADA À APRENDIZAGEM MATEMÁTICA (GEIAAM). Florianópolis, 2020. Disponível em: http://mtm.ufsc.br/geiaam. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo que estuda e pesquisa sobre inteligência artificial como ferramenta alternativa para modelar conhecimentos e processos didáticos.

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM ETNOMATEMÁTICA (GEPEm). São Paulo, 2020. Disponível em: www2.fe.usp.br/~etnomat. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo de pesquisa organizado em torno do interesse pela diversidade matemática produzida e utilizada em vários contextos socioculturais.

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (GEPETICEM). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.gepeticem.ufrrj.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo de estudos cujo objetivo é desenvolver pesquisas e inovações na Educação Básica e no Ensino Superior por meio da formação inicial e continuada de professores de Matemática e na utilização das tecnologias da informação e comunicação.

GRUPO DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E/OU SUAS RELAÇÕES COM A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (GPHM). Rio Claro, 2020. Disponível em: https://sites.google.com/site/gphmat. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo de pesquisa que participa de forma ativa nos principais movimentos acadêmicos nacionais ligados à área de educação matemática e suas relações com a História da Matemática.

GRUPO DE PESQUISA EM INFORMÁTICA, OUTRAS MÍDIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (GPIMEM). Rio Claro, 2020. Disponível em: http://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo de pesquisa que estuda questões ligadas às tecnologias na educação matemática, bem como as mudanças que trazem a inserção das tecnologias digitais na educação.

GRUPO DE PESQUISA EM PROCESSOS DE FORMAÇÃO E TRABALHO DOCENTE DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (GFP). Rio Claro, 2018. Disponível em: www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Grupo de pesquisa interessado em investigar e estudar as dimensões teórico-metodológicas relacionadas aos processos de formação dos professores de Matemática.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SBEM). Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.sbembrasil.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Sociedade civil, de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos, que busca congregar profissionais da área de educação matemática e de áreas afins.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (SBHMat). 2020. Disponível em: www.sbhmat.org. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Sociedade científica de História da Matemática criada com o objetivo de institucionalizar, tanto em âmbito nacional quanto internacional, a área de História da Matemática como campo de investigação.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.sbm.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Entidade civil, de caráter cultural e sem fins lucrativos, que tem, entre suas finalidades, reunir os matemáticos e professores de Matemática do Brasil e contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (SBMAC). São Carlos, 2020. Disponível em: www.sbmac.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Sociedade cujo principal objetivo é promover o desenvolvimento da Matemática Aplicada e Computacional no Brasil.

Revistas

ACTA SCIENTIAE: Revista de Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, 2020. Disponível em: www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/index. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista de perfil científico que tem por missão divulgar a pesquisa científica na área de ensino com foco no ensino de Ciências e de Matemática.

BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, 2020. Disponível em: www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Periódico que publica artigos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática e/ou ao papel da Matemática e da educação matemática na sociedade.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Brasília, DF, 2020. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS. Porto Alegre, 2020. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS/announcement/view/8. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Publicação semestral cujo objetivo é divulgar pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática e à formação inicial ou continuada de professores.

EMP: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, 2020. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que divulga produções científicas na área de educação matemática em âmbito internacional.

EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. Recife, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista eletrônica de pesquisas científicas em educação matemática e tecnológica e outras áreas afins.

HIPÁTIA: Revista Brasileira de História, Educação e Matemática. Campos do Jordão, 2020. Disponível em: http://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia%20. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que tem como meta divulgar trabalhos em História da Matemática, educação matemática, Matemática (pura e aplicada) e educação.

INVESTIGAÇÕES EM ENSINO DE CIÊNCIAS (Ienci). Porto Alegre, 2020. Disponível em: www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/index. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista internacional voltada exclusivamente para a pesquisa na área de ensino e aprendizagem de Ciências, cujo principal objetivo é a divulgação aberta de trabalhos relevantes nessa área.

MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA. Rio de Janeiro, 2018. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: http://mc.sbm.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que publica anais de reuniões sobre Matemática, bem como artigos de pesquisa e trabalhos selecionados.

NOTICIÁRIO ELETRÔNICO. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.sbm.org.br/noticiario-eletronico. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Publicação eletrônica da SBM que apresenta notícias relacionadas à Matemática e à educação matemática em âmbito nacional e internacional.

PROFESSOR DE MATEMÁTICA *ON-LINE* (PMO). Rio de Janeiro, 2020. Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Veículo para publicação e divulgação de artigos acadêmicos relevantes para a formação inicial e continuada do professor de Matemática da Educação Básica.

REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura. Natal, 2020. Disponível em: www.rematec.net.br/index.php/rematec/index. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Periódico que busca dar visibilidade à produção científica-acadêmica nas áreas de ensino e pesquisa de práticas socioculturais e educação matemática.

REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo, 2020. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Publicação eletrônica trimestral destinada a divulgar trabalhos que abordem, preferencialmente, resultados de pesquisas e experiências didáticas que tenham como foco a sala de aula e visem aprimorar os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos científicos.

REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista científica que visa promover o aprofundamento da investigação sobre temas ligados à epistemologia, à formação de professores e ao ensino e aprendizagem da Matemática.

REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA. Duque de Caxias, 2020. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Periódico destinado à divulgação de artigos na área de ensino das Ciências e Matemática.

REVISTA EUREKA! Rio de Janeiro, 2019. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: www.obm.org.br/revistaeureka. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que divulga artigos relevantes para a preparação dos estudantes que participarão da Olímpiada Brasileira de Matemática (OBM).

REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA. Rio de Janeiro, 2020. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Publicação digital cujo objetivo é o de apresentar a beleza, a vitalidade e os aspectos humanos da Ciência Matemática em linguagem adequada para estudantes e professores de cursos de graduação e pós-graduação em Matemática.

REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Campo Mourão, 2020. Disponível em: www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/index. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que tem o propósito de divulgar pesquisas brasileiras e estrangeiras em educação matemática, bem como contribuir com a formação de professores de Matemática.

RPM: Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: http://rpm.org.br/default.aspx?m_id=1. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que publica artigos da disciplina em nível elementar ou avançado, que sejam próprios ao professor do Ensino Médio e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

ZETETIKÉ: Revista de Educação Matemática. Campinas, 2020. Disponível em: http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike. Acesso em: 17 jul. 2020.

- Revista que busca contribuir para a formação de pesquisadores e o desenvolvimento da pesquisa na área de educação matemática por meio do intercâmbio e da divulgação de pesquisas e estudos realizados.

Sites

BANCO CENTRAL DO BRASIL (BCB). Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.bcb.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Apresenta diversas informações financeiras disponibilizadas pelo Banco Central do Brasil.

BIBLIOTECA NACIONAL (BN). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.bn.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Apresenta informações sobre a BN, bem como sobre a produção bibliográfica nacional.

CENTRO DE PREVISÃO DE TEMPO E ESTUDOS CLIMÁTICOS (CPTEC). Cachoeira Paulista, 2020. Disponível em: www.cptec.inpe.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza previsões de tempo, de clima sazonal, ambiental (qualidade do ar) e de projeções de cenários de mudanças climáticas.

CULTURA ACADÊMICA. São Paulo. Disponível em: www.culturaacademica.com.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Acervo de *e-books* com o selo Cultura Acadêmica para compra ou para *download* gratuito.

DIRETÓRIO DOS GRUPOS DE PESQUISA NO BRASIL. Brasília, DF. Disponível em: http://dgp.cnpq.br/dgp/faces/consulta/consulta_parametrizada.jsf. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Diretório que disponibiliza consulta aos grupos de pesquisa no Brasil, reconhecidos pelo CNPq.

FUNDAÇÃO ABRINQ. São Paulo, 2020. Disponível em: www.fadc.org.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza informações e notícias relacionadas aos direitos da criança e do adolescente e arrecada doações para financiar projetos que visam garantir esses direitos.

FUNDAÇÃO LEMANN. São Paulo, 2020. Disponível em: www.fundacaolemann.org.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza informações e notícias relacionadas à educação e a projetos desenvolvidos pela fundação.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFiA E ESTATÍSTICA (IBGE). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Contém dados, informações e análises sociais, econômicas e geográficas sobre o Brasil, obtidos e produzidos pelo próprio instituto.

INSTITUTO BRASILEIRO DO MEIO AMBIENTE E DOS RECURSOS NATURAIS RENOVÁVEIS (Ibama). Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.gov.br/ibama/pt-br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza informações e leis sobre o meio ambiente brasileiro, bem como ações e programas do instituto, visando à conservação e preservação ambiental.

INSTITUTO DO PATRIMÔNIO HISTÓRICO E ARTÍSTICO NACIONAL (Iphan). Brasília, DF, 2020. Disponível em: http://portal.iphan.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Apresenta informações sobre os patrimônios históricos e artísticos reconhecidos.

INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA (Inmetro). Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: www.inmetro.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza normas e informações sobre metrologia, fiscalização e qualidade de produtos.

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS (Inpe). São José dos Campos, 2020. Disponível em: www.inpe.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Apresenta informações sobre o instituto, pesquisas, produtos e serviços nas áreas espacial e do ambiente terrestre do Brasil.

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES. Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.mctic.gov.br. Acesso em: 5 ago. 2020.

- Disponibiliza diversas informações como estrutura organizacional, agendas, planejamento estratégico, ações e programas referentes à área de ciência e tecnologia.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (MEC). Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza diversas informações como estrutura organizacional, competências, ações e programas na área de educação.

NOVA ESCOLA. São Paulo, 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza conteúdos de apoio didático para educadores e gestores, como planos de aula, cursos de capacitação, entre outros.

PORTAL GOVERNO DO BRASIL. Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.brasil.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Portal que unifica canais digitais do governo federal, reunindo em um único ambiente serviços e informações para o cidadão sobre diversas áreas do governo.

PORTAL MINISTÉRIO DA SAÚDE. Brasília, DF, 2020. Disponível em: www.saude.gov.br. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Portal em que são disponibilizadas informações, notícias, campanhas e dados sobre a saúde no Brasil.

PORTAL DOMÍNIO PÚBLICO. Brasília, DF, 2004. Disponível em: www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp. Acesso em: 18 jul. 2020.

- Disponibiliza obras literárias, artísticas e científicas na forma de textos, sons, imagens e vídeos que já são de domínio público, ou que tenham sua divulgação devidamente autorizada, e que constituem patrimônio cultural brasileiro e universal.

PORTAL DO PROFESSOR. Ministério da Educação. Brasília, DF, 2020. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/link.html?categoria=15. Acesso em: 20 jul. 2020.

- Oferece diversos materiais de apoio didático para o professor, como sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC.

PORTAL DOS DIREITOS DA CRIANÇA E DO ADOLESCENTE. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. Brasília, DF. 2018. Disponível em: www.direitosdacrianca.gov.br. Acesso em: 20 jul. 2020.

- Contém diversas informações sobre os direitos da criança e do adolescente e sobre o Conselho Nacional dos Direitos da Criança e do Adolescente.

9. Orientações específicas para este Volume

Este Volume da Coleção busca propiciar aos estudantes envolvimento nos processos de ensino e de aprendizagem e, a partir de abordagens próprias das ciências, o desenvolvimento de reflexões, investigações, conjecturas e análises críticas sobre diferentes temas do cotidiano, visando estimular atitudes democráticas e inclusivas que possibilitem a valorização dos direitos humanos. Além disso, busca-se também, incentivá-los na tomada de decisões, na comunicação e na disseminação de informações relacionadas a diferentes contextos, como ciência, tecnologia, saúde, multiculturalismo, história, entre outros, inclusive com a utilização de ferramentas digitais.

Na Unidade **1**, são tratados conceitos relacionados a sequências, progressões aritméticas, progressões geométricas e noções de linguagem de programação. Na Unidade **2**, são abordadas as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, bem como as relações trigonométricas em um triângulo qualquer, inclusive em contextos associados à acessibilidade. Por fim, na Unidade **3**, trabalham-se conceitos relacionados à circunferência, ao ciclo trigonométrico e às funções trigonométricas, incluindo algumas de suas aplicações. Para um melhor desenvolvimento do trabalho com este Volume, são sugeridos, nas **Orientações específicas para este Volume**, quando necessário, conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental ou Ensino Médio que podem ser retomados previamente, por exemplo, os conceitos de congruência de triângulos e proporcionalidade para verificar a validade do teorema de Tales.

As propostas apresentadas neste Volume da Coleção contribuem, em diversos momentos, para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, como na construção e interpretação de fluxogramas, na compreensão e utilização da linguagem de programação Scratch e na análise do comportamento de funções do tipo trigonométrica com auxílio de um *software* de geometria dinâmica (**GeoGebra**). O trabalho cooperativo e o protagonismo juvenil podem ser observados na proposta para a implementação de ações públicas pelos estudantes voltadas à comunidade local, como na investigação sobre prédios públicos estarem de acordo com as normas de acessibilidade. Em diversas ocasiões, também é possível propor um trabalho em parceria com professores de outras áreas do conhecimento, por exemplo, ao explorar informações relacionadas a ondas sonoras é possível contar com o suporte de professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ou ainda, um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas pode contribuir na discussão sobre paradoxo.

Objetivos e justificativas

Ao trabalhar com os conteúdos propostos neste Volume da Coleção, espera-se que os objetivos apresentados a seguir sejam alcançados pelos estudantes.

- Compreender a ideia de sequência numérica como uma função cujo domínio é um subconjunto do conjunto dos números naturais.
- Classificar uma sequência numérica em finita ou infinita.
- Identificar regularidades em uma sequência numérica ou figural e defini-la de maneira recursiva ou não recursiva.
- Compreender o conceito de progressão aritmética (PA) e de progressão geométrica (PG), associando-as a função afim e exponencial, respectivamente, e representando-as graficamente no plano cartesiano.
- Obter e utilizar a fórmula do termo geral de uma PA e de uma PG para determinar qualquer um de seus termos em função do primeiro termo e da razão.

- Classificar progressões aritméticas e geométricas de acordo com o comportamento de seus termos.
- Representar os termos de uma PA ou PG de diferentes maneiras.
- Determinar a soma de termos de uma PA e de uma PG.
- Determinar a fração geratriz de uma dízima periódica.
- Reconhecer e analisar o uso de linguagens de programação no funcionamento de aparelhos eletrônicos para executar determinadas tarefas.
- Interpretar e construir algoritmos em linguagem corrente, matemática ou representados por fluxograma, a fim de descrever as etapas necessárias para executar uma tarefa ou resolver um problema, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Utilizar a linguagem de programação Scratch para descrever um algoritmo.
- Reconhecer a necessidade e utilização de métodos científicos para obter e validar resultados, bem como identificar diferenças entre o método científico indutivo e dedutivo.
- Compreender e utilizar o teorema de Tales, o conceito de semelhança de figuras geométricas planas e as relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas em diversos contextos.
- Identificar figuras semelhantes e determinar a razão de semelhança entre elas.
- Compreender os casos de semelhança de triângulos e o teorema fundamental da semelhança.
- Obter e compreender a relação que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo conhecida como teorema de Pitágoras.
- Compreender relações trigonométricas no triângulo e reconhecer a importância dessas relações na história da humanidade ao contribuir na resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a determinação de distâncias inacessíveis.
- Utilizar a tabela trigonométrica para consultar os valores do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo.
- Estabelecer relações trigonométricas em um triângulo qualquer: lei dos senos e lei dos cossenos.
- Identificar elementos em uma circunferência como corda, centro, raio, diâmetro e ângulo central.
- Identificar arcos em uma circunferência e determinar a medida de seu comprimento e a sua medida angular.
- Compreender o ciclo trigonométrico para associar arcos de diferentes medidas angulares e número reais a pontos da circunferência que compõe essa estrutura.
- Determinar a medida de arcos congruentes entre si e representá-los no ciclo trigonométrico.
- Determinar o seno, o cosseno e a tangente de um número real e da soma e da diferença das medidas angulares de dois arcos trigonométricos, utilizando ou não o ciclo trigonométrico.
- Determinar o seno, o cosseno e a tangente da soma e da diferença entre as medidas angulares de dois arcos trigonométricos.
- Compreender o conceito de função seno, de função cosseno e de funções do tipo trigonométricas, além de esboçar e analisar o gráfico dessas funções, identificando suas características.
- Determinar o domínio, a imagem e o período da função seno e da função cosseno, bem como os intervalos reais em que são crescentes e decrescentes.
- Reconhecer fenômenos periódicos da natureza e a possibilidade de modelá-los por funções do tipo trigonométricas.

- Analisar e investigar aplicações de funções do tipo trigonométricas, explorando situações de diferentes áreas do conhecimento, como marés, ciclo menstrual e ondas sonoras.
- Resolver equações trigonométricas.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo sequências, noções de linguagens de programação, teorema de Tales, semelhança entre figuras geométricas planas, relações métricas e trigonométricas no triângulo, trigonometria na circunferência e funções e equações trigonométricas, relacionadas ou não a situações do cotidiano.

Os objetivos citados anteriormente são fundamentais para que os estudantes tenham oportunidade de desenvolver o pensamento científico e computacional. Além disso, favorecem a reflexão sobre conhecimentos historicamente construídos para resolução de problemas da sociedade. Com isso, os estudantes podem atuar como cidadãos críticos e reflexivos, por meio de processos comunicativos que privilegiam a argumentação, a formulação e o teste de hipóteses, bem como desenvolver argumentos e propostas para a defesa dos direitos humanos, possibilitando uma atuação na sociedade de maneira ética, defendendo pontos de vista e negociação de ideias.

A construção de algoritmos utilizando diferentes tipos de representações, seja por meio de linguagem corrente ou matemática, de fluxograma ou de uma linguagem de programação, estimula o desenvolvimento do pensamento computacional e a capacidade de pensar mate-

Unidade	Competências gerais	Área de Matemática e suas Tecnologias		Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas Contemporâneos Transversais
		Competências específicas	Habilidades	Competências específicas	
1. Sequências e noções de linguagem de programação	1 2 5	3 4 5	• EM13MAT315 • EM13MAT405 • EM13MAT507 • EM13MAT508	3	• Ciência e Tecnologia
2. Relações métricas e trigonometria no triângulo	1 2 5 7	3	• EM13MAT308	1	• Ciência e Tecnologia • Educação em Direitos Humanos
3. Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas	1 2 5	3	• EM13MAT306	2	• Ciência e Tecnologia • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras • Saúde
+ATIVIDADES					

maticamente para interpretar e resolver um problema. Conhecer métodos científicos e suas características contribui para que os estudantes estabeleçam conjecturas, definam estratégias e procedimentos mais adequados para obter ou validar um resultado com base em argumentações consistentes. Conhecer a contribuição histórica das relações trigonométricas para a sociedade pode ajudá-los no estudo das funções trigonométricas, na identificação de situações ou fenômenos da natureza que podem ser modelados por esse tipo de função, com ou sem auxílio de recursos tecnológicos, além da compreensão de seu conceito e aplicações em diferentes contextos ou áreas do conhecimento.

Quadro-síntese do Volume

No quadro a seguir, estão indicadas as competências gerais, as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias, as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e os Temas Contemporâneos Transversais tratados em cada Unidade deste Volume da Coleção. Além disso, são apresentados os temas de algumas seções propostas e a distribuição das atividades, o que contribui para a organização e o planejamento das aulas.

Seções			Quantidade de atividades	
Abertura de Unidade	Integrando	Você conectado	Resolvidas	Propostas
Stop-motion	Demografia	• Estudando PA na planilha eletrônica	16	86
Métodos científicos	Acessibilidade	• Verificando a lei dos senos	13	53
Moradia indígena	Duração solar do dia	• Gráfico de função do tipo trigonométrica	21	60
				38

Cronograma

A seguir, está apresentada uma proposta de cronograma para o desenvolvimento deste Volume da Coleção para um planejamento semestral. É importante considerar que essa proposta é apenas uma sugestão e que, com a nova realidade do Ensino Médio, o cronograma deve ser adequado às escolhas feitas pela comunidade escolar, em especial pelo estudante, de acordo com a quantidade de aulas estabelecidas no ano letivo para a área de Matemática e suas Tecnologias.

<table>
<tr><th>Unidade</th><th>Tópico/Seção</th><th>Quantidade de aulas</th><th>Planejamento*</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1. Sequências e noções de linguagem de programação</td><td>Abertura: Stop-motion</td><td>2</td><td rowspan="3">semanas 1 e 2</td></tr>
<tr><td>Sequências</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Progressão aritmética (PA)</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Progressão geométrica (PG)</td><td>6</td><td rowspan="2">semanas 3 e 4</td></tr>
<tr><td>Integrando: Demografia</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Noções de linguagem de programação</td><td>4</td><td rowspan="4">semanas 5 e 6</td></tr>
<tr><td>Você conectado: Estudando PA na planilha eletrônica</td><td>3</td></tr>
<tr><td>O que estudei</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="10">2. Relações métricas e trigonometria no triângulo.</td><td>Abertura: Métodos científicos</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Teorema de Tales</td><td>3</td><td rowspan="4">semanas 7 e 8</td></tr>
<tr><td>Semelhança de polígonos</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Relações métricas no triângulo retângulo</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Relações trigonométricas no triângulo retângulo</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Integrando: Acessibilidade</td><td>3</td><td rowspan="3">semanas 9 e 10</td></tr>
<tr><td>Relações trigonométricas em um triângulo qualquer</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Você conectado: Verificando a lei dos senos</td><td>3</td></tr>
<tr><td>O que estudei</td><td>2</td><td rowspan="3">semanas 11 e 12</td></tr>
<tr><td rowspan="9">3. Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas</td><td>Abertura: Moradia indígena</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Circunferência</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Ciclo trigonométrico</td><td>3</td><td rowspan="3">semanas 13 e 14</td></tr>
<tr><td>As funções trigonométricas</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Funções do tipo trigonométricas</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Equações trigonométricas</td><td>3</td><td rowspan="5">semanas 15 e 16</td></tr>
<tr><td>Integrando: Duração solar do dia</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Você conectado: Gráfico de função do tipo trigonométrica</td><td>2</td></tr>
<tr><td>O que estudei</td><td>1</td></tr>
<tr><td>+ATIVIDADES</td><td></td><td>2</td></tr>
</table>

* Nessa proposta, foram consideradas 5 aulas semanais na organização do semestre.

Sequências e noções de linguagem de programação

Nesta Unidade, busca-se favorecer, em diferentes momentos, a valorização dos conhecimentos historicamente construídos como meios de atuação democrática em sociedade, em um contexto de respeito à pluralidade de ideias. Tais conhecimentos, de natureza física, social, cultural ou digital, possibilitam reflexões sobre o papel da ciência e da tecnologia em diferentes ações humanas, como na compreensão da demografia como elemento social associado ao conhecimento matemático.

As propostas interdisciplinares, o uso de tecnologias digitais e os diferentes contextos, como aqueles de caráter social, buscam estimular reflexões sobre fatos da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias que são influenciados pelas necessidades humanas e caracterizados, essencialmente, pela dinamicidade. Isso permite compreendê-los como processos que se modificam com o passar do tempo, como na proposta de investigação sobre a técnica de animação *stop-motion*.

Para o planejamento desta Unidade, alguns conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental ou Ensino Médio podem ser retomados previamente, como noção de função, polígonos, equação do 1º grau com uma incógnita, média aritmética e outros que estão indicados, quando necessário, nos comentários destas **Orientações específicas para este Volume**. Além disso, é possível desenvolver um trabalho em parceria com professores de outras áreas do conhecimento em algumas abordagens. Por exemplo, ao apresentar a ideia de paradoxo e infinito, assim como na exploração do conceito de demografia, é possível contar com o suporte de professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

É importante destacar a autonomia do professor quanto à reorganização dos conteúdos propostos nesta Unidade, de acordo com as características das turmas e seus níveis de conhecimento prévio. Por exemplo, a seção **Você conectado**, que trata do estudo de progressões aritméticas em planilhas eletrônicas, pode ser explorada antes do estudo de progressões geométricas.

Páginas 10 e 11

Abertura de Unidade

O trabalho com essa abertura de Unidade favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC e uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, uma vez que possibilita aos estudantes que valorizem e reflitam sobre uma técnica digital utilizada pela sociedade para a construção de animações, o *stop-motion*, conhecendo parte de sua história e das ideias de como ela funciona.

Aproveitar o tema dessas páginas, que será retomado na página **12** e na seção **O que estudei**, e promover um momento de discussão com os estudantes, de modo que eles possam mobilizar impressões a respeito do *stop-motion*. Em seguida, apresentar alguns exemplos de filmes produzidos com essa técnica, como os indicados a seguir, e mostrar características específicas de cada um deles.

- **James e o pêssego gigante** (1996). Dirigido por Henry Selick, produzido por Tim Burton e baseado no livro homônimo de Roald Dahl, esse filme mistura atuação de atores reais, *stop-motion* e computação gráfica.
- **A noiva cadáver** (2005). Produzido por Tim Burton e dirigido por Tim Burton e Mike Johnson, essa animação foi desenvolvida inteiramente com a técnica de *stop-motion* e foi baseada em um conto folclórico russo do século XIX.

Dizer aos estudantes, como curiosidade, que o filme **A fuga das galinhas** (2000) utilizou massa de modelar na confecção dos personagens.

Para ampliar

Para complementar a discussão sobre a técnica *stop-motion*, ler para os estudantes o trecho a seguir.

> [...]
>
> A animação de *stop-motion* é conseguida quando se fotografam objetos quadro a quadro, que, exibidos na velocidade normal de projeção, criam a ilusão de movimento. Isso pode ser feito com bonecos, objetos, brinquedos, pessoas etc.
>
> Entre todos os estilos de animação, o *stop-motion* é aquele que mais aproxima o animador da tradição da narrativa dramática do teatro. Isso se deve principalmente à forma como são desenvolvidas as cenas, constituídas de bonecos e cenários que remetem principalmente a espaços cênicos gregos e japoneses.
>
> [...]
>
> O *stop-motion* [...] tem como principal atrativo a "mágica" típica dos filmes de animação, que fica muito evidente. Objetos e personagens se parecem muito mais com brinquedos e menos com a "realidade", enquanto nos filmes de simulação 3D, feitos no computador, o fotorrealismo é tido como a grande atração.
>
> [...]

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Ilustração digital e animação**. Curitiba, 2010. (Cadernos Temáticos). Disponível em: www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/cadernos_tematicos/ilustracao_digital_animacao.pdf. Acesso em: 21 jul. 2020.

A seguir são apresentadas as respostas aos itens propostos nessa seção.

- Resposta esperada: Um objeto é fotografado de um mesmo ângulo diversas vezes, mas com pequenas alterações em sua posição. Cada fotografia obtida corresponde a um quadro. Os quadros são colocados em disposição sequencial, relacionando os anteriores com os subsequentes, o que possibilita criar um vídeo com a ideia de movimento contínuo.
- Respostas pessoais.
- Resposta esperada: Multiplicando a quantidade de quadros necessários para produzir 1 segundo de animação pelo tempo, em segundos, de duração da cena.

No primeiro item proposto, salientar aos estudantes que, no *stop-motion*, é importante que os objetos produzidos sejam fotografados e não filmados em movimento. É essencial que, nessa técnica, a combinação de figuras estáticas, em sequência, forneça a sensação de movimentação, já que sua principal intenção é mostrar a "mágica" que ela fornece, e não, necessariamente, a reprodução da realidade.

Para complementar o segundo item, perguntar aos estudantes se eles já viram, também, algum filme em *live action*, que é um tipo de filme, baseado em animações, no qual atores reais interpretam os personagens.

Já no terceiro item, sugerir aos estudantes que pesquisem a quantidade de quadros necessários para produzir um segundo de animação dos filmes indicados anteriormente. Solicitar que pesquisem, também, o tempo total de cada animação. Caso consigam essas informações, pedir que calculem a quantidade aproximada de quadros necessários para a produção de cada um dos filmes ou animações pesquisados.

Páginas 12 a 15

Sequências

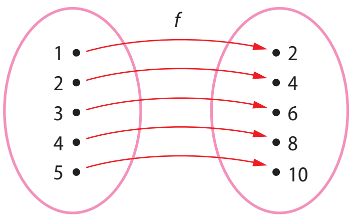
O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC.

Ao explorar as informações da página **12**, espera-se que os estudantes compreendam os elementos que caracterizam uma sequência matemática. Além disso, é importante que relacionem a ideia de sequência com o contexto abordado na abertura desta Unidade: *stop-motion*.

Explicar aos estudantes que uma sequência numérica pode ser denominada, também, de sucessão numérica. Realizar uma discussão com eles de maneira que reconheçam que sequências não necessariamente precisam ser numéricas. Apresentar alguns exemplos, como sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro); sequência dos dias da semana (domingo, segunda-feira, terça-feira, ... , sábado).

Possibilitar, nesse momento, que os estudantes apresentem exemplos de sequência que conheçam, podendo recorrer a experiências dos anos anteriores. Podem ser sequências numéricas, não numéricas ou figurais.

Caso os estudantes tenham dúvidas na definição de sequência que envolve a ideia de função, apresentar como exemplo uma sequência finita de cinco elementos (2, 4, 6, 8, 10) e utilizar o diagrama de Venn, conforme representado a seguir, para ajudar nessa compreensão, explicitando o domínio e o conjunto imagem da função f, nesse caso $D(f) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Im(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.



Ao discutir com os estudantes sobre a diferença entre sequências finitas e infinitas, argumentar que na sequência finita, as reticências são utilizadas para indicar que alguns de seus termos foram omitidos. Já na sequência infinita, as reticências são utilizadas para representar que seus termos seguem indefinidamente.

» Atividades resolvidas

R1. Essa atividade trabalha a ideia de sequência e o conceito de termo geral de uma sequência. Para complementar, propor aos estudantes que pesquisem o significado da palavra **recursivo** em um dicionário de Língua Portuguesa.

R2. Essa atividade possibilita aos estudantes que reconheçam regularidades e que estabeleçam generalizações por meio da lei de formação de uma sequência, o que propicia o desenvolvimento da competência específica **5** da área de Matemática e suas Tecnologias. Caso os estudantes apresentem dificuldade em identificar a regularidade da sequência, propor os questionamentos a seguir.
- Qual é a diferença entre o segundo e o primeiro termo dessa sequência? Resposta: 6 ($10 - 4$).
- Qual é a diferença entre o terceiro e o segundo termo dessa sequência? Resposta: 6 ($16 - 10$).
- Qual é o sexto termo dessa sequência? Resposta: 34 ($4 + (6 - 1) \cdot 6$).

» Atividades

1. Essa atividade trabalha a determinação da quantidade total de quadros em uma animação, utilizando a técnica de *stop-motion*. Verificar se os estudantes compreenderam que, para obter a resposta, eles podem multiplicar 45 por 24. Para complementar, solicitar que definam duas sequências para expressar a quantidade de quadros de uma animação com determinada duração: uma recursiva e outra não recursiva. Por exemplo, considerando Q, a quantidade de quadros de uma animação e t o tempo, em segundos, tem-se: não recursiva: $Q_t = 24t$ ($t \in \mathbb{N}^*$); recursiva: $Q_t = 24 + Q_{(t-1)}$ ($t \in \mathbb{N}$, com $t > 1$ e $Q_1 = 24$).

2. Essa atividade trabalha a determinação de termos de uma sequência definida de maneira recursiva ou não recursiva. Para complementar, perguntar aos estudantes quais das sequências apresentadas são definidas de maneira recursiva (**b**) e quais são definidas de maneira não recursiva (**a** e **c**).

3. Essa atividade trabalha a determinação dos primeiros cinco termos de uma sequência, definida de maneira não recursiva por meio de uma lei de formação. Para complementar, propor a alguns estudantes que compartilhem as estratégias que utilizaram para resolver essa atividade. Uma estratégia pode ser substituir n pelos valores naturais de 1 até 5 na expressão $a_n = n^2 - 4n + 3$ e conferir se os resultados obtidos correspondem aos termos da sequência, escritos ordenadamente.

4. Essa atividade trabalha o significado dos termos consecutivos de uma sequência. Para complementar, apresentar outros exemplos de sequências e pedir aos estudantes que determinem: três termos consecutivos; o sucessor de um termo x e o antecessor de um termo y.

5. Essa atividade trabalha as relações entre sequências figural e numérica e a observação de regularidades. É importante que os estudantes estabeleçam generalizações a partir dessas regularidades, representando-as pela lei de formação de uma sequência. Salientar aos estudantes que, no item **b**, é possível indicar uma outra figura como resposta, de acordo com outra regularidade que eles possam ter identificado. Contudo, é importante que eles justifiquem suas respostas. Complementar o item **d** pedindo que determinem o 25º termo dessa sequência e que expliquem seu significado nesse contexto (76; quantidade de palitos na composição de 25 representações de contorno de quadrado). Como essa atividade sugere a manipulação de palitos para investigar os termos de uma sequência e identificar regularidades, pode-se propô-la em grupo. Ao acompanhar os grupos, propor os questionamentos a seguir.

- Que mudanças pode-se observar de uma figura para a seguinte? Resposta esperada: Que são adicionados 3 palitos e obtida mais uma representação de contorno de quadrado.
- Quantos palitos são necessários para compor a 27ª figura? Resposta: 82 palitos ($3 \cdot 27 + 1 = 82$).

Ao final do trabalho em grupo, compartilhar as estratégias utilizadas pelos estudantes com o restante da turma. Se necessário, solicitar que elaborem outra sequência figural e a registrem no caderno.

6. Essa atividade trabalha o uso de simbologia algébrica para expressar regularidades em sequências numéricas, a exploração da classificação dessas sequências definidas de maneira recursiva ou não recursiva e a análise de duas expressões algébricas obtidas que podem representar uma mesma sequência numérica. Orientar os estudantes de maneira a perceberem a variação dos termos da sequência de acordo com a expressão que devem indicar. Assim, para determinar a sequência de maneira recursiva, devem analisar como um termo da sequência varia em relação ao anterior. Já na não recursiva, a relação deve ser feita considerando a posição do termo.

7. Essa atividade trabalha a verificação de determinados números para identificá-los como termos ou não de uma sequência a partir de sua lei de formação. Espera-se que os estudantes compreendam que, para resolver essa atividade, pode-se substituir a_n pelo número da ficha e verificar se o resultado correspondente a n é um número natural. Para complementar, propor outros exemplos de números aos estudantes e pedir que verifiquem se tais números são termos da sequência apresentada.

8. Essa atividade trabalha a determinação de um termo de uma sequência definida recursivamente. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem outros termos dessa sequência de posições posteriores à 10ª.

9. Essa atividade trabalha a exploração da sequência de Fibonacci associada à reprodução de coelhos. Caso os estudantes apresentem dúvidas em identificar uma regularidade no item **b**, propor que analisem, em separado, os 3º, 4º e 5º termos dessa sequência. Em seguida, solicitar que obtenham a soma entre os 3º e 4º termos e questioná-los sobre o que podem observar. Após o trabalho com essa atividade, propor aos estudantes que pesquisem e citem exemplos de outras sequências, de preferência em contextos da realidade ou de outras áreas do conhecimento.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site*, em que é possível relacionar a proporção áurea e a sequência de Fibonacci.

- VOCÊ SABE o que é a proporção áurea? **Instituto de Engenharia**, 31 jul. 2015. Disponível em: www.institutodeengenharia.org.br/site/2015/07/31/voce-sabe-o-que-e-a-proporcao-aurea. Acesso em: 21 jul. 2020.

Páginas 16 a 20

Progressão aritmética (PA)

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**, da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT507** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Espera-se que os estudantes consigam associar as distâncias indicadas a termos de uma sequência, sistematizada anteriormente. Além disso, a partir do contexto apresentado sobre treino programado, pretende-se explorar a ideia de progressão aritmética (PA). É importante que eles identifiquem, em uma sequência, as características de uma PA. No boxe **Para pensar** da página **16**, os estudantes podem identificar uma dessas características: a razão da PA, que corresponde à diferença entre um termo qualquer e seu antecessor, a partir do segundo termo, que é sempre um valor constante.

Para ampliar

Para complementar, ler para os estudantes o trecho a seguir, que apresenta informações sobre a corrida de rua.

> [...]
>
> A corrida movimenta com praticamente todos os músculos do corpo humano, mas os mais exigidos estão localizados nos membros inferiores. As pernas – onde está localizada a musculatura mais importante – garantem a impulsão e sustentação no momento da corrida. Já os músculos do tórax são responsáveis pelo equilíbrio do corpo, enquanto as fibras dos braços ajudam também a dar estabilidade e facilitar o impulso.
>
> [...]

VITAL, M. Corrida é recomendada por especialistas para trazer benefícios para saúde. **Agência Alagoas**, Maceió, 28 maio 2016. Disponível em: www.agenciaalagoas.al.gov.br/noticia/item/4438-corrida-e-recomendada-por-especialistas-para-trazer-beneficios-para-saude. Acesso em: 22 jul. 2020.

Após a leitura desse trecho, solicitar aos estudantes que façam uma pesquisa e análise crítica sobre os benefícios da corrida de rua para a saúde.

Caso os estudantes apresentem dificuldade na classificação de uma PA em constante, crescente ou decrescente, destacar a comparação entre os termos, determinando se um termo é maior ou menor do que ou igual a seu sucessor. Nesse momento, apresentar os exemplos a seguir e solicitar aos estudantes que classifiquem cada PA indicada em constante, crescente ou decrescente.

- (25, 27, 29, 31). Resposta: PA crescente.
- (100, 100, 100, 100, 100). Resposta: PA constante.
- (35, 31, 27, 23, 19). Resposta: PA decrescente.

Para auxiliar os estudantes na compreensão dos aspectos do enésimo termo de uma PA, solicitar que eles atribuam alguns valores para n e substituam na fórmula $a_n = a_{n-1} + r$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$, de modo a perceberem que a_{n-1} é o antecessor de a_n. Aproveitar essa discussão para ressaltar que a_{n-1}, a_n, a_{n+1} são termos consecutivos de uma PA.

Caso os estudantes tenham dúvidas em determinar o termo central a_n de três termos consecutivos de uma PA, apresentar exemplos numéricos. Sendo, por exemplo, 9, x e 1 esses três termos consecutivos, segue que:

$$x = \frac{9 + 1}{2} = 5$$

Fórmula do termo geral de uma PA

Espera-se que os estudantes compreendam a dedução da fórmula do termo geral de uma PA e que a utilizem em diferentes situações. É interessante que a dedução seja realizada em conjunto com os estudantes, etapa a etapa. Caso eles tenham dificuldade em compreender essas etapas, solicitar que prestem atenção ao índice que representa cada termo da sequência e que comparem tais valores com o número que multiplica a razão, como proposto no boxe **Para pensar**.

É importante que os estudantes consigam associar uma PA a uma função afim. Para auxiliar nessa discussão, retomar a definição de sequência numérica (finita e infinita) de modo que os estudantes percebam que na própria definição de sequência, finita ou infinita, ela é associada a uma função. Ressaltar que a PA é um caso particular de sequência numérica e que função afim é um caso particular de função.

» Atividades resolvidas

R4. Essa atividade trabalha a determinação de termos de uma PA. Explicar aos estudantes as maneiras de escrever os termos de uma PA em função de outros termos e de sua razão r. Além daquele que é proposto no boxe **Para pensar**, apresentar os seguintes exemplos.

- $a_3 = a_1 + 2r$
- $a_5 = a_2 + 3r$
- $a_{10} = a_4 + 6r$

R6. Essa atividade trabalha a determinação da posição de um termo em uma sequência figural. É importante que os estudantes identifiquem regularidades a partir da análise dessa sequência. Para complementar, solicitar que eles determinem a quantidade de palitos utilizados em outras etapas, como na etapa **10** ($3 + 9 \cdot 2 = 21$; 21 palitos) e na etapa **20** ($3 + 19 \cdot 2 = 41$; 41 palitos).

R7. Essa atividade trabalha a associação, a partir do contexto de aplicativo de transporte privado, entre PA e função afim. Após a resolução dos itens **b** e **c**, é importante que os estudantes atribuam outros valores para a variável independente da função associada à PA apresentada e realizem os cálculos, interpretando os resultados de acordo com o contexto. Por exemplo:

- $f(10) = 275 \cdot 10 + 1\,225 = 3\,975$. O 10º termo da PA representa a quantidade estimada de corridas para serem realizadas no 10º mês de serviço do aplicativo, nesse caso, 3 975.
- $f(20) = 275 \cdot 20 + 1\,225 = 6\,725$. O 20º termo da PA representa a quantidade estimada de corridas para serem realizadas no 20º mês de serviço do aplicativo, nesse caso, 6 725.

Salientar aos estudantes que o domínio dessa função f pode ser indicado por $\mathbb{N}^*$.

R8. Essa atividade trabalha a determinação da quantidade de termos de uma PA. A resolução apresentada nessa atividade utiliza ideias da resolução de problemas, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**. Para complementar, propor aos estudantes a seguinte questão: Quantos termos tem a PA cuja razão é 8 e $a_5 = 21$? A ideia é que os estudantes percebam que faltam dados no enunciado dessa questão para que seja possível resolvê-la. Em seguida, pedir a eles que ajustem o enunciado de maneira a tornar possível sua resolução. Uma possibilidade, por exemplo, é indicar o valor do último termo, deixando o enunciado assim: Quantos termos tem a PA cuja razão é 8, $a_5 = 21$ e o último termo é 69? Resposta: 11 termos [$21 = a_1 + (5 - 1) \cdot 8 \Rightarrow a_1 = -11; 69 = -11 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow n = 11$].

Páginas 21 e 22

» Atividades

10. Essa atividade trabalha a identificação de características de uma PA. Para complementar, solicitar aos estudantes que avaliem se cada PA apresentada é finita ou infinita. Nesse caso, todas elas são finitas.

11. Essa atividade trabalha a determinação dos cinco primeiros termos de uma PA, a partir de sua razão e de um outro termo estabelecido. Para complementar, propor aos estudantes que classifiquem cada PA em crescente, constante ou decrescente (**a**: crescente; **b**: crescente; **c**: crescente; **d**: constante; **e**: decrescente).

12. Essa atividade trabalha a identificação de uma PA decrescente a partir da análise de algumas que estão definidas de maneira não recursiva (itens **b** e **d**) ou de maneira recursiva (itens **a** e **c**). Para complementar, questionar os estudantes sobre o porquê de em alguns casos o domínio ser $\mathbb{N}$ e em outros, $\mathbb{N}^*$. Espera-se que eles percebam que nos itens em que o domínio corresponde a $\mathbb{N}$ há uma outra restrição ($n \geqslant 2$), que, assim como a de $\mathbb{N}^*$, é necessária para que o primeiro termo da sequência seja a_1.

13. Essa atividade trabalha a determinação dos três primeiros termos de uma PA a partir de outros termos estabelecidos. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem a fórmula do termo geral dessa PA ($a_n = 6n - 1$).

14. Essa atividade trabalha a determinação dos seis termos de uma PA, a partir da soma dos seus primeiros três termos e da soma dos seus últimos três termos. Para complementar, propor aos estudantes que classifiquem essa PA em crescente, decrescente ou constante (decrescente).

15. Essa atividade trabalha a determinação da fórmula do termo geral de uma PA. Além disso, os estudantes precisam verificar se alguns valores correspondem a termos dessa PA. Após a resolução, solicitar aos estudantes que determinem as posições dos termos 17, -60 e 220 (aplicando a fórmula do termo geral e isolando n, obtém-se a_{16}, a_5 e a_{45}, respectivamente) e questioná-los sobre o que é possível concluir a respeito da PA. Espera-se que eles percebam que se trata de uma PA crescente.

16. Essa atividade trabalha a determinação das medidas das bases e da altura de um trapézio, que correspondem a termos de uma PA. Se julgar necessário, relembrar a expressão para se calcular a área de um trapézio: $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$, em que B, b e h correspondem às medidas da base maior, da base menor e da altura do trapézio, respectivamente.

17. Essa atividade trabalha a determinação de um termo de uma PA infinita. Para complementar, solicitar aos estudantes que escolham outro termo de posição qualquer e que o determinem. Ao final, propor que alguns deles apresentem as resoluções para os demais colegas da turma.

18. Essa atividade trabalha a determinação da quantidade de termos de uma PA finita. Para complementar, propor aos estudantes que indiquem a razão de cada PA (**a**: 8; **b**: 19; **c**: -42).

19. Essa atividade trabalha a interpretação gráfica em um contexto sobre serviço de fibra óptica e a associação de alguns valores a termos de uma PA crescente. Explicar que a representação gráfica apresentada corresponde à parte do gráfico de uma função afim, cujo domínio é restrito a $\mathbb{N}^*$. No item **b**, verificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolvê-lo e propor que ao menos um deles apresente a resolução na lousa para os demais colegas da turma.

20. Essa atividade trabalha a ideia de interpolação para determinar, a partir de dois números (extremos), números reais que correspondam aos termos de uma PA. Para auxiliar os estudantes na resolução do item **c**, propor os questionamentos a seguir.
- Qual é o primeiro termo da PA obtida? E o último? Respostas: 19. 264.
- Como é possível determinar a quantidade total de elementos dessa PA? Resposta esperada: Determinando e utilizando a fórmula do termo geral de uma PA.

21. Essa atividade trabalha a aplicação da interpolação de meios aritméticos em uma situação sobre múltiplos de um número natural. É importante que os estudantes consigam associar a sequência dos múltiplos de um número natural a uma PA em que a razão coincide com esse número. Caso os estudantes apresentem alguma dificuldade para resolver essa atividade, realizar questionamentos, como os sugeridos a seguir.
- Qual é o primeiro múltiplo de 12 entre 45 e 290? E qual é o último? Respostas: 48. 288.
- Qual é o primeiro múltiplo de 12 entre 105 e 550? E qual é o último? Respostas: 108. 540.
- Qual é o primeiro múltiplo de 12 entre 640 e 1 146? E qual é o último? Respostas: 648. 1 140.

22. Essa atividade trabalha a associação da representação gráfica de uma PA a uma função afim. Discutir com os estudantes o domínio da função f ($\mathbb{N}^*$) indicando que sua representação gráfica é formada por pontos, assim como a da PA.

23. Essa atividade trabalha a associação de uma função afim a uma PA. Para complementar, perguntar aos estudantes por que o gráfico da função f não pode ser representado por uma reta. É importante que eles analisem o domínio de f, que corresponde ao conjunto dos números naturais positivos.

24. Essa atividade trabalha uma situação de desvalorização de motocicletas que é descrita por meio de uma PA e, consequentemente, por uma função afim. Realizar uma discussão com os estudantes sobre a desvalorização de bens e, se achar necessário, propor que pesquisem informações relacionadas ao tema. Possibilitar que os próprios estudantes façam uma análise crítica desse processo de desvalorização. Um exemplo é pensarem que más condições de uso potencializam a desvalorização de bens.

25. Essa atividade trabalha o processo de criatividade dos estudantes, de maneira que eles próprios indiquem os termos de uma PA e a função que pode ser associada a ela. Ao final, sugerir que eles compartilhem com os colegas algumas das funções definidas a partir das progressões aritméticas e os gráficos correspondentes, visto que há diferentes possibilidades de respostas.

26. Essa atividade trabalha a ideia de PA em um contexto de TV por assinatura, de modo que os estudantes consigam associar os termos de uma PA aos valores indicados em uma tabela e que determinem a fórmula do termo geral dessa PA. Para complementar, propor que citem possíveis motivos para que essa diminuição da TV por assinatura aconteça. É importante que eles desenvolvam argumentos (orais ou por escrito) para listar esses motivos, explicitando novas tendências de consumo.

Páginas 23 a 25

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Espera-se que os estudantes consigam compreender o processo de dedução de uma expressão para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA a partir de uma situação envolvendo a competição de empilhamento de copos. Nesse contexto, discutir a necessidade de determinar a quantidade de copos para o empilhamento como um dos fatores que podem influenciar a classificação dos jogadores na competição. Aproveitar essa discussão para destacar a quantidade de copos em cada camada. Verificar se os estudantes conseguem associar essas quantidades a termos de uma PA, conteúdo tratado anteriormente.

Na prática

Solicitar aos estudantes que pesquisem como o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) realizou a soma dos 100 primeiros números inteiros positivos não nulos. Em seguida, propor a eles que comparem a estratégia utilizada por esse matemático com o estudo realizado até aquela época. Espera-se que eles percebam que o raciocínio utilizado por Gauss permitiu a construção da expressão para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA, pois ele observou que a soma do 1º número (1) com o último (100) era igual à soma do 2º número (2) com o penúltimo (99), e assim sucessivamente. Dessa forma, para resolver o problema, bastava somar 50 vezes o número 101 ($101 \cdot 50 = 5\,050$).

» Atividades resolvidas

R11. Essa atividade trabalha uma aplicação da ideia da soma dos n primeiros termos de uma PA. Caso os estudantes tenham dúvidas, esclarecer que as projeções da produção de 2012 a 2015 podem ser associadas aos primeiros quatro termos de uma PA. Com isso, a projeção para 2021 corresponderá ao 10º termo dessa PA.

Páginas 26 e 27

» Atividades

27. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem a quantidade de copos que teria a 100ª camada de um empilhamento $\left(\frac{100(1+100)}{2} = 5\,050;\right.$ 5 050 copos$\left.\right)$.

28. Essa atividade trabalha a soma dos n termos de uma PA finita. Para complementar, perguntar aos estudantes qual o 20º termo de cada PA apresentada [**a**: $2 + 19 \cdot 11 = 211$; **b**: $127 + 19 \cdot (-6) = 13$; **c**: $60 + 19 \cdot 10 = 250$].

29. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA com a ideia de múltiplo de um número natural. É importante que os estudantes consigam associar a sequência dos múltiplos de um número natural a uma PA, cuja razão coincide com o próprio número. Para complementar, solicitar a eles que calculem a soma dos números múltiplos de 2, entre 1 e 101 $\left[a_1 = 2; a_n = 100; r = 2; n = 50; S_{50} = \frac{50(2+100)}{2} = 2550\right]$.

30. Essa atividade trabalha a fórmula do termo geral e a soma dos n primeiros termos de uma PA. Verificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolvê-la. Uma delas é inicialmente determinar o 15º termo dessa PA e, depois, calcular a soma de seus 15 primeiros termos. Para complementar, pedir que determinem a soma dos 30 primeiros termos dessa PA $\left(a_{30} = 4 + 29 \cdot 68 = 1\,976; S_{30} = \frac{30(4+1\,976)}{2} = 29\,700\right)$.

31. Essa atividade trabalha a determinação dos 5 primeiros termos de uma PA, dadas as somas dos 8 e dos 16 primeiros termos dessa PA. Para resolver essa atividade, se necessário, relembrar com os estudantes a resolução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, pois por meio dele podem-se obter o primeiro termo e a razão dessa PA. Como complemento, solicitar aos estudantes que determinem os próximos 5 termos dessa sequência ($5; -4; -13; -22; -31$).

32. Essa atividade trabalha a ideia de soma dos n primeiros termos de uma PA em uma situação envolvendo a disposição de poltronas em fileiras de um cinema. Para complementar, propor aos estudantes que determinem a quantidade de poltronas da última fileira ($17 + 9 \cdot 2 = 35$; 35 poltronas).

33. Essa atividade trabalha a fórmula do termo geral e o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PA, dados os seus primeiros termos. Pedir aos estudantes que classifiquem cada PA apresentada em crescente, decrescente ou constante e justifiquem suas respostas (são todas crescentes, pois a razão de cada uma é positiva).

34. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA a partir de informações em um gráfico de barras. Verificar se os estudantes perceberam que os valores apresentados no gráfico podem ser associados aos primeiros termos de uma PA.

35. Essa atividade trabalha o cálculo da razão, do primeiro termo e da soma dos 50 primeiros termos de uma PA. Para auxiliar na resolução, relembrar com os estudantes a resolução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, visto que eles podem inicialmente determinar o primeiro termo e a razão dessa PA resolvendo o sistema de equações: $\begin{cases} -40 = a_1 + 14r \\ 80 = a_1 + 44r \end{cases}$.

36. Essa atividade trabalha a soma dos n termos de uma PA em uma situação envolvendo as medidas dos ângulos internos de um polígono convexo. Verificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolvê-la e propor que ao menos um deles apresente a resolução aos demais colegas da turma.

37. Essa atividade trabalha a exploração de uma PA de segunda ordem, ou seja, de uma sequência de números cujas diferenças entre dois termos consecutivos formam uma PA. Verificar se os estudantes perceberam que as quantidades de palitos que aumentam, de uma figura para a seguinte, formam uma PA de razão 3.

38. Essa atividade trabalha a associação de uma expressão à soma dos n primeiros termos de uma PA. Comentar com os estudantes que as somas dos n primeiros termos da PA mencionada pode ser associada a valores da função quadrática $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = 4n^2 - 4n$.

39. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA envolvendo equações do 1º grau. Verificar se os estudantes perceberam que o 1º membro de cada equação apresentada corresponde à soma dos n primeiros termos de uma PA.

40. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA em um contexto de financiamento de veículos. Para complementar, questionar os estudantes se conhecem outros tipos de financiamento que se diferenciam dos apresentados.

41. Essa atividade trabalha o cálculo da razão de uma PA. Verificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver essa atividade e solicitar a alguns deles que as apresentem para a turma. Como complemento, pedir a eles que determinem o 4º e o 9º termos dessa PA (27 e 47, respectivamente).

42. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA em uma situação envolvendo média aritmética. Relembrar os estudantes que a média aritmética de dois ou mais números corresponde à soma desses números dividida pela quantidade de números. Solicitar que eles apresentem argumentos (orais ou escritos) sobre o conceito de média aritmética que pode ser aplicado em situações do dia a dia.

43. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PA a partir de um problema encontrado no papiro de Rhind. Dessa maneira, a abordagem dessa atividade está relacionada à História da Matemática, umas das tendências metodológicas da Educação Matemática. Caso os estudantes tenham dúvidas, sugerir que escrevam, inicialmente, os 5 termos da PA descrita nesse problema em função de sua razão. Por exemplo, ao considerar o termo central (a_3) como x, pode-se escrever a PA $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$. No item **c**, eles podem pesquisar os problemas em livros de História da Matemática.

Páginas 28 e 33

Progressão geométrica (PG)

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Espera-se que os estudantes compreendam ideias sobre fractal associadas a progressões geométricas. Ao apresentar o exemplo do triângulo de Sierpinski, perguntar aos estudantes se eles já conheciam esse fractal.

Para complementar, organizar os estudantes em pequenos grupos e solicitar que apresentem outros exemplos de PG constantes, decrescentes, crescentes e alternantes.

Fórmula do termo geral de uma PG

É importante realizar a dedução da fórmula do termo geral de uma PG com os estudantes, etapa a etapa, em uma discussão coletiva. Caso eles apresentem dificuldade, relembrá-los de que:

- em uma PG, um termo qualquer, a partir do segundo, corresponde ao produto do termo antecessor pela razão da PG;
- sendo $a, m, n \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tem-se que $a^0 = 1$ e $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- em uma sequência, a_n é sucessor de a_{n-1}.

Ao discutir com os estudantes a associação da PG a uma função do tipo exponencial, ressaltar que o domínio dessa função é o conjunto dos números naturais positivos.

Para ampliar

Para complementar, organizar os estudantes em grupos e propor a atividade a seguir.

- Considerem uma sequência formada por figuras de quadrados em que a 1ª corresponde a um quadrado de lado x e as figuras seguintes são obtidas a partir dela da seguinte maneira: marquem o ponto médio dos lados do quadrado anterior, ligue com segmentos de reta os pontos médios dos lados opostos e considerem a menor figura de quadrado formada. Escrevam uma PG cujos termos estejam associados a essas figuras de acordo com alguma regularidade observada. Resposta possível: Uma PG em que os termos correspondem às medidas do lado do menor quadrado formado em cada uma das etapas $\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, ...\right)$.

» Atividades

44. Essa atividade trabalha o cálculo da razão e a classificação de uma PG. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem quais das PG apresentadas podem ser classificadas também como PA (apenas a do item **b**).

45. Essa atividade trabalha a determinação dos quatro primeiros termos de uma PG, dadas sua razão e um de seus termos. Para complementar, propor aos estudantes mais alguns itens, conforme sugerido a seguir, para que determinem os quatro primeiros termos de uma PG em que:

- $a_2 = 20$ e $q = 5$. Resposta: 4, 20, 100 e 500.
- $a_4 = 16$ e $q = -2$. Resposta: -2, 4, -8 e 16.

46. Essa atividade trabalha a determinação de um termo de uma PG, dados outro termo e sua razão. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem o 8º termo dessa PG $\left(a_8 = a_7 \cdot -\dfrac{5}{4} = -\dfrac{21\,875}{128}\right)$.

47. Essa atividade trabalha a determinação da razão e do primeiro termo de uma PG, dados alguns de seus termos. Após a resolução dessa atividade, solicitar aos estudantes que confiram se as condições necessárias para que uma PG seja classificada em decrescente foram satisfeitas. Nesse caso, tem-se uma PG decrescente em que $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$.

48. Essa atividade trabalha a ideia de PG em uma situação envolvendo o Triângulo de Sierpinski. Retomar com os estudantes a PG cujos termos correspondem às quantidades de triângulos em preto nas figuras em cada etapa da construção para obter esse fractal. Para complementar, questionar os estudantes se é possível escrever uma PG cujos termos correspondam às quantidades de triângulos em branco nas figuras em cada etapa. Espera-se que eles percebam que isso não é possível, pois a quantidade de triângulos em branco em cada etapa, independentemente do tamanho, não corresponde a uma PG (0, 1, 4, 13, ...). No item **d**, caso os estudantes apresentem dificuldade para resolvê-lo, sugerir que determinem e analisem os quocientes entre a_3 e a_2 e entre a_4 e a_3 na sequência que indicaram. No item **e**, se necessário, relembrar que o perímetro de uma figura geométrica plana é o comprimento de seu contorno.

49. Essa atividade trabalha a ideia de PG em um contexto de crescimento populacional de municípios, medido pela taxa de crescimento geométrico. Para complementar, solicitar aos estudantes que pesquisem a taxa de crescimento geométrico do município em que residem de determinado período. Ao final, propor que elaborem um problema envolvendo essa taxa e o cálculo de PG e, depois, troquem-no com o de um colega para que um resolva o problema do outro. Por fim, eles devem conferir juntos as resoluções.

50. Essa atividade trabalha a determinação dos cinco primeiros termos de uma PG, cujos termos estão expressos em função de x. Caso os estudantes tenham dúvidas, lembrá-los de que três termos consecutivos de uma PG podem ser expressos por $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem a razão dessa PG ($q = 6$).

51. Essa atividade trabalha a determinação da quantidade de termos de uma PG finita. Para auxiliar na resolução, sugerir aos estudantes que escrevam os termos dessa PG como potências de base 2.

52. Essa atividade trabalha a determinação da razão de uma PG dadas as somas entre dois termos consecutivos dessa PG. Para complementar, solicitar aos estudantes que avaliem se essa PG pode ser classificada como crescente, constante, decrescente ou alternante, pois $q < 0$.

53. Essa atividade trabalha a ideia de PG em um contexto de crescimento da população de bactérias. Para complementar, propor aos estudantes que escrevam uma sequência cujos termos correspondam ao tempo, em horas, após o início dessa análise, em que o microbiologista verifica a quantidade de bactérias (0, 3, 6, ...).

54. Essa atividade trabalha a ideia de PG em uma situação envolvendo juro composto. Caso seja necessário, orientar os estudantes a obter $1{,}005^{36}$ em uma calculadora científica.

55. Essa atividade trabalha a associação de uma função do tipo exponencial aos termos de uma PG. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem o 20º termo dessa PG ($a_{20} = -2 \cdot 3^{19}$). Esse cálculo pode ser realizado em uma calculadora científica, por exemplo.

56. Essa atividade trabalha a associação dos termos de uma PG a uma função do tipo exponencial. Para complementar, propor aos estudantes que calculem o valor de $f(10)$ e interpretem esse resultado em relação à PG apresentada ($2^{2 \cdot 10 - 5} = 32\,768$; 32 768 correspondem ao 10º termo dessa PG). Se julgar conveniente, sugerir que eles construam o gráfico da função f no plano cartesiano.

57. Essa atividade trabalha a associação dos termos de uma PG a uma função do tipo exponencial em um contexto de área reflorestada. Para resolver o item **a**, verificar se os estudantes perceberam que pode ser resolvida a equação exponencial: $243 = 32 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.

58. Essa atividade trabalha a escrita dos termos de uma PG infinita e a associação desses termos a uma função do tipo exponencial. Ao final, sugerir aos estudantes que compartilhem com os colegas algumas das funções definidas a partir das progressões geométricas e os gráficos correspondentes, visto que há diferentes possibilidades de respostas.

Páginas 34 a 36

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Espera-se que os estudantes consigam compreender a dedução da expressão para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG. No boxe **Para pensar**, caso os estudantes apresentem dificuldade nesse processo de dedução, destacar que:

- a_{n-2} é o antecessor de a_{n-1} que, por sua vez, é antecessor de a_n;

- $a_2 = a_1 \cdot q$ e $a_3 = a_2 \cdot q$.

Para complementar, ressaltar aos estudantes a necessidade de $q \neq 1$ na expressão $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$, visto que, se $q = 1$, o denominador seria igual a 0. Perguntar como seria possível determinar a soma dos n primeiros termos de uma PG quando $q = 1$. Espera-se que percebam que, quando $q = 1$, todos os termos da PG são iguais a a_1; nesse caso, $S_n = a_1 \cdot n$.

» Atividades

59. Essa atividade trabalha a soma dos n primeiros termos de uma PG. Para complementar, solicitar aos estudantes que classifiquem cada PG apresentada em crescente, decrescente, constante ou alternante (**a**: decrescente; **b**: crescente; **c**: crescente; **d**: alternante).

60. Essa atividade trabalha a ideia da soma dos n primeiros termos de uma PG em um contexto de entrega por *delivery*. Para complementar, discutir com os estudantes os tipos de *delivery* de refeições que existem na região em que moram.

61. Essa atividade trabalha a análise dos termos de uma PG alternante infinita. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem a razão dessa PG ($q = -1$).

62. Essa atividade trabalha a ideia de PG em um contexto relacionado a uma das obras do professor de Matemática conhecido por Malba Tahan. Para complementar, solicitar aos estudantes que pesquisem informações sobre esse professor e títulos de outros livros assinados por ele.

63. Essa atividade trabalha a determinação da razão de uma PG finita, dados a_1, a_n e S_n. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem quantos termos possui essa PG ($-54\,432 = 7 \cdot (-6)^{n-1} \Rightarrow n = 6$; 6 termos).

64. Essa atividade trabalha a soma dos termos de uma PG finita, dados o 3º e 8º termos. Para complementar, perguntar aos estudantes se é possível inferir algo sobre essa PG, analisando apenas o 3º e 8º termos. Espera-se que eles concluam que se trata de uma PG decrescente.

65. Essa atividade trabalha a ideia de PG em uma situação envolvendo o movimento de uma bola em queda livre. Para complementar, solicitar aos estudantes que definam uma nova altura inicial e determinem quantos metros a bola percorre até se chocar com o solo pela 5ª vez, por exemplo.

66. Essa atividade envolve a exploração de regularidades relacionadas à PA e à PG. É importante destacar que as respostas foram elaboradas considerando determinada interpretação. Porém, é possível que os estudantes identifiquem outros padrões e regularidades na sequência, o que deve ser considerado correto desde que apresentem justificativas consistentes. Caso os estudantes tenham dificuldade em identificar essas regularidades, sugerir que analisem se existe alguma relação que pode ser estabelecida entre as ordens das linhas e os números indicados em cada uma delas, por exemplo.

Páginas 37 a 39

Soma dos termos de uma PG infinita

Ao explorar as informações da página **37**, é importante que os estudantes compreendam o que é o paradoxo de Zenão e que estabeleçam relações com a ideia da soma dos termos de uma PG infinita. Verificar a possibilidade de discutir esse exemplo com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, de maneira a explorar ideias relacionadas a conceitos como paradoxo, realidade, infinito, entre outros. Para isso, é importante planejar essa aula conjunta com antecedência. Uma sugestão é propor a organização da turma em grupos, de maneira que cada um deles fique responsável por investigar um dos conceitos indicados. Ao final, as informações obtidas nas investigações podem ser compartilhadas na turma por meio de seminários. Na formação dos grupos, procurar valorizar estudantes de diferentes perfis (tímidos, extrovertidos, líderes etc.), o que contribui para a elaboração e a apresentação dos seminários.

Na página **38**, discutir com os estudantes a afirmação "quanto maior o valor de n considerado, mais próximo de zero é q^n". Sabendo que $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$, apresentar um exemplo, em que $q = 0{,}5$. Nesse caso, para $n = 1$, segue que $(0{,}5)^1 = 0{,}5$; para $n = 2$, $(0{,}5)^2 = 0{,}25$; para $n = 4$, $(0{,}5)^4 = 0{,}0625$. Verificar se os estudantes percebem que os resultados obtidos se aproximam cada vez mais de 0, à medida que se aumenta o valor de n.

» Atividades

67. Essa atividade trabalha a determinação do limite da soma dos termos de uma PG infinita. Verificar se os estudantes notaram o fato de que as PG indicadas nos itens **a** e **c** são alternantes.

68. Essa atividade trabalha a determinação da fração geratriz de dízimas periódicas.

69. Essa atividade trabalha a associação da soma dos termos de uma PG infinita à ideia de fractal. Caso os estudantes apresentem dificuldade para resolvê-la, solicitar que explicitem a sequência formada pelos comprimentos das circunferências $\left(20\pi,\ 10\pi,\ 5\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ ...\right)$.

70. Essa atividade trabalha a soma dos termos de uma PG infinita a partir de uma equação do 1º grau. Caso algum estudante apresente dificuldade para resolvê-la, propor que, inicialmente, escreva os cinco primeiros termos da PG mencionada e calcule a soma entre eles, por exemplo.

Para complementar as atividades dessa seção, propor aos estudantes os seguintes questionamentos.

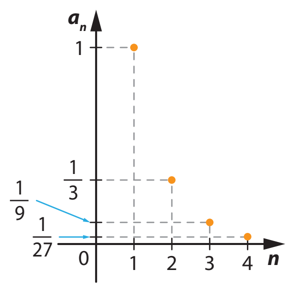
- Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3^{-x}$, considere a sequência numérica infinita $(f(0), f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ...)$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

a) Escreva os quatro primeiros termos dessa sequência. Resposta: 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{27}$.

b) Explique por que essa sequência pode ser classificada como PG e determine sua razão. Resposta esperada: A partir do 2º termo, ao dividir um termo qualquer dessa sequência pelo seu antecessor, obtemos uma constante denominada razão.

c) Calcule o limite da soma dos termos dessa sequência. Resposta: $\frac{2}{3}$.

d) Represente essa sequência numérica no plano cartesiano. Veja a seguir a resposta deste item.



CBOOK PRODUÇÕES

Páginas 40 a 42

Integrando

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**; da competência específica **5** e das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC. Além disso, propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia.

Ao explorar a ideia de demografia, falar sobre o AiBi, um método matemático utilizado pelo IBGE que visa estimar, por proporção, a população de pequenas áreas a partir da população de grandes áreas.

No gráfico que apresenta a população aproximada do Brasil, destacar para os estudantes que a partir de 2020 os dados são estimativas. Argumentar com eles que métodos para realizar estimativas, associados à Demografia, foram construídos a partir de contextos que permitiam o pluralismo de ideias e a investigação científica. Nesse sentido, espera-se que os estudantes reconheçam a importância do respeito a diferentes ideias e concepções para o desenvolvimento do conhecimento científico e para a sociedade.

» Pensando no assunto

1. Essa questão trabalha as impressões dos estudantes a respeito da Demografia. Se julgar necessário, sugerir aos estudantes que realizem pesquisas sobre esse tema, listando diferentes objetivos da Demografia.

2. Essa questão trabalha as experiências dos estudantes associadas à contagem da população do município onde moram. Para complementar, propor que eles pesquisem a população oficial do município em que moram no ano vigente.

3. Essa questão trabalha a interpretação de um gráfico de segmentos. Questionar os estudantes sobre esse tipo de gráfico ser mais indicado para representar dados com essa natureza. Espera-se que eles reconheçam que os gráficos de segmentos possibilitam representar os dados obtidos em uma pesquisa de maneira a facilitar a observação de como tais dados se comportam ou variam no decorrer do tempo.

4. Essa questão trabalha a ideia de PA e de PG em situações envolvendo modelos demográficos. É interessante que esse trabalho seja realizado em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Para viabilizar uma abordagem multidisciplinar, uma sugestão é que as ideias matemáticas que sustentam cada modelo de crescimento apresentado por Malthus (populacional e da produção de alimentos) sejam também analisadas de maneira crítica por meio de questões relacionadas à geografia humana, de modo que sejam discutidas características sociais associadas a tais modelos, buscando valorizar o convívio social republicano junto à sociedade e o respeito e reconhecimento às diferenças.

5. Essa questão trabalha a ideia de PA e de PG em um contexto envolvendo a utilização de métodos aritméticos e geométricos para estimar a população de certo município. Para complementar, solicitar aos estudantes que escolham um ano, diferente dos apresentados e de 2070, e que calculem a estimativa da população desse município utilizando ambos os métodos.

6. Essa questão trabalha uma investigação para estimar a população para o ano 2060 em um município. Para pesquisar a população atual do município em que residem, os estudantes podem consultar o *site* do IBGE ou do município. No item **c**, eles podem divulgar o texto com as informações pesquisadas por meio de vídeos, *slides*, cartazes etc.

» Pensando em um projeto

O tema trabalhado nessa seção possibilita uma ampliação por meio da realização de um projeto em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Uma sugestão é que se promova uma apresentação à comunidade escolar sobre o crescimento populacional do município ao longo do tempo e as projeções para os próximos anos. Para isso, organizar os estudantes em grupos com até cinco integrantes. Em seguida, podem ser elaboradas as seguintes fases:

1. Pesquisa em livros ou *sites* de instituições com o objetivo de identificar a população do município, em diferentes anos, desde sua fundação até projeções para os próximos anos.
2. Investigação de situações que possam ter influenciado na variação da população ao longo do tempo, como o fluxo migratório.

3. Análise da variação da população ao longo do tempo, em algum período, verificando se pode ser modelada por meio do método aritmético ou geométrico.
4. Com base nas estimativas da população para os próximos anos, elaboração de propostas de adequações de serviços públicos do município, como a possível necessidade de construções de escolas ou unidades básicas de saúde para atender a demanda.
5. Organização das informações coletadas e das produções em um relatório, que pode ser apresentado à comunidade escolar e divulgado em redes sociais.

Ao final do projeto, é importante avaliar a participação individual e coletiva dos estudantes na realização de cada fase do projeto proposto. Na parte geral destas **Orientações para o professor** há informações sobre a realização de projetos.

Páginas 43 e 44

Noções de linguagem de programação

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Verificar se os estudantes conseguem reconhecer que as linguagens de programação não são utilizadas apenas em computadores, mas também em outros aparelhos eletrônicos como micro-ondas, televisores etc.

Explicar aos estudantes que um fluxograma pode ser compreendido como um esquema que representa um algoritmo. Nesse momento, perguntar se eles se lembram de outras tarefas que podem ser descritas como sequências de passos ordenados.

Páginas 45 a 47

» Atividades

71. Essa atividade trabalha a utilização de um fluxograma para determinar se um número natural é par ou ímpar. Questionar os estudantes sobre a necessidade do uso de diferentes figuras para compor um fluxograma.

72. Essa atividade trabalha o uso de fluxograma em uma situação envolvendo gestão de pessoas de uma empresa. Para complementar, perguntar aos estudantes se eles acham que o fluxograma é uma boa estratégia para selecionar os funcionários de uma empresa.

73. Essa atividade trabalha o uso de fluxograma para determinar os termos de uma sequência. Para complementar, pedir aos estudantes que determinem o 7º termo dessa sequência (173).

74. Essa atividade trabalha o uso de algoritmo para descrever as etapas de construção de um polígono. Para complementar, propor aos estudantes que tentem reordenar os passos indicados de maneira que a figura obtida ao final seja mantida. Espera-se que, nesse caso, eles percebam que não é possível alterar a ordem dos passos para a construção do hexágono regular.

75. Essa atividade trabalha o uso de algoritmo para descrever as etapas de construção de polígonos regulares. Para complementar, propor aos estudantes que troquem o algoritmo que elaboraram com um colega para que cada um deles construa o triângulo equilátero seguindo as etapas descritas pelo outro.

76. Essa atividade trabalha a ideia de fluxograma em um contexto de demandas do cálculo de massa de tilápias de acordo com critérios estabelecidos. Para auxiliar na resolução, questionar os estudantes sobre qual é a primeira decisão a ser tomada para definir o destino das tilápias (se a tilápia tem até 350 g de massa).

77. Essa atividade trabalha a ideia de fluxograma para determinar os termos de uma sequência. Caso os estudantes apresentem dificuldade para resolvê-la, sugerir que inicialmente identifiquem se a sequência apresentada é uma PA ou uma PG (nesse caso, uma PA).

78. Essa atividade trabalha a ideia de fluxograma para descrever as etapas de realização de uma tarefa do dia a dia. Propor que os grupos troquem o fluxograma que elaboraram e que cada grupo descreva, por meio de um texto, a tarefa que é realizada de acordo com o fluxograma que recebeu.

79. Essa atividade trabalha uma pseudolinguagem de programação chamada Portugol. É importante que os estudantes, em grupo, reconheçam as características dessa linguagem. Para complementar, solicitar que realizem uma pesquisa sobre essa linguagem de programação.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter mais informações sobre o Portugol.

- LABORATÓRIO DE INOVAÇÃO TECNOLÓGICA NA EDUCAÇÃO. **Portugol Studio**. Disponível em: http://lite.acad.univali.br/pt/portugol-studio/. Acesso em: 7 set. 2020.

Páginas 48 e 49

Linguagem de programação

Nessas páginas trabalha-se com a introdução de uma linguagem específica de programação: o Scratch. Espera-se que os estudantes consigam reconhecer as principais características dessa linguagem e que a utilizem para diferentes finalidades.

Verificar a possibilidade de levar os estudantes ao laboratório de informática e propor que utilizem o Scratch para reproduzir o algoritmo apresentado na página **48**. Salientar que, ao abrir o Scratch, é possível que o comando **Use a caneta** não esteja disponível. Nesse caso, é necessário clicar no botão **Adicionar uma extensão**, no canto inferior esquerdo da tela, e adicionar a categoria **Caneta**.

Páginas 50 e 51

» Atividades

80. Essa atividade trabalha a condição de existência de triângulos utilizando a linguagem de programação Scratch. No item **b**, existem infinitas possibilidades de resposta. Dessa maneira, propor aos estudantes que compartilhem as respostas com os demais colegas da turma, que devem avaliar se estão corretas.

81. Essa atividade trabalha ideias de PA e de PG utilizando a linguagem de programação Scratch. Após a resolução, questionar os estudantes qual seria a razão dessa PA ($r = 45 - 34 = 56 - 45 = 11$).

82. Essa atividade trabalha a representação do contorno de polígonos regulares utilizando a linguagem de programação Scratch. No boxe **Para pensar**, comentar com os estudantes que o ângulo de giro do personagem (60°) é suplementar àquele correspondente ao ângulo interno (120°) da figura construída.

83. Essa atividade trabalha o conceito de PG utilizando a linguagem de programação Scratch. Na sequência não recursiva indicada no item **c**, verificar se os estudantes notaram que devem inicialmente obter a_1 e, em seguida, escrever a fórmula do termo geral dessa PG.

84. Essa atividade trabalha o conceito de função utilizando a linguagem de programação Scratch. Verificar se os estudantes compreenderam que o comando **II** corresponde ao cálculo de $f(10)$. Como complemento, pedir a eles que calculem o valor numérico da função f para alguns valores de x.

85. Essa atividade trabalha a representação de algoritmos em uma planilha eletrônica. Destacar outras ferramentas da planilha eletrônica, como aquela para inserir uma fórmula entre algumas apresentadas, por exemplo, a contagem de números; a determinação da soma de um conjunto de dados etc.

86. Essa atividade trabalha a elaboração de um fluxograma utilizando a linguagem de programação Scratch. Alguns exemplos de conceitos matemáticos que podem ser abordados pelos estudantes são: sequência; PA; PG; média aritmética; polígonos; entre outros. Verificar a possibilidade de realizar um *workshop* no qual cada dupla apresenta o fluxograma construído.

Páginas 52 e 53

Você conectado

O trabalho com esta seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **5** e das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Nessa seção, espera-se que os estudantes consigam relacionar o estudo de PA com o uso de uma planilha eletrônica.

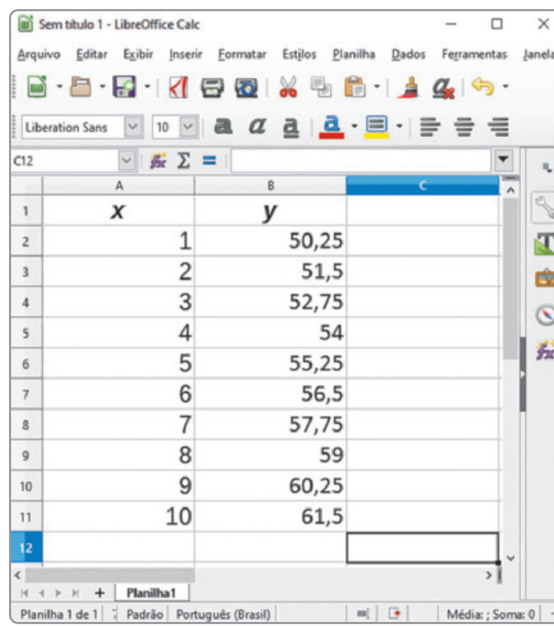
Solicitar aos estudantes que reproduzam as etapas **A** e **B** na planilha **LibreOffice Calc**. Nesse momento, auxiliá-los na realização dessas etapas e pedir que confiram se os valores digitados estão corretos. Em cada etapa, é importante chamar a atenção dos estudantes na indicação das fórmulas, inclusive no uso de parênteses e dois-pontos, por exemplo.

Mãos à obra

1. Essa questão trabalha a determinação do termo geral de uma PA e a construção de um gráfico para representar os termos dessa PA em uma planilha eletrônica. No item **b**, auxiliar os estudantes na construção desse gráfico, conforme os procedimentos descritos a seguir.

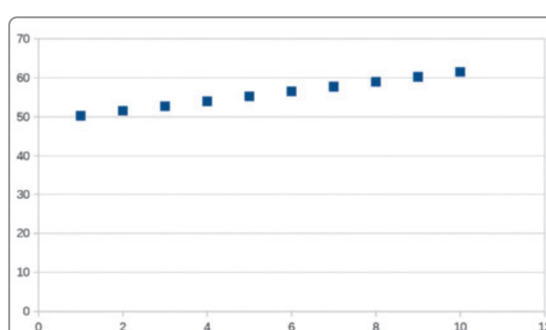
- Selecionar as células de **A2** a **B11**.
- Clicar na opção **Inserir gráfico**.
- Na caixa de diálogo **Assistente de gráficos**, selecionar as opções **XY(Dispersão)** e **Somente pontos**.
- Clicar em **Concluir**.

Veja a seguir a resposta do item **b**. Nesse gráfico, as escalas dos eixos estão diferentes.



	A	B
1	x	y
2	1	50,25
3	2	51,5
4	3	52,75
5	4	54
6	5	55,25
7	6	56,5
8	7	57,75
9	8	59
10	9	60,25
11	10	61,5

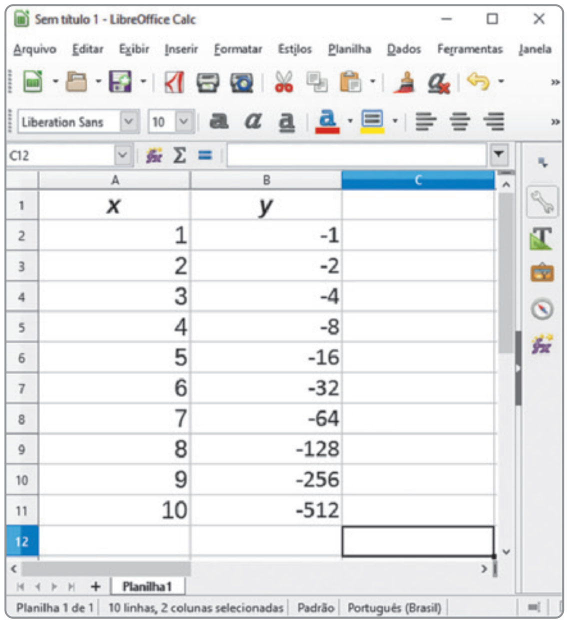
LIBREOFFICE CALC



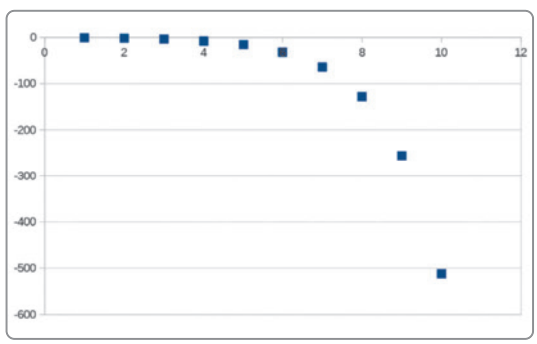
LIBREOFFICE CALC

2. Essa atividade trabalha a determinação do termo geral de uma PG e a construção de um gráfico para representar os termos dessa PG em uma planilha eletrônica. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem a_{15} $(-1 \cdot 2^{15-1} = -16\,384)$.

Veja a seguir a resposta do item **b**. Nesse gráfico, as escalas dos eixos estão diferentes.



LIBREOFFICE CALC



LIBREOFFICE CALC

Páginas 54 e 55

O QUE ESTUDEI

1. As respostas dos estudantes podem ser registradas de modo que se construa um histórico que permita ser acompanhado ao longo do ano letivo. Com isso, é possível identificar em quais itens cada estudante demonstra avanço e quais devem ser mais bem trabalhados. Com base nas respostas dos estudantes é possível localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, na descrição dessa seção, estratégias que possam auxiliá-los no desenvolvimento da aprendizagem.

2. Com base nos conceitos que os estudantes indicaram ser necessário retomar para compreendê-los melhor, é possível organizar um estudo dirigido com a turma. Mais informações sobre esse estudo estão disponíveis na parte geral destas **Orientações para o professor**, na descrição dessa seção.

3. Nessa questão, é importante valorizar as produções dos grupos e possibilitar o compartilhamento de tais produções. É interessante que todos os conceitos listados na questão anterior sejam contemplados nas produções.

4. Nessa questão são retomadas informações sobre *stop-motion*. No item **a**, auxiliar os estudantes a determinar os cinco primeiros termos da sequência e orientá-los a classificar a sequência formada em PA ou PG. No item **b**, são retomados conceitos de sequência e de linguagem de programação. Para o item **c**, propor uma roda de conversa para que os estudantes possam compartilhar suas produções.

Relações métricas e trigonometria no triângulo

Nesta Unidade, busca-se favorecer, em diferentes momentos, a valorização dos conhecimentos historicamente construídos como meios para que os sujeitos atuem de diferentes maneiras em sociedade, exercendo os respectivos papéis enquanto seres humanos, em um contexto de respeito à pluralidade de ideias. Tais conhecimentos, de natureza física, social, cultural ou digital, possibilitam o desenvolvimento de argumentações críticas associadas ao conhecimento matemático, como na compreensão da acessibilidade enquanto iniciativa social que busca promover a equidade entre as pessoas e a valorização dos direitos humanos.

As propostas interdisciplinares, o uso de tecnologias digitais e os diferentes contextos, possibilitam o desenvolvimento de reflexões acerca das Ciências e suas técnicas, como um corpo de conhecimento que é influenciado pelas necessidades humanas e caracterizado pela sua dinamicidade e pelo desenvolvimento de argumentações, em uma linguagem específica, como na discussão sobre métodos científicos e nas propostas de investigação envolvendo elaboração de conjectura e sua demonstração matemática.

Para o planejamento desta Unidade, alguns conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio podem ser retomados previamente, como semelhança de triângulos, perímetro, área, progressão aritmética e outros que estão indicados, quando necessário, nos comentários destas **Orientações específicas para este Volume**. Além disso, é importante desenvolver parcerias com professores de outras áreas do conhecimento em algumas abordagens. Por exemplo, no trabalho relacionado à energia solar, na exploração da ideia de grandeza vetorial e de grandeza escalar e na discussão dos ângulos de rebatimento do ponto de vista da ótica, é possível contar com o auxílio de professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

É importante destacar a autonomia do professor quanto à reorganização dos conteúdos propostos nesta Unidade, de acordo com as características das turmas e seus níveis de conhecimento prévio. Por exemplo, a seção **Você conectado**, que aborda a verificação da lei dos senos no **GeoGebra**, pode ser explorada durante o estudo das leis do seno e do cosseno.

Páginas 56 e 57

Abertura de Unidade

O trabalho com essa abertura de Unidade favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC e propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia, já que possibilita um trabalho caracterizado pela análise de métodos científicos, promovendo o desenvolvimento de reflexões associadas ao processo de construção do conhecimento científico.

Aproveitar o tema dessas páginas, que será retomado na página **58**, e na seção **O que estudei**, e promover uma roda de conversa com os estudantes, questionando-os se já pensaram a respeito dos diferentes métodos que podem ser utilizados na Ciência. Destacar a responsabilidade dos cientistas em utilizarem métodos científicos em suas pesquisas por meio da realização de algumas etapas, de modo que o conhecimento a ser compartilhado seja bem fundamentado. Ressaltar que, compartilhar as descobertas e os conhecimentos com a sociedade é um dos grandes papéis da Ciência.

A apresentação dos exemplos de aplicação do método científico pode ser acompanhada por um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visto que envolvem conceitos de Biologia e Física. Assim, em parceria com esse professor, pode-se planejar para a aula uma discussão de outros exemplos de aplicação dos métodos científicos indutivo e dedutivo, com os estudantes organizados em pequenos grupos.

No exemplo apresentado, na 1ª etapa do método científico indutivo, perguntar aos estudantes se sabem o que significa "mata ciliar".

Para ampliar

Ler para os estudantes o trecho a seguir sobre mata ciliar.

> [...]
>
> As matas que recobrem as margens dos rios e de suas nascentes recebem o nome popular de **matas ciliares**. Esse nome surgiu da comparação entre a proteção dos cílios aos olhos e o papel protetor das matas quanto aos corpos-d'água.
>
> As matas ciliares também são conhecidas por formações florestais ribeirinhas, matas de galeria, florestas ciliares e matas ripárias.
>
> No Brasil, as matas ciliares estão presentes em todos os biomas: cerrado, mata atlântica, caatinga, floresta amazônica, pantanal e pampa. Portanto, é de se imaginar a imensa diversidade de plantas e animais que compõem tais matas nos diferentes biomas. [...]

MATAS ciliares. **Sistema Integrado de Gestão Ambiental**. Disponível em: https://sigam.ambiente.sp.gov.br/sigam3/Default.aspx?idPagina=6481. Acesso em: 14 jul. 2020.

Na 4ª etapa do método científico indutivo, questionar os estudantes sobre que ações podem ser tomadas após a conclusão obtida pela engenheira. É importante que eles percebam a necessidade de denunciar, aos órgãos públicos, irregularidades associadas à mata ciliar.

Na 1ª etapa do método científico dedutivo, apresentar aos estudantes informações sobre a lei da gravitação universal, como o fato de ter sido criada por Isaac Newton a partir das leis de Kepler. Ressaltar que Newton também foi um dos responsáveis pela criação do Cálculo Diferencial e Integral, que possibilitou que essa e muitas outras teorias fossem consideradas como verdadeiras. Comentar que essa legitimidade permite que o cientista tome as ideias dessa lei como premissa.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter mais informações sobre a lei da gravitação universal.

- NEWTON e a gravitação. **e-física**, c2007. Disponível em: http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/gravitacao/newton. Acesso em: 14 jul. 2020.

A seguir, são apresentadas as respostas dos itens propostos nessa seção.

- Resposta esperada: No método indutivo, o objetivo é determinar um resultado generalizado a partir de um caso particular e, no método dedutivo, é obter um resultado particular a partir de premissas mais gerais, tidas como verdadeiras e amplamente aceitas.
- Resposta esperada: São realizadas observações, estabelecida uma hipótese e desenvolvidas experimentações a fim de validar a hipótese e obter um resultado geral (conclusão). São definidas premissas consideradas verdadeiras e, a partir delas, são utilizados argumentos formais lógicos e válidos a fim de se obter um resultado também verdadeiro para uma situação específica.
- Resposta pessoal.

No primeiro item proposto, questionar os estudantes sobre as diferenças entre os dois métodos científicos e solicitar que pensem em exemplos para cada um deles.

No segundo item, é importante que os estudantes reconheçam a diferença entre as naturezas das conclusões. Ressaltar que, embora tenham validade em termos do conhecimento científico, ambas são obtidas por processos diferentes (uma baseada na experimentação e a outra, na consideração de premissas verdadeiras).

No terceiro item, os estudantes podem recorrer a experiências anteriores. Se julgar conveniente, solicitar a eles que se organizem em grupos para discutir sobre esse item e descrever as etapas a ser desenvolvidas.

Páginas 58 a 60

Teorema de Tales

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Para ampliar

Para complementar, ler para os estudantes o trecho a seguir que apresenta mais informações sobre Tales de Mileto.

> Na natureza, todas as coisas estão interligadas: o céu e o mar, a terra e o ar, animal, pedra e vegetal, planetas e humores. Na ciência, tal como na natureza, matemática e música, geometria e biologia, anatomia e mineralogia se comunicam mutuamente. Tales de Mileto, o primeiro filósofo grego, dizia que *tudo é um* e que a água é a origem de todas as coisas. Também no Oriente, a música era considerada a fonte da ciência. As ciências eram vertentes que se encontravam no mesmo campo. Isso valia tanto para gregos como para chineses.

BRASIL. Biblioteca Nacional Digital. **Tudo é um**. Disponível em: https://bndigital.bn.gov.br/exposicoes/gabinete-de-obras-maximas-e-singulares/tudo-e-um. Acesso em: 14 jul. 2020

Caso seja necessário, para que os estudantes compreendam a verificação da validade do teorema de Tales, retomar os conceitos de congruência de triângulos e proporcionalidade, estudados em anos anteriores.

No trabalho com as informações da página **59**, explicar aos estudantes que:

- $\overline{AB}$ se refere a um segmento de reta com extremidades em A e B;
- AB se refere à medida do segmento de reta com extremidades em A e B.

Relembrar os estudantes que um paralelogramo é um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos.

Após a resolução pelos estudantes do questionamento proposto no boxe **Para pensar** da página **60**, sugerir que façam na prática a divisão dos segmentos de reta com as medidas indicadas utilizando instrumentos de desenho, como régua e compasso.

Para complementar, realizar um debate com a turma, propondo o seguinte questionamento.

- Considerando a última figura apresentada no caso **2**, em que situações a medida y pode ser igual à medida x? Resposta esperada: Quando ambas as retas concorrentes forem perpendiculares às retas paralelas.

Páginas 61 e 62

» Atividades resolvidas

R1. Essa atividade trabalha a aplicação do teorema de Tales para calcular a medida de um dos segmentos de reta formados por um feixe de retas paralelas e retas transversais.

Para complementar, apresentar outra proporção que poderia ter sido considerada para resolver o item **a**, como o exemplo sugerido a seguir.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{x + \frac{8}{3}} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{\frac{3x + 8}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 8 = 5x \Rightarrow x = 4$$

» Atividades

1. Essa atividade trabalha a aplicação do teorema de Tales para calcular a medida de um dos segmentos de reta formados por um feixe de retas paralelas e retas transversais. Comentar com os estudantes que as figuras apresentadas nos itens não estão proporcionais entre si. No item **b**, solicitar que determinem quais os segmentos de reta formados nas retas transversais u e v, a fim de auxiliá-los a determinar uma das proporções (reta u: segmentos de medida x e 3; reta v: segmentos de medida 4 e 6).

2. Essa atividade trabalha a resolução de uma situação envolvendo o teorema de Tales. Relembrar os estudantes que a área do triângulo é expressa por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, em que b e h correspondem às medidas da base e da altura desse triângulo, respectivamente. Verificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolvê-la e propor que ao menos um deles a apresente para os colegas da turma.

3. Essa atividade trabalha a resolução de uma situação envolvendo o teorema de Tales. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem os coeficientes a, b e c da equação do 2º grau obtida ao estabelecerem uma das proporções entre as medidas indicadas ($a = 5$; $b = -29$; $c = 20$).

4. Essa atividade trabalha a aplicação do teorema de Tales em uma situação que envolve a construção de um muro. Para complementar, solicitar aos estudantes que estimem um preço para a construção de cada metro linear desse muro, o que pode ser feito com apoio de uma pesquisa na internet ou de algum profissional da construção civil ao qual eles tenham acesso. Em seguida, propor a eles que calculem o preço estimado de custo para a construção desse muro.

5. Essa atividade trabalha a aplicação do teorema de Tales em uma situação que envolve a construção de uma cerca em um terreno. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem, também, o perímetro de cada lote ($5 + 3 + 3{,}4 + 8{,}6 = 20 \rightarrow 20$ km; $8{,}6 + 2 + 10{,}84 + 1{,}36 = 22{,}8 \rightarrow 22{,}8$ km).

6. Essa atividade trabalha a elaboração de um problema envolvendo o teorema de Tales. É importante avaliar se os problemas elaborados pelos estudantes contemplam as ideias relacionadas ao conceito proposto. Ao final, alguns desses problemas elaborados podem ser reproduzidos na lousa e discutidos com a turma.

Página 63

Semelhança de polígonos

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC, além disso propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Ciência e Tecnologia ao serem explorados os formatos de vídeo (tela).

Ao trabalhar as informações sobre os formatos de vídeo, argumentar com os estudantes que esses formatos também podem ser chamados de *aspect ratio*. Existe uma calculadora *on-line*, indicada no boxe **Conexões** a seguir, que pode ser utilizada para determinar proporções específicas ao redimensionar fotos ou vídeos de acordo com os formatos de tela de equipamentos que utilizamos no dia a dia, como celulares, *tablets*, monitores, entre outros.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* (em inglês) para utilizar uma calculadora *on-line* e obter o redimensionamento de fotos e vídeos.

- ASPECT RATIO CALCULATOR. Disponível em: https://andrew.hedges.name/experiments/aspect_ratio. Acesso em: 15 jul. 2020.

Propor aos estudantes que pesquisem a tradução do termo *widescreen* (panorâmico).

Ao definir semelhança de polígonos, discutir com os estudantes que a mesma ideia também pode ser utilizada para semelhança de figuras quaisquer. Intuitivamente, duas figuras planas são semelhantes quando possuem o mesmo formato, independentemente do tamanho. Argumentar que o significado da palavra "semelhante" na Língua Portuguesa é diferente do significado matemático. Na Língua Portuguesa, semelhante pode ser considerado como sinônimo de parecido. Na Matemática, duas figuras parecidas não são necessariamente semelhantes.

Páginas 64 a 67

Semelhança de triângulos

Inicialmente, apresentar aos estudantes informações sobre o pantógrafo, instrumento criado no início do século XVII pelo astrônomo Christoph Scheiner, cuja principal função é ampliar ou reduzir figuras, mantendo seu formato.

Destacar que o estudo da semelhança de triângulos possivelmente já foi proposto em anos anteriores. Com isso, é importante que sejam resgatadas as experiências de cada estudante. Destinar um tempo para que eles comentem a respeito desse conceito, manifestando suas impressões e possíveis dificuldades.

É importante que os estudantes consigam interpretar e compreender a necessidade de estabelecer os casos de semelhança de triângulos, no sentido de serem importantes em algumas situações, como quando não é possível obter a medida dos lados de um triângulo ou quando essas medidas não são apresentadas.

No primeiro boxe **Para Pensar** da página **64**, organizar a turma em grupos de três estudantes. É interessante que os grupos sejam compostos por estudantes com perfis distintos, de maneira que seus diferentes níveis de conhecimento prévio e habilidades possam contribuir no diálogo e na cooperação entre eles para realizar o trabalho proposto. Salientar que as demonstrações possuem grande importância na Matemática. Por meio delas, as proposições matemáticas são consideradas socialmente verdadeiras. Aproveitar essa discussão para associá-la ao tema da abertura dessa Unidade, argumentando que a maioria das demonstrações matemáticas utiliza o método dedutivo. Sugerir aos estudantes que apresentem as demonstrações por meio de *slides*.

Teorema fundamental da semelhança

Argumentar com os estudantes que é possível traçar retas paralelas aos lados AC e AB do triângulo ABC, de maneira a verificar a validade do teorema apresentado.

» Atividade resolvida

R3. Essa atividade trabalha semelhança de polígonos em uma situação que envolve um jogo de sinuca. A resolução apresentada nessa atividade utiliza ideias da resolução de problemas, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor.** Para complementar, conversar com os estudantes sobre o tema dessa atividade, junto com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que poderá auxiliar com a proposta de experimentos e a utilização de argumentos próprios de sua área, a respeito dos ângulos de incidência e rebatimento obtidos do ponto de vista da ótica. Lembrar os estudantes de que, para determinar o lado correspondente ao lado BC no triângulo PQL, é preciso considerar o ângulo oposto ao lado BC e, em seguida, o ângulo congruente a esse no triângulo PQL e o lado a ele oposto. Nesse caso, o lado PQ.

» Atividades

7. Essa atividade trabalha a semelhança de polígonos e o cálculo da razão de semelhança entre eles. Para complementar, propor aos estudantes que justifiquem por que consideram que os paralelogramos são (ou não) semelhantes entre si.

8. Essa atividade trabalha a identificação de pares de triângulos semelhantes entre si. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem a razão de uma semelhança entre os triângulos, quando possível (**a** e **c**: 2; **b** e **e**: 5).

9. Essa atividade trabalha a resolução de uma situação envolvendo semelhança de triângulos. Para complementar, solicitar o cálculo da razão de semelhança entre o triângulo menor e o triângulo maior $\left(\frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$.

10. Essa atividade trabalha o teorema fundamental da semelhança em um contexto envolvendo escada rolante. Para complementar, solicitar a um dos estudantes que reproduza na lousa o desenho feito no item **a**.

11. Essa atividade envolve a exploração de tipos de formato de tela associados à ideia de semelhança de polígonos. Para complementar, propor aos estudantes que pesquisem exemplos de produtos digitais que possuem tela nos formatos de DVD padrão ou *widescreen*. Solicitar a eles que comparem os produtos e apresentem essa comparação por meio de *slides*.

12. Essa atividade trabalha a elaboração de um problema envolvendo semelhança de figuras e formatos de tela. É importante avaliar se os problemas elaborados pelos estudantes contemplam as ideias relacionadas aos conceitos propostos. Ao final, alguns desses problemas elaborados podem ser reproduzidos na lousa e discutidos com a turma.

Páginas 68 a 72

Relações métricas no triângulo retângulo

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Comentar com os estudantes que o estudo das relações métricas no triângulo retângulo já foi abordado em anos anteriores. Assim, solicitar que eles apresentem suas experiências e dificuldades sobre essas relações.

Ao demonstrar que o triângulo DBA é semelhante ao triângulo DAC, argumentar com os estudantes que essa conclusão só pode ser tomada por conta da propriedade transitiva, que é válida para semelhança de triângulos.

Na prática

Organizar os estudantes em três grupos e propor que cada grupo investigue uma das propriedades a seguir, válidas para semelhança de triângulos. Ao final, pedir que os grupos exponham na lousa suas conclusões.

Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades:

a) Reflexiva: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$

b) Simétrica: $\Delta ABC \sim \Delta RST \Leftrightarrow \Delta RST \sim \Delta ABC$

c) Transitiva: $\left.\begin{matrix}\triangle ABC \sim \triangle RST \\ \triangle RST \sim \triangle XYZ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

Fonte dos dados: DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar**: geometria plana. São Paulo: Atual Editora, 2013. p. 194.

» Atividades resolvidas

R4. Essa atividade trabalha relações métricas em um triângulo retângulo. Na resolução do item **a**, comentar com os estudantes por que não convém, nesse caso, considerar o valor negativo. Argumentar que o valor determinado para *a* corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo e que, por ser uma medida, não faz sentido representá-la por meio de um valor negativo.

R5. Essa atividade trabalha as relações métricas no triângulo em um contexto sobre a diagonal da tela de um televisor associado à unidade de medida polegada. Questionar os estudantes se já ouviram falar dessa unidade de medida e destinar um tempo para que eles relatem suas experiências.

» Atividades

13. Essa atividade trabalha relações métricas em triângulos retângulos. Para complementar, verificar as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver o item **b,** selecionar duas resoluções distintas (que utilizem diferentes relações métricas) e apresentar para o restante da turma.

14. Essa atividade trabalha relações métricas em um triângulo retângulo. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem a área do triângulo *ABC* $\left(A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{45 \cdot 21{,}6}{2} = 486;\ 486\ \text{m}^2\right)$.

15. Essa atividade trabalha relações métricas em um triângulo retângulo. Para complementar, propor aos estudantes que representem a figura desse triângulo.

16. Essa atividade trabalha relações métricas em um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência. Caso os estudantes tenham dúvidas, lembrá-los de que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$. Argumentar que π pode ser expresso pela razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Comentar que essa relação é válida para qualquer circunferência.

17. Essa atividade trabalha o cálculo de termos de uma PA e relações métricas em um triângulo retângulo. Caso os estudantes tenham dúvidas, retomar com eles o estudo de PA tratado na Unidade **1** neste Volume.

18. Essa atividade trabalha uma exploração geométrica do teorema de Pitágoras. Antes de os estudantes resolverem os itens propostos, apresentar outros exemplos de ternos pitagóricos, como os indicados a seguir.

- 9, 12 e 15;
- 5, 12 e 13;
- 8, 15 e 17.

Perguntar a eles por que esses podem ser considerados ternos pitagóricos (são números naturais que podem representar as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo). No item **a**, solicitar aos estudantes que considerem outros dois números inteiros correspondentes às medidas dos catetos e realizem uma verificação geométrica análoga à apresentada, a fim de auxiliá-los a reconhecer que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Para ampliar

Antes de os estudantes resolverem o item **c** da atividade **18**, propor a seguinte questão para que a resolvam em grupos.

- Em uma malha quadrilhada ou em um *software* de geometria dinâmica como o **GeoGebra**, construam um triângulo retângulo com catetos medindo 3 cm e 4 cm e hipotenusa medindo 5 cm. Em seguida, construam um triângulo equilátero sobre cada um dos lados do triângulo retângulo e calculem a área de cada um desses triângulos. O que vocês puderam perceber em relação às áreas obtidas? Resposta esperada: A área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.

Ao final, explorar com os estudantes essa ideia e dizer que essa relação entre as áreas de figuras construídas sobre lados de um triângulo retângulo não é válida apenas para quadrados. Propor que investiguem outras possíveis figuras que podem ser utilizadas nessa verificação geométrica do teorema de Pitágoras.

No item **c**, é importante avaliar se os problemas elaborados pelos estudantes contemplam as ideias relacionadas aos conceitos propostos. Ao final, alguns desses problemas elaborados podem ser reproduzidos na lousa e discutidos com a turma.

Páginas 73 e 74

Relações trigonométricas no triângulo retângulo

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **1**; da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias; e da competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC, além disso propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Educação em Direitos Humanos. Antes de iniciar a discussão sobre as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), realizar uma roda de conversa com os estudantes, de maneira a problematizar a importância de diretrizes gerais a ser estabelecidas para garantir, ao maior número de pessoas, a utilização dos espaços de maneira autônoma.

Dizer que a criação dessas diretrizes possibilita promover a equidade, a valorização dos direitos humanos e a garantia da acessibilidade. Possibilitar aos estudantes que reconheçam que esse tipo de iniciativa promove o respeito a diferentes pessoas, a acessibilidade, o combate à violência e a valorização da saúde mental.

Explicar aos estudantes que a norma NBR 9050 da ABNT estabelece critérios e parâmetros voltados à acessibilidade em edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos.

Ao mencionar as nomenclaturas "cateto oposto" e "cateto adjacente", dizer que essa classificação é estabelecida de acordo com o ângulo de referência. Considerando o triângulo *ADE* na página **73**, por exemplo, caso o ângulo de referência fosse em $A\hat{D}E$ em vez de α, o cateto oposto seria o lado *AE*, enquanto o cateto adjacente seria o lado *DE*.

Se necessário, retomar com os estudantes o caso de semelhança de triângulos AA (ângulo, ângulo), discutido anteriormente.

Antes de trabalhar as nomenclaturas seno, cosseno e tangente, solicitar aos estudantes que construam, em uma malha quadriculada ou em um *software* de geometria dinâmica como o **GeoGebra**, um triângulo retângulo *ABC*, destacando o ângulo reto e um ângulo interno α. Em seguida, solicitar que construam segmentos de reta paralelos ao cateto oposto a α, de maneira a obter triângulos semelhantes ao triângulo *ABC*. Por fim, considerando os diferentes triângulos retângulos obtidos, pedir a eles que determinem a razão entre as medidas do:

- cateto oposto a α e da hipotenusa;
- cateto adjacente a α e da hipotenusa;
- cateto oposto a α e do cateto adjacente a α.

O objetivo é que os estudantes percebam que essas razões são sempre iguais e que eles atribuam significados a essas razões, reconhecendo, com o trabalho desse tópico, a necessidade da criação da trigonometria.

Para ampliar

Para complementar, ler para os estudantes o trecho a seguir sobre a origem da trigonometria.

> [...]
>
> A trigonometria foi uma criação da Matemática grega, e recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia. [...]

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p. 135.

Página 75

» Atividades resolvidas

R6. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo, de maneira a introduzir tais relações para ângulos notáveis de 30° e de 60°. Para complementar, propor aos estudantes que construam, em um *software* de geometria dinâmica como o **GeoGebra**, um triângulo retângulo com um ângulo interno medindo 60° e lados de medidas quaisquer. Depois, que obtenham as medidas dos lados e determinem as razões seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30° e 60°. A intenção é que eles verifiquem, na prática, que os resultados são iguais àqueles obtidos na atividade.
Em cada boxe **Para pensar**, caso os estudantes apresentem dificuldades, solicitar que determinem a razão entre sen 30° e cos 30° e que, em seguida, comparem o resultado obtido com tg 30°, perguntando o que é possível observar $\left(\text{que tg } 30° \text{ corresponde à razão tg } 30° = \dfrac{\text{sen } 30°}{\cos 30°}\right)$.
Solicitar que procedam de maneira análoga para o ângulo de 60°.

R7. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo, de maneira a introduzir tais relações para o ângulo notável de 45°. Para complementar, no item **b**, solicitar aos estudantes que justifiquem o ângulo $B\hat{C}A$ medir 45° (a diagonal do quadrado corresponde à bissetriz do ângulo de 90°).

Página 76

» Atividades

19. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Para complementar, propor aos estudantes que determinem o seno, o cosseno e a tangente do outro ângulo agudo do triângulo *ABC* [$\text{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha \simeq 0{,}58$; $\cos(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \simeq 0{,}81$; $\text{tg}(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \simeq 0{,}71$].

20. Essa atividade trabalha semelhança de triângulos e relações trigonométricas em um triângulo retângulo.
Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem a razão de semelhança entre o triângulo *DEF* e o triângulo *ABC* $\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

21. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em triângulos retângulos. Para complementar, solicitar que aos estudantes que determinem $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$, para $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$ e $\alpha = 60°$. A ideia é que os estudantes percebam que o resultado dessa expressão é sempre igual a 1.

22. Essa atividade trabalha semelhança de triângulos e relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Para complementar, propor aos estudantes os seguintes questionamentos.
- Quantas alturas podemos estabelecer em um triângulo? Resposta: Em um triângulo podemos estabelecer três alturas, que são relativas a cada um de seus lados.
- Se um triângulo for retângulo, o que é possível dizer sobre suas alturas? Resposta esperada: Quando um triângulo é retângulo, duas de suas alturas coincidem com dois de seus lados.

23. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto de vôlei de praia. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem sen α e cos α ($\text{sen}\,\alpha \simeq 5 : 6{,}19 \simeq 0{,}81$; $\cos\alpha \simeq 3{,}65 : 6{,}19 \simeq 0{,}59$).

24. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo isósceles. Verificar se os estudantes compreendem que os ângulos internos de um triângulo retângulo isósceles medem 45°, 45° e 90°. Como complemento, propor que ao menos um dos estudantes compartilhe com os demais colegas da turma a estratégia utilizada para resolver essa atividade.

25. Essa atividade trabalha a representação de um triângulo retângulo pelos estudantes com uso de instrumentos de desenho e relações trigonométricas nesse triângulo. Verificar os procedimentos utilizados pelos estudantes na representação de um triângulo retângulo e solicitar a um deles que apresente como fez para o restante da turma, a fim de auxiliar aqueles que tiverem alguma dificuldade.

Páginas 77 e 78

Tabela trigonométrica

Para ampliar

Antes de iniciar o trabalho com as informações dessas páginas, realizar a leitura do seguinte texto para os estudantes.

Por cerca de dois séculos, de 460 a. C. a 276 a. C., os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas, círculos e ângulos para resolver problemas da astronomia. Embora esses estudos fossem importantes para esse fim, por meio deles, não foi possível sistematizar e registrar uma trigonometria que pudesse ser utilizada por outros matemáticos ou astrônomos. Posteriormente, aproximadamente na segunda metade do segundo século a. C., o astrônomo Hiparco de Niceia registrou a primeira tabela trigonométrica, cujo impacto permanece até hoje. Cláudio Ptomoleu, possivelmente, utilizou a tabela de Hiparco como referência para a composição de uma nova tabela, que em essência, fornece os senos dos ângulos de 0° a 90°.

Fontes dos dados: BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 118.
EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 203.

Páginas 79 a 82

» Atividade resolvida

R9. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto sobre a bandeira do Rio Grande do Sul.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter mais informações sobre a bandeira do Rio Grande do Sul.

- RIO GRANDE DO SUL. Governo do Estado. **Símbolos**. Disponível em: https://estado.rs.gov.br/simbolos. Acesso em: 21 jul. 2020.

» Atividades

26. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em triângulos retângulos. Comentar com os estudantes que os triângulos não estão representados proporcionalmente entre si. Para complementar, solicitar a eles que determinem, para cada triângulo, a medida dos ângulos internos que não foram indicados (**a**: 45°; **b**: 70°).

27. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em triângulos retângulos para determinar a medida de seus ângulos internos. Comentar com os estudantes que os triângulos não estão representados proporcionalmente entre si. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem, para cada triângulo, a medida dos lados que não foram indicadas (**a**: 40 cm; **b**: aproximadamente 37,74 dm).

28. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto associado à topografia. Verificar se os estudantes sabem o que é um teodolito. Explicar que o teodolito é um instrumento ótico utilizado para realizar medições de ângulos.

29. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto associado à decolagem de um avião. Para complementar, solicitar a um estudante que reproduza na lousa a figura que representou no item **a** e que outro estudante apresente a resolução do item **b**, explicando as estratégias que utilizaram para os colegas.

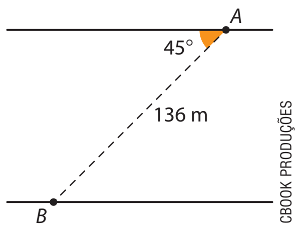
30. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto sobre uma ponte construída em estrutura estaiada. Para complementar, apresentar aos estudantes o significado dos seguintes termos.

- Ponte estaiada: tipo de ponte suspensa por cabos, geralmente de aço. É constituída por mastros e tabuleiro.
- Mastros: torres das quais partem os cabos de sustentação em direção ao tabuleiro.
- Tabuleiro: pavimento da ponte.

31. Essa atividade trabalha a aplicação de relações trigonométricas em triângulos retângulos em um contexto que envolve as normas de acessibilidade da ABNT. Caso os estudantes tenham dúvida no item **b**, apresentar como exemplo quais medidas indicadas nos esboços de projeto no item **a** correspondem ao desnível: 90 cm, 95 cm e 100 cm. Para o item **c**, propor a elaboração de uma apresentação dos resultados investigados por meio de vídeos, cartazes, fôlderes ou *slides*. Em seguida, essa apresentação pode ser divulgada para a turma ou em uma exposição no pátio da escola. Lembrá-los de utilizar uma linguagem acessível, de maneira que todos possam compreender.

32. Essa atividade trabalha a aplicação de relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto associado à escada rolante de um *shopping center*. Para complementar, solicitar a um estudante que reproduza na lousa o desenho que representou no item **a** e que outros dois estudantes apresentem a resolução dos itens **b** e **c**, a fim de explicarem as estratégias que utilizaram para os demais colegas.

33. Essa atividade trabalha a aplicação de relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto envolvendo a largura de um lago. Para complementar, solicitar aos estudantes que representem essa situação por meio de uma figura. Espera-se que eles obtenham uma representação como a apresentada a seguir.



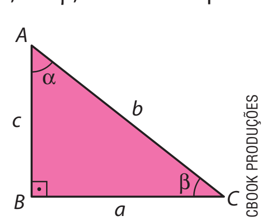
34. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em uma situação que envolve ângulo de visão. Caso os estudantes tenham dificuldades, sugerir que representem a situação apresentada por meio de uma figura e que determinem, inicialmente, a altura do edifício.

35. Essa atividade trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em um contexto envolvendo sombras projetadas no solo por raios solares. Destacar para os estudantes os comprimentos das sombras (9 m, 18 m e 15 m) e as medidas correspondentes dos ângulos formados pelos raios solares com o solo (aproximadamente 59°, aproximadamente 40° e 45°). Argumentar que o comprimento de uma sombra e a medida do ângulo formado pelos raios solares com o solo não são grandezas diretamente proporcionais, ou seja, se dobrarmos o comprimento da sombra, as medidas dos ângulos não serão necessariamente dobradas também.

36. Essa atividade trabalha a aplicação de relações trigonométricas em um triângulo retângulo em uma situação que envolve a construção de uma rampa. Discutir com os estudantes sobre o ângulo de inclinação da rampa, que deve ter medida entre 29° e 37°. Comentar que, quanto menor o ângulo, menor o desnível entre os dois pisos. Quanto maior o ângulo, maior o desnível entre os dois pisos e, consequentemente, maior desempenho é exigido dos carros para se locomover do estacionamento para o piso térreo.

37. Essa atividade trabalha a investigação de conjecturas por meio de uma tabela trigonométrica. Para complementar, apresentar aos estudantes a demonstração de pelo menos uma das conjecturas que podem ser exploradas, por exemplo, $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$, com $0° < \alpha < 90°$.

- Demonstração: Seja um triângulo ABC, com lados medindo a, b e c, com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e ângulos internos medindo 90°, α e β, conforme representado a seguir.



Assim, tem-se que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$ e $\cos\beta = \dfrac{a}{b}$.

Portanto, $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$. Como $\beta = 90° - \alpha$, segue que: $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$ para $0° < \alpha < 90°$.

38. Essa atividade trabalha as relações trigonométricas em triângulos retângulos na exploração de um contexto associado à energia solar.

Para ampliar

Para complementar, ler para os estudantes o trecho a seguir sobre coordenadas geográficas.

> Para que cada ponto da superfície da Terra pudesse ser localizado no mapa, foi criado um sistema de linhas imaginárias chamado Sistema de Coordenadas Geográficas. A coordenada geográfica de um determinado ponto da superfície da Terra é obtida pela interseção de um meridiano e um paralelo.
>
> Os meridianos são linhas imaginárias que cortam a Terra no sentido norte-sul, ligando um polo ao outro. Os paralelos são linhas imaginárias que circulam a Terra no sentido leste-oeste. Paralelos e meridianos são definidos por suas dimensões de latitude e longitude, respectivamente.
>
> Os paralelos nos indicam a latitude, que é a distância, em graus, da linha do Equador até o paralelo de um determinado lugar. Os valores da latitude variam de 0° (linha do Equador) a 90° (polos), devendo ser indicada também a posição: no hemisfério sul (S) ou no hemisfério norte (N).
>
> A longitude é a distância, em graus, entre o meridiano de origem e o meridiano local. Por convenção, adotou-se como origem o Meridiano de Greenwich (que passa pelo observatório de Greenwich na Inglaterra).
>
> [...]

IBGE. Coordenadas Geográficas. **Atlas escolar**, 2020. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/coordenadas-geogra-ficas.html. Acesso em: 21 jul. 2020.

Aproveitar essa temática para desenvolver com os estudantes, se julgar conveniente, um projeto em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, sobre o tema: sustentabilidade do uso da energia solar. Explorar questões sociais, geográficas, físicas, biológicas e matemáticas associadas a esse tema. Desenvolver o projeto de modo que, ao final, os estudantes produzam fôlderes de divulgação para conscientizar os demais colegas da escola ou a comunidade local a respeito dos benefícios do uso da energia solar. Com relação ao item **d**, promover uma roda de conversa para que os estudantes manifestem suas opiniões e justificativas para a pergunta proposta.

39. Essa atividade trabalha a demonstração de uma relação trigonométrica. Comentar que essa propriedade é válida para ângulos de medida qualquer. Dizer que ela será estudada com mais detalhes na Unidade **3** deste Volume.

Páginas 83 a 85

Integrando

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento das competências gerais

1, **2** e **7**; da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Inicialmente, questionar os estudantes sobre o termo acessibilidade e sua importância para que manifestem suas impressões e opiniões relacionadas ao tema. É importante que, neste momento, seja discutido o fato de que a acessibilidade procura promover o respeito e a equidade entre as pessoas, de maneira que seus direitos e suas necessidades especiais sejam considerados.

» Pensando no assunto

1. Essa questão trabalha o reconhecimento da importância da acessibilidade. Comentar que todos os seres humanos possuem um papel na manutenção da acessibilidade, como, por exemplo, não utilizar vagas de estacionamento reservadas para idosos ou pessoas com deficiência quando não se faz parte desse público.
2. Essa questão explora as experiências dos estudantes sobre o tema acessibilidade. Para complementar, perguntar a eles por que é importante seguir as normas de acessibilidade na construção de uma rampa, por exemplo (Respostas possíveis: Porque é necessário garantir a segurança dos usuários; porque pode facilitar o trajeto de subida ou descida; porque pode evitar constrangimentos e até acidentes graves etc.).
3. Essa questão explora o uso do *site* **Guia Turismo Acessível**. Comentar com os estudantes que eles podem divulgar esse *site* nos ambientes que frequentam, de maneira que mais pessoas possam contribuir com sua melhoria.
4. Essa questão trabalha o cálculo da inclinação de uma rampa e a verificação se essa rampa atende ao padrão da norma NBR 9050 da ABNT. Para complementar, solicitar aos estudantes que considerem outra altura de desnível e avaliem se, para 10 m de projeção horizontal, essa rampa atende ao padrão da norma NBR 9050.
5. Essa questão trabalha relações trigonométricas em um triângulo retângulo em uma situação em que deve ser considerada a norma NBR 9050. Nesse sentido, destacar para os estudantes a importância da trigonometria para a arquitetura e para a engenharia.
6. Sugere-se que essa questão seja desenvolvida, em grupos, de acordo com etapas da modelagem matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**, que podem ser organizadas, para essa situação, da seguinte maneira:
   - 1ª) Reconhecimento/definição da situação-problema. Nesse momento, os estudantes reconhecem a situação-problema que se associa ao cumprimento da norma NBR 9050 para rampas no município em que moram.
   - 2ª) Elaboração de hipóteses. Nesse momento, os estudantes elaboram hipóteses, considerando as experiências e os conhecimentos que possuem a respeito das rampas no município em que moram. É importante que eles considerem quais rampas podem permitir uma análise mais aprofundada e que antecipem possíveis resultados que podem surgir.
   - 3ª) Exploração da situação-problema. Esse é o momento de investigação dos estudantes. A partir das hipóteses elaboradas na etapa anterior, os estudantes investigam informações relacionadas às rampas consideradas, buscando resolver a situação-problema.
   - 4ª) Determinação do modelo matemático. Nessa etapa, os estudantes buscam organizar as informações obtidas na etapa anterior por meio de tabela, gráfico, esquema etc. A ideia é organizar as informações para que sejam apresentadas ou divulgadas a outras pessoas, a fim de que possam compreendê-las com mais facilidade.
   - 5ª) Discussão dos resultados. Nessa etapa, os grupos apresentam aos demais colegas os resultados que obtiveram.

No item **b**, comentar sobre a determinação da altura de desnível ser de até 0,8 m, pois, para alturas maiores do que essa, é necessário ter mais de um lance de rampa ou reduzir o ângulo de inclinação máxima. Verificar cada rampa escolhida pelos grupos, orientando-os para que não avaliem uma mesma rampa, de maneira que sejam analisados o maior número de rampas possível.

» Pensando em um projeto

O tema trabalhado nessa seção possibilita uma ampliação por meio da realização de um projeto em parceria com um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias. Uma sugestão é que se promova uma exposição de fotografias sobre a acessibilidade no município em que está localizada a escola. Para isso, podem ser elaboradas as seguintes fases:

1. Compreensão da importância da acessibilidade para a promoção dos direitos humanos.
2. Discussão sobre quais possíveis lugares do município são acessíveis ou não.
3. Investigação de lugares do município que são ou não acessíveis, fotografando-os de maneira que sejam apresentados, posteriormente, em uma exposição. Nesta fase, um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias pode contribuir no processo de planejamento, realização e edição das fotografias.
4. Elaboração de um plano para o dia de exposição na escola. É importante que todas as fotografias tenham uma legenda com informações gerais sobre elas: local, data, elemento relacionado à acessibilidade etc.
5. Realização da exposição na escola, que pode ser aberta à comunidade.

Ao final do projeto, é importante avaliar a participação individual e coletiva dos estudantes na realização de cada fase do projeto proposto. Na parte geral destas **Orientações para o professor**, há informações sobre a realização de projetos.

Páginas 86 e 87

Relações trigonométricas em um triângulo qualquer

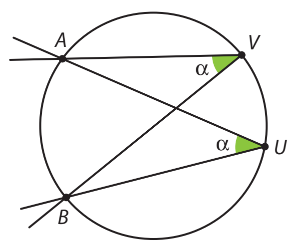
O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC. Destacar aos estudantes que esse tópico aborda, entre outros aspectos, o cálculo do seno, do cosseno e da tangente de ângulos obtusos.

Discutir com os estudantes que, anteriormente, o estudo do seno, cosseno e tangente era associado a triângulos retângulos. Por esse motivo, os ângulos considerados eram sempre maiores do que 0° e menores do que 90°. Dizer que o estudo das razões trigonométricas pode ser estendido para um triângulo qualquer, estabelecendo a lei dos senos, por exemplo.

Lei dos senos

Na demonstração da lei dos senos, se necessário, retomar alguns conceitos, como os apresentados a seguir.

- Chama-se ângulo inscrito em uma circunferência todo ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e os lados passam por outros pontos distintos dela.
- Um ângulo inscrito em uma circunferência possui vértice em *V*, lados que passam pelos pontos *A* e *B* e medida α, sendo *V*, *A* e *B* pontos sobre essa circunferência. Se outro ângulo inscrito nessa mesma circunferência possui vértice em *U*, distinto de *V*, e lados que passam pelos mesmos pontos *A* e *B*, então este ângulo também possui medida α.



CBOOK PRODUÇÕES

Páginas 88 a 92

» Atividades resolvidas

R10. Essa atividade trabalha a aplicação da lei dos senos para determinar um dos ângulos internos de um triângulo. Para complementar, comentar que sen 135° também é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois sen 45° = sen (180° − 45°).

R11. Essa atividade trabalha a lei dos senos em um contexto associado à topografia. Comentar com os estudantes que a lei dos senos é essencial para o cálculo de medidas inacessíveis, como na situação apresentada.

» Atividades

40. Essa atividade trabalha a lei dos senos e o cálculo do perímetro de uma figura geométrica plana. Relembrar os estudantes de que o perímetro de uma figura geométrica plana corresponde ao comprimento de seu contorno.

41. Essa atividade trabalha a lei dos senos em um contexto associado à largura de um rio. Para resolver o item **b**, solicitar aos estudantes que troquem com um colega a figura que representaram no item **a** e a considerem para determinar a distância solicitada.

42. Essa atividade trabalha a lei dos senos em um contexto envolvendo sinalizações de segurança no mar. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem a distância do ponto *C* até a boia $\left(\frac{250}{\text{sen } 50°} = \frac{BC}{\text{sen } 72°} \Rightarrow BC \simeq 310 \rightarrow \text{aproximadamente } 310 \text{ m}\right)$.

43. Essa atividade trabalha a determinação das medidas dos ângulos internos de um triângulo por meio da lei dos senos. Caso os estudantes tenham dificuldades, comentar que uma estratégia de resolução é determinar uma das medidas dos ângulos internos utilizando a lei dos senos e, para a outra medida, levar em conta a ideia de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

44. Essa atividade trabalha a elaboração de um problema envolvendo a lei dos senos. É importante avaliar se os problemas elaborados pelos estudantes contemplam as ideias relacionadas ao conceito proposto. Ao final, alguns desses problemas elaborados podem ser reproduzidos na lousa e discutidos com a turma. Destacar aos estudantes que eles podem propor um problema que, por falta de dados no enunciado, não seja possível resolver. Por exemplo, de acordo com o contexto escolhido, pode-se descrever uma região modelada por um triângulo em que seja identificado apenas a medida de dois lados, apenas a medida de um lado e de um ângulo interno ou apenas a medida de dois ângulos internos. É importante, nesse caso, que o estudante que receber o problema identifique a falta de dados do enunciado e faça sugestões de ajustes de maneira a tornar possível sua resolução.

45. Essa atividade trabalha a lei dos senos em um contexto envolvendo *drones*. Para complementar, perguntar aos estudantes se eles já viram um *drone* e, em caso afirmativo, pedir que comentem suas experiências com ele.

46. Essa atividade trabalha a lei dos senos em um contexto de robótica. Comentar com os estudantes que a sequência de comandos a ser executada pelo robô, representada por um fluxograma, pode ser interpretada como um algoritmo, conforme tratado na Unidade **1** deste Volume.

47. Essa atividade trabalha a lei dos senos e as propriedades de um paralelogramo. Caso necessário, relembrar os estudantes de que todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo.

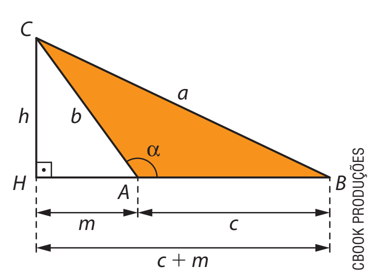
48. Essa atividade trabalha a lei dos senos em um contexto associado ao mapa da região metropolitana de Porto Alegre (RS). Para complementar, solicitar aos estudantes que pesquisem informações sobre o delta do Jacuí e sua importância para a região de Porto Alegre.

Lei dos cossenos

Após a realização da demonstração da lei dos cossenos para triângulos acutângulos, apresentar aos estudantes as demonstrações da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos.

- **Triângulo obtusângulo**

Seja o triângulo *ABC*, cujos lados medem *a*, *b* e *c*, e o ângulo obtuso α em *A*. Traçando a altura do triângulo relativa ao lado *AB*, são obtidas as medidas *m* e *h*, conforme representado a seguir.



Como os triângulos *BCH* e *ACH* são retângulos, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras e obter as seguintes equações:

- $h^2 + (c + m)^2 = a^2$
- $h^2 + m^2 = b^2$

Subtraindo, membro a membro, essas duas equações, segue que:

$(c + m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 + 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad$ (I)

E, ainda, tem-se que o ângulo $H\hat{A}C$ é suplementar ao ângulo α, ou seja, possui medida igual a $(180° - \alpha)$. Assim:

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{m}{b}$$

Como $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, segue que $\cos\alpha = -\frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos\alpha$.
Substituindo *m* na equação **I**, tem-se que:

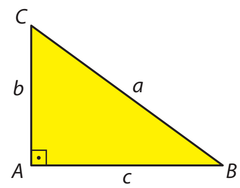
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

De maneira análoga, pode-se verificar que:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$

- **Triângulo retângulo**

  Seja um triângulo retângulo *ABC*, com lados de medidas *a*, *b* e *c* e ângulo reto α em *A*.



CBOOK PRODUÇÕES

Como o triângulo *ABC* é retângulo, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90° = 0$, pode-se escrever a equação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90°$$

» Atividades resolvidas

R12. Essa atividade trabalha a utilização da lei dos cossenos para determinar a medida de um ângulo interno de um triângulo. Para complementar, solicitar aos estudantes que utilizem a lei dos senos para determinar as medidas dos outros ângulos desse triângulo $\left(\frac{43,8}{0,97} = \frac{30}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow \hat{C} \simeq 42°; \frac{43,8}{0,97} = \frac{40}{\text{sen }\hat{A}} \Rightarrow \hat{A} \simeq 62°\right)$.

Página 93

» Atividades

49. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos para determinar a medida de um dos ângulos internos de um triângulo. Para complementar, comentar com os estudantes que o triângulo representado, além de ser obtusângulo, é escaleno.

50. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos para a determinação da medida de um dos lados de um triângulo. Para complementar, solicitar aos estudantes que classifiquem esse triângulo em: acutângulo, obtusângulo ou retângulo (acutângulo).

51. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos em um contexto que envolve localização de helicópteros por radares. Para complementar, solicitar aos estudantes que pesquisem radares *on-line* com os quais seja possível acompanhar voos de helicópteros ou aviões em tempo real.

52. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos e o conceito de progressão aritmética. Caso os estudantes tenham dificuldades, questioná-los sobre quantos termos possui a PA mencionada (3 termos).

53. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos em um contexto envolvendo grandezas vetoriais. Verificar a possibilidade de se desenvolver essa atividade em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Pode-se planejar, por exemplo, uma proposta para que os estudantes realizem pesquisas em pequenos grupos sobre diferentes grandezas vetoriais e escalares. Explicar a eles que grandezas escalares são aquelas representadas, apenas, por um valor numérico (módulo) e uma unidade, como massa, temperatura, energia, entre outras. No item **a**, discutir com os estudantes sobre a diferença entre módulo, direção e sentido. Dizer que módulo é o valor numérico do vetor, cuja unidade é definida pela natureza da grandeza vetorial. A direção associa-se à posição que se encontra o vetor, se está na diagonal, vertical ou horizontal. O sentido refere-se à orientação do vetor, se está orientado para norte, sul, leste, oeste, direita, esquerda, para cima, para baixo etc. Nos itens **b**, **c** e **d**, argumentar que o vetor resultante corresponde à soma de dois vetores, ou seja, em álgebra vetorial, a soma de dois vetores é, também, um vetor.

Páginas 94 e 95

Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT308** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Nessa seção é importante que os estudantes consigam investigar a lei dos senos utilizando o **GeoGebra**. Por meio dessa tecnologia digital, eles podem produzir significado para essa relação trigonométrica, que foi sistematizada no decorrer do estudo desta Unidade.

Na etapa **A**, caso julgar necessário, relembrar com os estudantes como construir polígonos com a opção **Polígono**.

Na etapa **B**, explicar aos estudantes que, na fórmula, α e *a* correspondem a medidas do ângulo e do lado oposto a esse ângulo do triângulo construído na etapa anterior. Salientar aos estudantes que, ao construírem esses objetos no **GeoGebra**, é importante que mantenham as nomenclaturas correspondentes na fórmula inserida. Dizer que eles podem modificar os rótulos desses objetos de acordo com o lado e ângulo oposto tomados como referência. Para isso, basta que selecionem o objeto, cliquem com o botão direito do *mouse* e, em seguida, escolham a opção **Renomear**.

Mãos à obra

1. Para complementar essa questão, comparar com os estudantes a demonstração da lei dos senos realizada anteriormente nesta Unidade, e sua verificação para um triângulo construído no **GeoGebra** nesta seção. Explicar que uma demonstração valida um resultado de maneira generalizada, enquanto uma verificação valida esse resultado apenas para um caso específico.
2. Essa questão trabalha a verificação da lei dos senos para um triângulo qualquer no **GeoGebra**.
3. Essa questão trabalha a verificação da lei dos cossenos para um triângulo qualquer no **GeoGebra**. Para complementar, escolher uma dupla de estudantes para apresentar a verificação que realizaram aos demais colegas.
4. Sugerir aos estudantes que elaborem um fluxograma para descrever as etapas para verificar cada uma das relações apresentadas.

Páginas 96 e 97

O QUE ESTUDEI

1. As respostas dos estudantes podem ser registradas de modo que se construa um histórico que permita ser acompanhado ao longo do ano letivo. Com isso, é possível identificar em quais itens cada estudante demonstra avanço e quais devem ser mais bem trabalhados. Com base nas respostas dos estudantes é possível localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, na descrição dessa seção, estratégias que possam auxiliá-los no desenvolvimento da aprendizagem.
2. Com base nos conceitos que os estudantes indicaram ser necessário retomar para compreendê-los melhor, é possível organizar um estudo dirigido com a turma. Mais informações sobre esse estudo estão disponíveis na parte geral destas **Orientações para o professor**, na descrição dessa seção.
3. Nessa questão, é importante valorizar as produções dos grupos e possibilitar o compartilhamento delas. É interessante que todos os conceitos listados na questão anterior sejam contemplados nas produções.
4. Essa questão trabalha informações sobre métodos científicos. No item **a**, apresentar a seguinte dica aos estudantes: geralmente, em uma proposição matemática do tipo "se *p*, então *q*", o que antecede o "então" é considerado como premissa e o que sucede o "então" é considerado como conclusão. Nos itens **b** e **c**, são trabalhadas relações métricas no triângulo retângulo e o teorema de Tales. No item **d**, auxiliar os estudantes de maneira que identifiquem a premissa (k é a razão de semelhança entre dois quadrados) e a conclusão na proposição apresentada (a razão entre as áreas desses quadrados é k^2).

Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas

Nesta Unidade, busca-se favorecer, em diferentes momentos, a valorização dos conhecimentos historicamente construídos como suporte para a ação humana, contribuindo para uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Tais conhecimentos, de natureza física, social, cultural ou digital, possibilitam o desenvolvimento de argumentações críticas a esse respeito, que se associam ao conhecimento matemático, como na discussão sobre o contexto das marés, enquanto fenômeno que influencia o cotidiano de populações litorâneas.

As propostas interdisciplinares, o uso de tecnologias digitais e os diferentes contextos favorecem o desenvolvimento de reflexões acerca das ciências e suas técnicas, como um corpo de conhecimento que é influenciado pelas necessidades humanas e caracterizado, essencialmente, pela dinamicidade, como nos trabalhos que envolvem a associação do conhecimento matemático aos conceitos de pressão arterial, poema, ondas sonoras, ciclo menstrual, duração solar do dia, entre outros.

Para o planejamento desta Unidade, alguns conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio podem ser retomados previamente, como perímetro, área, relações trigonométricas no triângulo retângulo, progressão aritmética e outros que estão indicados, quando necessário, nos comentários destas **Orientações específicas para este Volume**. Além disso, é importante a parceria com professores de outras áreas do conhecimento em algumas abordagens. Por exemplo, no trabalho sobre as ondas sonoras e a pressão arterial é possível contar com o suporte de professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, enquanto na proposta da composição de um poema relacionado a conceitos matemáticos, é interessante a participação de um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias.

É importante destacar a autonomia do professor quanto à reorganização dos conteúdos propostos nesta Unidade, de acordo com as características das turmas e seus níveis de conhecimento prévio. Por exemplo, a seção **Você conectado**, que trata dos parâmetros de uma função do tipo trigonométrica, pode ser explorada ao abordar o estudo de funções trigonométricas.

Páginas 98 e 99

Abertura de Unidade

O trabalho com essa abertura de Unidade propicia uma abordagem do Tema Contemporâneo Transversal Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras, uma vez que trata do estudo da cultura indígena e problematiza as características distintas das moradias em aldeias de diferentes povos indígenas.

Aproveitar o tema dessas páginas, que será retomado na página **100** e na seção **O que estudei**, e promover um momento de discussão com os estudantes, de modo que eles explicitem seus conhecimentos prévios sobre moradia indígena.

Comentar com os estudantes que a maneira como os indígenas se referem aos "não indígenas" pode variar de acordo com o povo. Sugerir aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre os termos mais adequados utilizados pelos indígenas para se referir à diversidade de pessoas e compartilhem as informações obtidas com os demais colegas da turma.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter informações sobre a maneira como os indígenas se referem aos "não indígenas".

- MIRIM. Povos Indígenas no Brasil. **Quem são os brancos?** Disponível em: https://mirim.org/quem-sao-os-brancos. Acesso em: 27 jul. 2020.

A seguir, são apresentadas as respostas aos itens propostos nessa seção.

- Resposta pessoal.
- Respostas pessoais.
- Resposta esperada: Círculo com aproximadamente 100 m de raio.

O primeiro item proposto desenvolve reflexões sobre os povos indígenas. É importante, nesse momento, realizar uma discussão com os estudantes, de maneira a desconstruir possíveis concepções estereotipadas dos povos indígenas.

Conexões

Este livro apresenta conceitos importantes relacionados aos povos indígenas.

- FUNARI, P. P.; PIÑON, A. **A temática indígena na escola**: subsídios para os professores. São Paulo: Contexto, 2011.

O segundo item trabalha as experiências locais dos estudantes com a cultura indígena. É importante ressaltar aos estudantes a importância de a pesquisa ser realizada em *sites* de fontes de informações confiáveis.

O terceiro item trabalha a associação entre a disposição das moradias na aldeia kaikoturé e o conceito de círculo. Nesse momento, é importante identificar conhecimentos prévios dos estudantes relacionados a esse conceito, como as ideias de circunferência, centro, raio, diâmetro etc.

Página 100

Circunferência

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

Na apresentação das informações dessa página, argumentar que círculo é uma figura geométrica distinta da circunferência. A circunferência corresponde à linha que limita o círculo. Já o círculo é formado pela circunferência e por todos os pontos de seu interior.

Ao explicitar aos estudantes o conceito de circunferência, explicar a eles que, em muitas situações, a ideia de circunferência é utilizada como ferramenta para resolver problemas relacionados a objetos equidistantes a um ponto, caracterizando-a como lugar geométrico.

Lembrar os estudantes de que, para qualquer circunferência, a medida de seu comprimento dividida pela medida de seu diâmetro corresponde a um mesmo número irracional denominado π (lê-se pi).

No boxe **Para pensar**, verificar se os estudantes compreenderam que o diâmetro é um caso particular de corda, ou seja, todo diâmetro é uma corda, mas nem toda corda é um diâmetro.

Páginas 101 a 105

Arcos e ângulos em uma circunferência

Ao trabalhar as informações da página **101**, verificar a possibilidade de planejar e realizar a aula em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com o objetivo de discutir sobre arquitetura românica e outros estilos de arquitetura. Para isso, pode-se pedir aos estudantes que se organizem em pequenos grupos e pesquisem elementos históricos relacionados a esses estilos arquitetônicos e elementos geométricos presentes nas construções.

Ao explorar a ideia de arco de circunferência, argumentar com os estudantes que dois arcos com mesmas extremidades podem ter medidas de comprimento distintas, como no caso dos arcos com extremidades nos pontos *A* e *B* na primeira figura de circunferência apresentada na página **101**. Essa observação é válida, também, para o ângulo central de uma circunferência, ou seja, dois arcos de circunferência com mesmas extremidades podem ter ângulos centrais correspondentes distintos.

Unidades de medida de ângulos e de arcos

Para o trabalho com as unidades de medida de ângulos e de arcos, é importante que os estudantes tenham compreendido as diferenças entre arcos e ângulos centrais em uma circunferência.

O questionamento proposto no boxe **Para pensar** da página **102** é importante para identificar se os estudantes compreenderam a diferença entre a medida angular e o comprimento de um arco de circunferência.

Retomar com os estudantes o conceito de ângulo, explicando que ele é formado por duas semirretas de mesma origem.

Após apresentar os submúltiplos do grau, propor aos estudantes a seguinte questão:

- A quantos segundos equivale 1°? Resposta: $1° = 60' = 60 \cdot 60'' = 3\,600''$.

Para complementar, comentar com os estudantes que não há consenso sobre a origem do uso da divisão da circunferência em 360 partes, o que determinou a unidade de medida de ângulo grau. Explicar que uma hipótese é que essa ideia esteja relacionada à duração do movimento de translação da Terra. Verificar a possibilidade de propor uma pesquisa sobre esse tema e, em uma roda de conversa com toda a turma, eles apresentam as informações obtidas.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter mais informações sobre o planeta Terra e os movimentos que ele realiza.

- DARROZ, L. M. O planeta Terra. **Astronomia**: conceitos iniciais. Porto Alegre: UFRGS-IF, 2010. Disponível em: https://lief.if.ufrgs.br/pub/cref/n20_Darroz/texto_terra.html. Acesso em: 27 jul. 2020.

» Atividades resolvidas

R2. Essa atividade trabalha a conversão da medida angular de um arco em graus para radianos. Para complementar, solicitar aos estudantes que escrevam uma expressão que relacione a medida angular de um arco de *x* graus em radianos. Observar como essa expressão pode ser obtida a partir da seguinte proporção:

Medida angular do arco, em graus	Medida angular do arco, em radianos
360	2π
x	y

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{y} \Rightarrow 360y = 2\pi \cdot x \Rightarrow y = \frac{2\pi \cdot x}{360} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x\pi}{180}$$

Assim, para converter a medida angular de um arco de 60° para radianos, segue que:

$$y = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}\text{, ou seja, } \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

» Atividades

1. Essa atividade trabalha o reconhecimento de elementos de uma circunferência. Para complementar, propor aos estudantes que, utilizando régua e compasso, construam uma circunferência de centro O e alguns de seus elementos, como: cordas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$; diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{IJ}$; raios $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{IO}$, $\overline{JO}$ e $\overline{KO}$.

2. Essa atividade trabalha o cálculo do comprimento de circunferências com base nas medidas do raio ou do diâmetro. Para complementar, solicitar aos estudantes que estabeleçam a medida do raio de uma circunferência e troquem-na com um colega, para que um calcule o comprimento da circunferência correspondente à medida do raio estabelecida pelo outro.

3. Essa atividade trabalha o cálculo da medida do raio com base no comprimento de circunferências. Para complementar, solicitar aos estudantes que estabeleçam o comprimento de uma circunferência e troquem-no com um colega, para que um calcule a medida do raio correspondente ao comprimento da circunferência estabelecida pelo outro.

4. Essa atividade trabalha a representação de circunferências de acordo com algumas de suas características. Para resolver os itens **b** e **c**, espera-se que os estudantes, inicialmente, determinem a medida do raio da circunferência. Nesse caso, 4 cm e 3,5 cm, respectivamente. Para complementar, apresentar o seguinte questionamento:

- Se dobrar a medida r do raio de uma circunferência, o que ocorre com seu comprimento C? Justifique. Resposta: O comprimento dessa circunferência dobra também, pois $2\pi \cdot (2r) = 2\,(2\pi r) = 2 \cdot C$.

5. Essa atividade trabalha, em uma situação contextualizada, o cálculo envolvendo o comprimento de uma circunferência. Caso os estudantes apresentem dificuldade em resolvê-la, conduzi-los a perceber que o comprimento de uma circunferência é diretamente proporcional à medida de seu raio. Assim, pode-se estabelecer relações entre a quantidade de giros da catraca **A** e das demais catracas.

6. Essa atividade trabalha a ideia de ampliação de uma circunferência. Para complementar, solicitar aos estudantes que construam uma circunferência utilizando um *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**, e que a ampliem, de maneira a avaliar o que acontece com a medida do raio correspondente.

7. Essa atividade trabalha relações envolvendo os comprimentos de semicircunferências. É importante que, para resolvê-la, os estudantes percebam que o comprimento da linha curva vermelha corresponde à soma dos comprimentos das semicircunferências que a compõem.

8. Essa atividade trabalha a conversão de medidas angulares de radianos para graus. Para complementar, propor aos estudantes que, utilizando régua, compasso e transferidor, esbocem um arco de circunferência correspondente à medida angular indicada em cada item.

9. Essa atividade trabalha o comprimento e a medida angular de arco de circunferência. Para complementar, solicitar aos estudantes que calculem o comprimento de um arco de circunferência cuja medida angular é 135° e o raio mede 10 cm $\left(\frac{135}{360} \cdot 2\pi \cdot 10 \simeq 23{,}55\text{; aproximadamente } 23{,}55 \text{ cm}\right)$.

10. Essa atividade trabalha a conversão de medidas angulares de graus para radianos. Para complementar, propor aos estudantes que expliquem, com suas palavras, como determinaram o resultado em cada item. Em seguida, propor os questionamentos a seguir.

- Quantos radianos tem um arco de 1°? Resposta: $\frac{\pi}{180}$ rad ou aproximadamente 0,0174 rad.
- Quantos graus tem um arco de 1 rad? Resposta: $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ ou aproximadamente 57,3248°.

11. Essa atividade trabalha, em um contexto envolvendo jogos de computador, o cálculo da medida angular de um arco de circunferência. Verificar as estratégias dos estudantes para resolver essa atividade. Eles podem, por exemplo, determinar inicialmente a medida angular do arco de circunferência em graus e, em seguida, convertê-la para radianos.

12. Essa atividade trabalha o cálculo do comprimento de um arco de circunferência com base no diâmetro da circunferência e da sua medida angular. Para complementar, discutir com os estudantes que o comprimento do arco depende da medida do raio da circunferência, ou seja, mesmo que dois arcos tenham mesma medida angular, eles podem ter comprimentos diferentes de acordo com a medida do raio da circunferência.

13. Essa atividade trabalha, em um contexto envolvendo uma obra de arte, a ideia de setor circular e o cálculo do perímetro de uma figura. Caso os estudantes apresentem dificuldade em resolver essa atividade, discutir que o contorno da figura apresentada pode ser decomposto em um arco de circunferência e dois segmentos de reta correspondentes a raios da circunferência. Para complementar, pedir aos estudantes que pesquisem as obras de Luiz Sacilloto (1924-2003) e a relação de algumas delas com ideias matemáticas, por exemplo, com transformações isométricas.

14. Essa atividade trabalha a demonstração de uma proposição matemática associada a arcos de circunferência. Para complementar, solicitar aos estudantes que argumentem a respeito de demonstrações em Matemática. É importante que eles percebam que essas demonstrações permitem validar proposições e propriedades matemáticas. Se julgar conveniente, retomar o trabalho com a abertura da Unidade **2** deste Volume.

Páginas 106 a 109

Ciclo trigonométrico

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Verificar se os estudantes compreenderam que as medidas angulares dos arcos são consideradas positivas no sentido anti-horário do ciclo trigonométrico.

Pedir aos estudantes que justifiquem com argumentos a seguinte proposição:

- No ciclo trigonométrico, um arco trigonométrico tem sua medida angular em radianos e seu comprimento numericamente iguais.

Uma resposta possível: O ciclo trigonométrico tem raio unitário, ou seja, com medida igual a 1 unidade de comprimento (1 u.c.). Além disso, um arco de medida angular 1 rad tem comprimento igual ao do raio da circunferência. Assim, no ciclo trigonométrico, um arco de medida angular 1 rad tem comprimento igual a 1 u.c.

Arcos côngruos

Inicialmente, solicitar aos estudantes que pesquisem o significado da palavra côngruo. Espera-se que eles observem que côngruo pode ser interpretado como sinônimo de congruente ou coerente.

Após discutir com os estudantes sobre as expressões que indicam as medidas angulares de arcos côngruos, propor a eles que retomem o boxe **Para pensar** apresentado na página **106** e verifiquem se as respostas indicadas estão corretas.

Números reais associados a pontos do ciclo trigonométrico

Discutir com os estudantes que essa associação entre medidas angulares de um arco trigonométrico e números reais é justificada pela proposição indicada anteriormente, em que, no ciclo trigonométrico, um arco trigonométrico tem sua medida angular em radianos e seu comprimento numericamente iguais. Essa ideia é importante para trabalhar as razões trigonométricas na circunferência, conteúdo que será tratado mais adiante nesta Unidade.

» Atividades resolvidas

R6. Essa atividade trabalha a determinação de números reais associados a um arco trigonométrico. Verificar se os estudantes compreenderam que a estratégia utilizada na resolução consiste em determinar o número real associado ao arco côngruo correspondente à 1ª determinação positiva do arco representado e, em seguida, os números reais associados aos demais arcos côngruos cuja medida angular deve ser maior do que 0 rad e menor do que 10π rad.

» Atividades

15. Essa atividade trabalha o cálculo da medida angular de um arco trigonométrico correspondente à 1ª determinação positiva de um arco dado. Para complementar, sugerir aos estudantes que, utilizando instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc.), escolham dois dos itens propostos e representem o arco trigonométrico cuja medida angular foi obtida. Para conferir as resoluções, os estudantes podem trocar entre si as representações que fizeram.

16. Essa atividade trabalha a associação entre arcos côngruos no ciclo trigonométrico e números reais. Para complementar, propor aos estudantes que componham mais dois itens análogos aos apresentados, sendo um com a unidade de medida em graus e outro, expressa em radianos. Em seguida, pedir a eles que troquem os itens elaborados com um colega para que um resolva os do outro e, ao final, confiram juntos as resoluções.

17. Essa atividade trabalha a determinação de uma expressão que descreva os arcos côngruos de um arco trigonométrico dado. Destacar para os estudantes que há diferentes maneiras de apresentar essas expressões. Por exemplo, no item **a**, pode-se apresentar as seguintes expressões: $315° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$; $675° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$; $-45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para complementar, propor aos estudantes que, utilizando a expressão que escreveram, determinem dois arcos côngruos ao apresentado em cada item e, ao final, comparem com os de alguns colegas.

18. Essa atividade trabalha a representação de um ciclo trigonométrico e de arcos trigonométricos. Para complementar, sugerir aos estudantes que escrevam uma expressão que determine os arcos côngruos aos arcos trigonométricos cuja medida angular estão indicadas. Neste caso, para o arco de 1 250°, eles podem escrever a expressão $170° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$; e para o arco de $-\frac{35\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

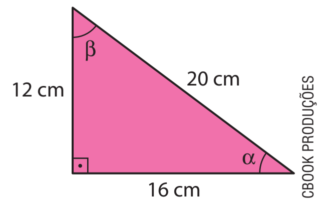
19. Essa atividade trabalha a associação entre um contexto envolvendo a roleta de um jogo de tabuleiro e a ideia de ciclo trigonométrico. Para a resolução dessa atividade, orientar os estudantes de maneira que compreendam que, de um giro para o seguinte, o jogador ajusta a posição inicial do ponteiro para o número 1 da roleta.

20. Essa atividade trabalha a associação entre o conceito de polígono regular e a ideia de ciclo trigonométrico. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem a medida angular do arco de circunferência $\overset{\frown}{ABH}$ e expressem a resposta em graus e em radianos $\left(315° \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \text{ rad}\right)$.

Páginas 110 a 112

Seno, cosseno e tangente de um arco no ciclo trigonométrico

Antes de apresentar as informações dessas páginas, é importante retomar com os estudantes as relações trigonométricas no triângulo retângulo, conteúdo tratado na Unidade **2** deste Volume. Para isso, propor aos estudantes que calculem o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos internos agudos do triângulo retângulo representado a seguir.



Nesse caso, tem-se que: sen $\alpha = 0{,}6$; sen $\beta = 0{,}8$; cos $\alpha = 0{,}8$; cos $\beta = 0{,}6$; tg $\alpha = 0{,}75$; tg $\beta = \frac{4}{3}$.

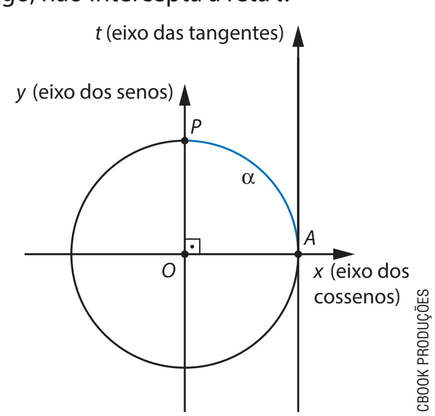
Seno e cosseno de um arco trigonométrico

Caso os estudantes tenham dúvidas sobre os valores do seno e do cosseno de um arco trigonométrico, relembrá-los de que o ciclo trigonométrico tem raio unitário e centro na origem $O(0, 0)$ do sistema de eixos cartesianos.

Relembrar os estudantes de que o eixo das abscissas corresponde ao eixo x, ou eixo horizontal do plano cartesiano, enquanto o eixo das ordenadas corresponde ao eixo y, ou eixo vertical do plano cartesiano. Reforçar que, no ciclo trigonométrico, o eixo dos cossenos corresponde ao eixo x e o eixo dos senos, ao eixo y. Assim, explicar que um ponto P do ciclo trigonométrico, correspondente a uma extremidade de um arco de medida angular α, tem coordenadas $P(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$.

Tangente de um arco trigonométrico

No boxe **Para pensar** da página **111**, caso os estudantes tenham dúvidas em relação à tangente não ser definida para alguns valores de α, apresentar a seguinte figura a eles e destacar que o eixo das tangentes é paralelo ao eixo dos senos, de maneira que, quando P pertence ao eixo dos senos, a reta OP coincide com esse eixo, logo, não intercepta a reta t.



Ver a seguir a resposta do boxe **Para pensar** da página **112**.

	sen	cos	tg
0 rad ou 0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$ rad ou 30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$ rad ou 45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$ rad ou 60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ rad ou 90°	1	0	Não está definida.
π rad ou 180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$ rad ou 270°	-1	0	Não está definida.
2π rad ou 360°	0	1	0

Páginas 113 a 115

Redução ao 1º quadrante

Caso julgar necessário, retomar inicialmente com os estudantes o conceito de simetria de reflexão. Para isso, apresentar a eles a seguinte situação: Considere uma reta que divide uma figura em duas partes. Suponha que essa figura seja dobrada sobre essa reta, de maneira que as partes obtidas coincidam por sobreposição. Então, pode-se dizer que essa figura possui simetria de reflexão em relação a um eixo de simetria, que corresponde a essa reta. Se duas figuras são simétricas por reflexão, então os pontos correspondentes em cada uma delas são equidistantes ao eixo de simetria.

Caso os estudantes apresentem dificuldades na compreensão da redução ao 1º quadrante, solicitar a eles que observem atentamente, no plano cartesiano, os segmentos de reta associados ao seno, ao cosseno e à tangente em cada situação (2º, 3º ou 4º quadrantes). Isso possibilita que os estudantes façam uma análise crítica e reconheçam em quais condições os sinais do seno, do cosseno ou da tangente são mantidos ou alterados quando comparados aos valores correspondentes ao 1º quadrante.

» Atividades resolvidas

R7. Essa atividade trabalha o cálculo do seno e do cosseno de arcos no ciclo trigonométrico. Verificar se os estudantes compreenderam que, antes de realizar a redução ao

1º quadrante, obteve-se a 1ª determinação positiva do arco. Para complementar, propor as questões a seguir com o objetivo de contribuir para que eles compreendam as diferenças entre as unidades de medida angular radiano e grau ao realizar cálculos envolvendo as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico.

- Estime o valor aproximado de sen 1, cos 1 e tg 1 e, depois, determine esses valores em uma calculadora científica. Resposta: Aproximadamente 0,841; aproximadamente 0,54; aproximadamente 1,557.
- Estime o valor aproximado de sen 1°, cos 1° e tg 1° e, depois, determine esses valores em uma calculadora científica. Resposta: Aproximadamente 0,017; aproximadamente 1; aproximadamente 0,017.

R8. Comentar com os estudantes que as relações apresentadas nessa atividade resolvida foram tratadas nas atividades **37** e **39** da Unidade **2** deste Volume. Se julgar conveniente, retomar essas atividades.

» Atividades

21. Essa atividade trabalha uma análise dos quadrantes do ciclo trigonométrico em relação aos sinais do cosseno e da tangente de um arco. Para complementar, propor aos estudantes que, de acordo com a resposta, determinem o sinal da razão trigonométrica que não foi indicada (sen $\alpha < 0$).

22. Essa atividade trabalha as possíveis extremidades de um arco trigonométrico de acordo com algumas de suas características. Verificar qual estratégia os estudantes utilizaram para resolver essa atividade. Uma estratégia é, inicialmente, determinar a qual quadrante pertence a extremidade do arco. Nesse caso, como o seno desse arco é positivo e a tangente é negativa, a extremidade do arco pertence ao 2º quadrante. Como no 2º quadrante há dois pontos indicados (*B* e *C*), pode-se estimar que o arco com extremidade em *B* tem seno mais próximo a 1 do que a 0, enquanto que o arco com extremidade em *C* tem seno mais próximo a 0 do que a 1.

23. Essa atividade trabalha a utilização da tabela trigonométrica para determinar o seno, o cosseno e a tangente de arcos trigonométricos. Explorar as estratégias dos estudantes para resolver essa atividade. Realizar questionamentos até que percebam a necessidade de estabelecer a 1ª determinação positiva do arco para que, em seguida, se faça a redução ao 1º quadrante.

24. Essa atividade trabalha uma expressão envolvendo seno, cosseno e tangente de arcos trigonométricos. Para complementar, solicitar a alguns estudantes que registrem suas resoluções na lousa e, em seguida, promover uma discussão sobre as diferentes estratégias que eles possam ter utilizado.

25. Essa atividade trabalha, em uma situação contextualizada, a determinação da medida do raio de uma circunferência e o cálculo envolvendo o ciclo trigonométrico. Para auxiliar os estudantes na resolução, explicar que, no ciclo trigonométrico, a origem dos arcos a serem medidos tem coordenadas (1, 0). Assim, para uma circunferência de raio com medida igual a 100 m, a origem passaria a ser o ponto de coordenadas (100, 0), que pode ser associado ao ponto *A* na representação da roda-gigante.

Páginas 116 a 118

Transformação das razões trigonométricas da soma e da diferença de arcos

Ao explorar a transformação das razões trigonométricas da soma e da diferença de arcos, retomar a ideia de projeção ortogonal de um ponto sobre um plano, que pode ser enunciada da seguinte maneira:

- Seja *P* um ponto que não esteja em um plano α. A projeção ortogonal de *P* sobre α é um ponto *P'* em α, de modo que a reta que passa pelos pontos *P* e *P'* seja perpendicular ao plano α.

Questionar os estudantes sobre o porquê, na última figura da página **116**, do ângulo $R\hat{Q}Q'$ ter medida α. Deixar um tempo para que eles pensem em possíveis justificativas. Depois, conduzir a conversa com os argumentos a seguir.

- Considere *S* o ponto de interseção entre os segmentos de reta *QQ'* e *OP*, ou seja, os ângulos $Q\hat{S}R$ e $O\hat{S}Q'$ são ângulos opostos pelo vértice e, por consequência, ângulos congruentes.
- Pelo caso AA (ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos, tem-se que os triângulos *QSR* e *OSQ'* são semelhantes e, por consequência, o ângulo $S\hat{Q}R$ mede α.

Ver, a seguir, a resposta do boxe **Para pensar** da página **117**.

Como $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, para $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Assim, tem-se que $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$, para $(\alpha + \beta) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Utilizando as expressões para os cálculos do seno e do cosseno da soma de dois arcos, segue que:

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\cos\,(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}$$

Multiplicando o numerador e o denominador dessa expressão por $\frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$, segue que:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{1 - \left(\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}\right)} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

De maneira análoga, tem-se que:

$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}\,(\alpha - \beta)}{\cos\,(\alpha - \beta)} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta} = \frac{\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

» Atividades

26. Essa atividade trabalha o cálculo do seno, do cosseno e da tangente de arcos trigonométricos. Identificar quais estratégias os estudantes utilizaram para resolver os itens propostos. Uma estratégia consiste em escrever a medida angular do arco indicado como a soma ou a diferença de dois arcos cujas medidas angulares correspondem a valores notáveis para o seno, o cosseno e a tangente.

27. Essa atividade trabalha a transformação das razões trigonométricas da soma e da diferença de arcos para resolução de uma expressão. Para complementar, solicitar aos estudantes que utilizem uma calculadora científica para verificar se o resultado obtido está correto.

28. Essa atividade trabalha a transformação das razões trigonométricas da soma e da diferença de arcos. Para complementar, propor aos estudantes que determinem a medida angular aproximada de *x* e de *y*, em graus e em radianos. Para isso, eles podem consultar a tabela trigonométrica apresentada na Unidade **2** deste Volume. $\left(x\text{: aproximadamente } 82° \text{ ou } \frac{41\pi}{90} \text{ rad; } y\text{: aproximadamente } 67° \text{ ou } \frac{67\pi}{180} \text{rad}\right)$.

29. Essa atividade trabalha a aplicação do cálculo da tangente de dois arcos trigonométricos. Caso os estudantes apresentem dificuldade em resolver essa atividade, questioná-los de modo que percebam que um triângulo retângulo isósceles tem um ângulo interno de 90° e dois de 45°.

30. Essa atividade trabalha a resolução de uma equação trigonométrica. Para complementar, solicitar aos estudantes que resolvam a equação $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \left(\text{Resposta: } x + \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\text{rad} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

31. Essa atividade trabalha a associação entre progressão geométrica e expressões envolvendo razões trigonométricas. Caso seja necessário, retomar com os estudantes o conceito de limite da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume.

32. Essa atividade trabalha cálculos envolvendo razões trigonométricas de arcos. Para resolver essa atividade, verificar se os estudantes percebem que $2x$ pode ser decomposto em $x + x$, ou seja, que $\text{sen}\,2x = \text{sen}\,(x + x)$, $\cos 2x = \cos\,(x + x)$ e $\text{tg}\,2x = \text{tg}\,(x + x)$.

33. Essa atividade trabalha a demonstração de algumas relações envolvendo razões trigonométricas de arcos. Comentar com os estudantes que essas relações costumam ser chamadas de fórmulas do seno, do cosseno e da tangente de arco duplo, e que elas podem ser utilizadas para resolver e elaborar problemas.

Páginas 119 a 121

As funções trigonométricas

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Para complementar a abordagem ao contexto sobre marés, avaliar a necessidade de realizar um trabalho em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Nesse trabalho, pode-se planejar uma discussão de aspectos físicos e biológicos relacionados ao movimento das marés.

Além disso, apresentar aos estudantes as informações a seguir.

- A variação das marés é utilizada para a geração de energia elétrica.
- A atração gravitacional do Sol exerce maior força sobre a Terra do que a Lua. Porém, como a Lua está mais próxima da Terra do que o Sol, a Lua acaba tendo mais influência nas variações das marés do que o Sol.
- A variação das marés também é influenciada por outros fatores, como características geográficas da região, por exemplo.

Função seno

Antes de apresentar a função seno, enfatizar aos estudantes a característica de repetição de comportamento, típica de fenômenos periódicos que costumam ser modelados por funções trigonométricas.

Ao explorar com os estudantes o diagrama apresentado, questioná-los sobre três elementos que caracterizam uma função: domínio, contradomínio e lei de formação.

Após analisarem as características da função seno $f(x) = \text{sen } x$, propor aos estudantes que determinem alguns intervalos de seu domínio em que essa função é crescente e alguns em que é decrescente. Por exemplo, f é crescente para $x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$ e decrescente para $x \in \left[\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right]$.

Verificar a possibilidade de propor aos estudantes que representem o gráfico da função seno utilizando o **GeoGebra**. Consultar algumas orientações para essa representação na seção **Você conectado** ao final desta Unidade.

No último boxe **Para pensar** da página **121**, verificar se os estudantes perceberam que $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e, para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, a função $f(x) = \text{sen } x$ é decrescente e positiva.

Páginas 122 a 125

Função cosseno

Após os estudantes analisarem as características da função cosseno, propor a eles que determinem alguns intervalos de seu domínio em que essa função é crescente e alguns em que é decrescente. Por exemplo, $f(x) = \cos x$ é crescente para $x \in [3\pi, 4\pi]$ e decrescente para $x \in [4\pi, 5\pi]$.

No boxe **Para pensar** da página **123**, verificar se os estudantes perceberam que $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right] \subset \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e, para $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, a função $f(x) = \cos x$ é crescente e positiva.

Se julgar necessário, sugerir que eles representem o gráfico da função cosseno utilizando o **GeoGebra**. Além disso, é possível que eles também construam os gráficos das funções seno e cosseno em um mesmo plano cartesiano, de maneira a compará-los. É importante destacar, nesse momento, que o gráfico da função seno é simétrico em relação à origem do plano cartesiano, enquanto o gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo *y*.

» Atividades resolvidas

R11. Essa atividade trabalha a análise do conjunto imagem da função seno. Caso os estudantes apresentem dificuldade para avaliar a resolução, pedir a eles que descrevam o domínio e o conjunto imagem da função seno. Em seguida, solicitar que utilizem essas informações para determinar o intervalo no qual a equação $\text{sen } x = 4m - 3$ tem solução.

» Atividades

34. Essa atividade trabalha o cálculo do valor numérico das funções seno e cosseno. Para complementar, sugerir a alguns estudantes que compartilhem suas resoluções na lousa.

35. Essa atividade trabalha a resolução de equações trigonométricas. Para complementar, questionar aos estudantes quantas soluções cada equação apresentada teria caso fosse considerado *x* real qualquer (não limitado a um intervalo). Nesse caso, espera-se que eles constatem que cada equação teria infinitas soluções.

36. Essa atividade trabalha a análise do conjunto imagem das funções seno e cosseno. Caso os estudantes apresentem dificuldade para resolver o item **d**, sugerir que isolem, na equação, sen *x* em um dos membros.

37. Essa atividade trabalha a exploração da ideia de função par e função ímpar. Para complementar, solicitar aos estudantes que elaborem um relatório explicando a diferença entre esses dois tipos de função. Pedir a eles que registrem os gráficos no relatório de modo a exemplificar essas diferenças. No item **c**, caso seja possível, sugerir o uso do **GeoGebra** para a representação dos gráficos.

38. Essa atividade trabalha a análise do conjunto imagem das funções seno e cosseno. Verificar se os estudantes compreenderam que, para determinar os valores máximo e mínimo de cada expressão, devem considerar os valores máximo e mínimo que as funções seno ou cosseno podem assumir. Para complementar, propor a eles que escrevam uma expressão que envolve seno e outra que envolve cosseno e que determinem, para essa expressão, os valores máximo e mínimo que ela pode assumir. As expressões elaboradas também podem ser trocadas entre os estudantes.

39. Essa atividade trabalha a elaboração de um problema envolvendo as funções seno e cosseno. Comentar com os estudantes que pode ser elaborado um problema cuja solução não seja possível de se obter devido à falta de dados no enunciado. Nesse caso, é necessário que o estudante que receber esse tipo de problema, seja capaz de identificar que é irresolúvel e faça sugestões de ajustes ao enunciado com o objetivo de tornar possível sua resolução.

40. Essa atividade trabalha a comparação entre as funções seno e cosseno por meio de suas representações gráficas. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem quais intervalos reais, contidos em $[0, 4\pi]$, tem-se $g(x) \geqslant f(x)$. Neste caso, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{13\pi}{4}, 4\pi\right]$.

41. Essa atividade trabalha a análise da representação gráfica da função seno. Para complementar, solicitar aos estudantes que representem o gráfico da função seno no **GeoGebra** e avaliem se resolveram corretamente essa atividade, o que pode ser feito indicando os pontos cujas coordenadas foram apresentadas.

Páginas 126 a 129

Funções do tipo trigonométricas

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Ao trabalhar o conceito de função do tipo trigonométrica, definida por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$ ou $g(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$, apresentar o seguinte questionamento aos estudantes: Se b pudesse ser igual a 0, o que aconteceria com essa função? Espera-se que eles percebam que, nesse caso, seria obtida uma função constante $m(x) = a$.

Dizer aos estudantes que a expressão $p = \frac{2\pi}{|c|}$ também pode ser utilizada para determinar o período de uma função do tipo $g(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$.

Na prática

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, como o **GeoGebra**, resolvam os itens a seguir.

a) Esbocem o gráfico da função seno ou da função cosseno.

b) Considerando a função explicitada no item **a**, esbocem o gráfico de uma função do tipo trigonométrica, e destaquem os parâmetros utilizados.

c) Escrevam um texto que apresente uma comparação entre os gráficos que vocês construíram nos itens **a** e **b**. É importante descrever a relação de cada parâmetro da função do tipo trigonométrica e o gráfico correspondente.

d) Gravem e editem um vídeo, com base no texto elaborado no item **c**. Utilizem uma linguagem acessível, de maneira que a maior quantidade de pessoas consiga compreendê-lo. Façam uso de recursos visuais, de modo a deixar o trabalho mais dinâmico e atrativo. Se julgarem conveniente, pesquisem como produzir *gifs* ou vídeos no **GeoGebra**. Isso pode ajudar a complementar a produção de vocês.

Após os estudantes resolverem os itens propostos anteriores, realizar uma roda de conversa, de maneira que os grupos apresentem as dificuldades e facilidades que identificaram nesse processo. Em seguida, apresentar à turma todos os vídeos produzidos.

» Atividades resolvidas

R15. Essa atividade trabalha a determinação do período de funções do tipo trigonométricas. Se necessário, explicar aos estudantes que o parâmetro c, indicado na resolução, corresponde ao número real que multiplica a variável x na lei de formação da função. Ao final, sugerir que representem os gráficos dessas funções no **GeoGebra** e analisem os períodos correspondentes.

R16. Essa atividade trabalha a análise do conjunto imagem de funções do tipo trigonométricas. No item **b**, argumentar que o conjunto imagem de uma função $h(x) = \text{sen}\,(x + 2\pi)$ é o mesmo da função $g(x) = \text{sen}\,x$, uma vez que seu gráfico corresponde ao de g transladado horizontalmente.

Página 130

» Atividades

42. Essa atividade trabalha a determinação do período de funções do tipo trigonométricas. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem os parâmetros a, b, c e d da função representada no item **c**. Nesse caso, $a = 1, b = 1, c = \frac{\pi}{4}$ e $d = -\frac{\pi}{2}$.

43. Essa atividade trabalha a determinação do conjunto imagem de funções do tipo trigonométricas. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem os parâmetros a, b, c e d da função representada no item **a**. Nesse caso, $a = 0, b = 7, c = -1$ e $d = 2\pi$.

44. Essa atividade trabalha a análise de características de uma função do tipo trigonométrica. Ressaltar aos estudantes que, de acordo com as informações do enunciado, a função indicada também pode ser $h(x) = -3 + 2\cos\,(6x + 6\pi)$. Verificar a possibilidade de propor aos estudantes que construam no **GeoGebra** os gráficos das funções g (resposta dessa atividade) e h, comparando-os.

45. Essa atividade trabalha a determinação da lei de formação de uma função do tipo trigonométrica com base em algumas de suas características. Solicitar aos estudantes que trabalhem, inicialmente, de maneira individual. Em seguida, distribuir as produções dos estudantes de modo que cada um não receba os gráficos que construiu e que assim possa avaliar os gráficos construídos pelos colegas. Em seguida, organizar os estudantes nas duplas correspondentes, de maneira que discutam juntos as avaliações.

46. Essa atividade trabalha o esboço de gráfico de funções do tipo trigonométricas. Para complementar, verificar a possibilidade de apresentar aos estudantes os gráficos dessas funções construídos no **GeoGebra**, de maneira que possam se autoavaliar, atribuindo uma pontuação de zero (0) até dez (10) para cada gráfico que esboçaram. Essa atividade pode compor uma avaliação dos estudantes nesta Unidade.

47. Essa atividade trabalha a comparação entre os gráficos de duas funções do tipo trigonométricas. Para complementar, no item **b**, conduzir uma conversa com os estudantes de maneira que eles possam perceber que os pontos de interseção entre os gráficos correspondem às soluções da equação $f(x) = g(x)$.

48. Essa atividade trabalha a análise dos parâmetros de uma função do tipo trigonométrica com base na sua representação gráfica. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem o zero dessa função no intervalo real $[0, \pi]$. Nesse caso, os zeros da função são: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

Páginas 131 a 136

Funções do tipo trigonométricas: algumas aplicações

Os contextos apresentados para o trabalho com algumas aplicações de funções do tipo trigonométricas propiciam uma abordagem dos Temas Contemporâneos Transversais Saúde e Ciência e Tecnologia, já que envolve determinação de modelos matemáticos que são descritos por essas funções e obtidos por meio da exploração de situações sociais relacionadas a esses temas. Ao explorar as atividades resolvidas, destacar para os estudantes que a Matemática possui um papel relevante na sociedade, uma vez que busca explicar fenômenos de diferentes áreas do conhecimento. Sendo assim, além de ter importância no campo das ciências, as ideias e conceitos matemáticos podem ser utilizados no desenvolvimento de uma cultura da paz, na valorização de decisões democráticas, no combate às desigualdades sociais, entre outros aspectos.

» Atividades resolvidas

R18. Essa atividade trabalha a associação entre o contexto de marés e funções do tipo trigonométricas. Chamar a atenção dos estudantes para o comportamento da função *h* quando comparada com a função cosseno. Verificar se eles perceberam que *h* assume valor mínimo quando $\cos\left(-\frac{\pi}{6}t\right)$ assume seu maior valor possível, ou seja, para $\cos\left(-\frac{\pi}{6}t\right) = 1$. De maneira análoga, *h* assume valor máximo quando $\cos\left(-\frac{\pi}{6}t\right)$ assume seu menor valor possível, ou seja, para $\cos\left(-\frac{\pi}{6}t\right) = -1$.

R19. Essa atividade trabalha a associação entre o ciclo menstrual da mulher e o estudo de funções do tipo trigonométricas. Explicar aos estudantes que a determinação dos modelos associados ao estrogênio e à progesterona são obtidos considerando algumas condições. Por exemplo, uma mulher adulta, com boas condições de saúde, que não toma anticoncepcional. Essa atividade pode ser realizada em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias a fim de contribuir com informações a respeito do ciclo menstrual. Nesse sentido, pode-se propor aos estudantes a realização de pesquisas relacionadas ao tema e que sejam de interesse deles, como as produções hormonais na fase da adolescência. Explicar que os hormônios luteinizante (LH) e foliculestimulante (FSH) são secretados pela hipófise, uma glândula endócrina situada na sela túrcica, cavidade óssea localizada na base do cérebro. Já os hormônios estrogênio e progesterona são secretados principalmente nos ovários. Dizer aos estudantes que, assim como a duração de um ciclo, os níveis de hormônios variam entre diferentes mulheres. No item **b**, explicar que a unidade de medida ng/mL significa nanograma por mililitro de sangue.

R20. Essa atividade trabalha a associação entre o contexto de ondas sonoras e funções do tipo trigonométricas. Para complementar, solicitar aos estudantes que pesquisem sobre o osciloscópio. Essa pesquisa pode ser acompanhada por um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o que contribui para a análise de conceitos relacionados à Física, como o de ondas sonoras.

» Atividades

49. Essa atividade trabalha a relação de frequência de ondas sonoras e funções do tipo trigonométricas. Para complementar, propor aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre a relação entre as unidades de medida decibéis (dB) e Hertz (Hz).

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter informações sobre a relação entre as unidades de medida decibéis e Hertz.

- HEAR-IT. **O que é dB e frequência?**. Disponível em: www.hear-it.org/pt/o-que-e-db-e-frequencia#:~:text=A%20frequ%C3%AAncia%20de%20som%20%C3%A9,uma%20pessoa%20com%20sa%C3%BAde%20normal. Acesso em: 29 jul. 2020.

50. Essa atividade trabalha a associação do contexto das marés com funções do tipo trigonométricas. Para complementar, solicitar que os estudantes realizem uma pesquisa sobre a influência da Lua nas marés.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter informações sobre a influência da Lua nas marés.

- SANTOS, E. Com mudança de lua, maré em rios do estado deve superar 3 metros. **Portal do Governo do Amapá**, 5 abr. 2017. Disponível em: www.portal.ap.gov.br/noticia/0504/com-mudanca-de-lua-mare-em-rios-do-estado-deve-superar-3-metros. Acesso em: 29 jul. 2020.

51. Essa atividade trabalha a associação entre o contexto de pressão arterial e funções do tipo trigonométricas. Para complementar, solicitar aos estudantes que pesquisem sobre a hipertensão, destacando seus perigos para a saúde e como evitá-la. Comentar sobre a importância de uma alimentação equilibrada e a prática de atividades físicas como ações preventivas e sobre a influência de fatores genéticos no desenvolvimento de doenças cardiovasculares. Solicitar que compartilhem as informações pesquisadas com os colegas. Se possível, realizar essa atividade em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, buscando destacar conceitos próprios da Biologia relacionados à temática apresentada, como frequência cardíaca e as etapas do batimento do coração.

52. Essa atividade trabalha a associação do contexto de correntes elétricas e funções do tipo trigonométricas. Para complementar, solicitar aos estudantes que determinem o período da função *i* apresentada. Nesse caso, o período é $\frac{1}{60}$, que pode ser identificado ao analisar o gráfico da função.

53. Essa atividade trabalha a elaboração de um problema contextualizado relacionado à função do tipo trigonométrica. É importante avaliar se os problemas elaborados pelos estudantes contemplam o conceito proposto e, ao final, reproduzir alguns desses problemas na lousa e discutir com os demais colegas da turma.

54. Essa atividade trabalha a produção de um texto pelos estudantes explicitando a relação de um contexto de fenômenos periódicos e funções do tipo trigonométricas. É interessante que essa atividade seja trabalhada em parceria com um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, o que contribui na redação do texto proposto. Comentar com os estudantes sobre a grafia da palavra co-senos, expressa no poema. Argumentar que a autora desse poema é portuguesa, país em que se costuma utilizar tal grafia na indicação da razão ou função cosseno. Discutir com eles que, embora a língua portuguesa seja falada em Portugal e no Brasil, é comum que existam diferenças entre alguns termos utilizados nesses países. Promover uma discussão nesse sentido, buscando identificar outros termos em que essa diferença ocorre (nesse poema, também há a palavra fenómenos, acentuada de modo diferente).

Na prática

Em grupos de três estudantes, propor a elaboração de um poema que tenha alguma ideia matemática envolvida, se possível algum conceito estudado nesta Unidade. Em seguida, pedir aos grupos que apresentem o poema aos demais colegas da turma. Para inspiração, sugerir a eles que acessem o *site* da autora do poema analisado. Nesse *site*, estão disponíveis outros "poemas matemáticos".

- NEVES, M. A. Poemas. **Maria Augusta Ferreira Neves**. Blogue. Disponível em: www.augusta-neves.net/blog/cat/11. Acesso em: 29 jul. 2020.

Páginas 137 e 138

Equações trigonométricas

O trabalho com esse tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Na situação apresentada no início da página **137**, verificar se os estudantes perceberam que, de acordo com o contexto, a medida x é tal que $0° < x < 90°$.

» Atividades

55. Essa atividade trabalha a resolução de equações trigonométricas. Para complementar, solicitar aos estudantes que apresentem as resoluções na lousa, discutindo as diferentes estratégias que possam ter utilizado.

56. Essa atividade trabalha a resolução de equações trigonométricas em um intervalo real. Para complementar, questionar os estudantes de maneira que reflitam sobre o que ocorreria caso não houvesse restrições às soluções das equações. Espera-se que eles percebam que, nesse caso, cada equação teria infinitas soluções.

57. Essa atividade trabalha a análise de uma equação trigonométrica. Caso os estudantes apresentem dificuldade em resolver essa atividade, conduzir uma conversa de maneira que percebam a estratégia de isolar $\cos x$ em um dos membros da equação. Após essa compreensão, pedir a eles que, mentalmente, indiquem números reais x tais que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Em seguida, verificar se eles se atentaram à restrição $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$. Nesse caso, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$.

58. Essa atividade trabalha os conceitos de triângulo retângulo e equações trigonométricas. Para complementar, propor aos estudantes que determinem as medidas dos catetos do triângulo retângulo em função da medida x da hipotenusa. Nesse caso, um cateto mede $\frac{x}{2}$ (metade da medida da hipotenusa) e, o outro, $\frac{x\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)$.

59. Essa atividade trabalha a associação entre o contexto de taxa de câmbio e equações trigonométricas. Para complementar, discutir com os estudantes por que $t = 3$ corresponde ao mês de abril. Destacar que janeiro, no contexto do modelo apresentado, corresponde ao mês 0, e não ao mês 1.

60. Essa atividade trabalha a elaboração de um problema relacionado à equação trigonométrica. Propor às duplas de estudantes que realizem uma pesquisa acerca de contextos que possam ser explorados na elaboração do problema. Ao final, os problemas elaborados podem ser compartilhados com toda a turma.

Páginas 139 a 141

Integrando

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **2**, da competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Ao explorar as informações dessa seção, perguntar aos estudantes se eles já ouviram a respeito desse tema. Destinar um tempo para que apresentem suas experiências. Por exemplo, é comum algumas pessoas dizerem que, em determinadas épocas do ano, o Sol se põe mais cedo do que em outras épocas. Argumentar que essas características se relacionam ao que será explorado na seção.

Verificar a possibilidade de planejar o trabalho com essa seção em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para discutir aspectos relacionados a conceitos da Astronomia, como os movimentos de rotação e translação da Terra, e conceitos relacionados à produção de energia solar. Se possível, organizar uma visita a um planetário, onde alguns dos conceitos abordados podem ser discutidos.

Conexões

Sugerir aos estudantes que acessem este *site* para obter informações sobre solstício de verão e de inverno.

- ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Agricultura, Abastecimento, Aquicultura e Pesca. Incaper. **Estações do ano**, c2015-2020. Disponível em: https://meteorologia.incaper.es.gov.br/estacoes-do-ano. Acesso em: 28 jul. 2020.

» Pensando no assunto

1. Essa questão trabalha as experiências dos estudantes a respeito da duração solar do dia no município em que moram. Organizar uma roda de conversa para que eles compartilhem suas experiências sobre o tema.

2. Essa questão trabalha a compreensão dos estudantes sobre o movimento de rotação da Terra. Para complementar, solicitar aos estudantes que argumentem sobre suas experiências com relação ao movimento de rotação e o chamado movimento aparente da Terra.

3. Essa questão trabalha a interpretação de dados apresentados nessa seção. Para complementar, pedir aos estudantes que localizem em um mapa os municípios de Chuí (RS) e aquele em que moram, a fim de possibilitar a comparação entre as localizações geográficas desses municípios.

4. Essa questão trabalha a estimativa da duração solar do dia no município de Chuí (RS) por meio de um modelo matemático relacionado à função do tipo trigonométrica. Para complementar, solicitar aos estudantes que construam o gráfico correspondente ao modelo matemático utilizando o **GeoGebra**.

5. Essa questão trabalha uma investigação sobre a variação da duração solar do dia no município em que os estudantes moram. Sugere-se que essa questão seja desenvolvida em grupos. Para isso, é importante compor esses grupos com estudantes de distintos perfis, seja considerando os diferentes níveis de conhecimento prévio e habilidades, seja por observar características de suas culturas, potencialidades ou realidades de vida, contribuindo para o diálogo e a cooperação entre eles. O trabalho pode ser realizado de acordo com as seguintes etapas da modelagem matemática, uma das tendências metodológicas abordadas na parte geral destas **Orientações para o professor**.

1ª) Reconhecimento/definição da situação-problema. Nesse momento, os estudantes reconhecem a situação-problema, que se associa à variação da duração solar do dia no município em que moram.

2ª) Elaboração de hipóteses. Nesse momento, os estudantes elaboram hipóteses, considerando as experiências e os conhecimentos que possuem a respeito da duração solar do dia no munícipio em que moram.

3ª) Exploração da situação-problema. Esse é o momento de investigação dos estudantes. Com base nas hipóteses elaboradas na etapa anterior, os estudantes investigam a situação-problema, buscando resolvê-la.

4ª) Determinação do modelo matemático. Nessa etapa, os estudantes buscam organizar as informações obtidas na etapa anterior por meio de tabela, gráfico, esquema, expressão etc. A ideia é organizar as informações para que sejam apresentadas ou divulgadas a outras pessoas, a fim de que possam compreendê-las com mais facilidade.

5ª) Discussão dos resultados. Nessa etapa, os grupos apresentam aos demais colegas os resultados que obtiveram.

» Pensando em um projeto

O tema trabalhado nessa seção possibilita uma ampliação por meio da realização de um projeto. Uma sugestão é que esse projeto promova a elaboração e divulgação de um fôlder sobre as características da duração solar do dia no município em que os estudantes moram e o impacto na geração de energia solar. Para isso, podem ser elaboradas as seguintes fases:

1. Compreensão da importância da temática.
2. Discussão sobre as características de um fôlder.
3. Elaboração do fôlder, com estratégias adequadas para divulgação. Utilizar recursos visuais de maneira a potencializar a compreensão do público.
3. Elaboração de um plano para expor os fôlderes na escola. É importante que todos os estudantes tenham informações gerais sobre a duração solar do dia no município em que moram.
4. Expor os fôlderes na escola.

Ao final do projeto, é importante avaliar a participação individual e coletiva dos estudantes na realização de cada fase do projeto proposto. Na parte geral destas **Orientações para o professor** há informações sobre a realização de projetos.

Páginas 142 e 143

Você conectado

O trabalho com essa seção favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC.

Inicialmente, retomar com os estudantes o trabalho realizado sobre funções do tipo trigonométricas. Se necessário, apresentar alguns vídeos produzidos pelos estudantes (sugestão proposta na página **241** destas **Orientações específicas para este Volume**), argumentando que, nessa seção, serão exploradas as características relacionadas aos parâmetros dessas funções utilizando como recurso um *software* de Geometria dinâmica.

Na etapa **C**, para a representação do gráfico da função *f* no **GeoGebra**, comentar com os estudantes que o símbolo "*" é utilizado para indicar uma multiplicação ao digitar a lei de formação dessa função.

Mãos à obra

1. Essa questão trabalha a análise de uma função do tipo trigonométrica representada no **GeoGebra**. Para complementar, argumentar com os estudantes como o período pode ser identificado, geometricamente, no gráfico. Nesse caso, pode-se utilizar como referência os pontos de interseção do gráfico e o eixo *x* (ou uma reta paralela ao eixo *x*).

2. Essa questão trabalha a análise de parâmetros de uma função do tipo trigonométrica. Para complementar, solicitar aos estudantes que estabeleçam um intervalo real e, em seguida, ajustem os parâmetros para que o conjunto imagem da função coincida com o intervalo real estabelecido.

3. Essa questão trabalha o uso do **GeoGebra** para análise dos parâmetros de uma função do tipo trigonométrica e a elaboração de questões pelos estudantes. Para complementar, propor aos estudantes que produzam um *gif* no **GeoGebra** para evidenciar a movimentação do gráfico no plano cartesiano de acordo com os ajustes nos parâmetros. Para isso, eles podem acessar a opção **Arquivo** no *menu*, depois clicar em **Exportar** e, por fim, clicar em **Janela de Visualização como GIF Animado**.

Páginas 144 e 145

O QUE ESTUDEI

1. As respostas dos estudantes podem ser registradas de modo que se construa um histórico que permita ser acompanhado ao longo do ano letivo. Com isso, é possível identificar em quais itens cada estudante demonstra avanço e quais devem ser mais bem trabalhados. Com base nas respostas dos estudantes é possível localizar, na parte geral destas **Orientações para o professor**, na descrição dessa seção, estratégias que podem auxiliá-los no desenvolvimento da aprendizagem.

2. Com base nos conceitos que os estudantes indicaram ser necessário retomar para compreendê-los melhor, é possível organizar um estudo dirigido com a turma. Mais informações sobre esse estudo estão disponíveis na parte geral destas **Orientações para o professor**, na descrição dessa seção.

3. Nessa questão, é importante valorizar as produções dos grupos e possibilitar o compartilhamento de tais produções. É interessante que todos os conceitos listados na questão anterior sejam contemplados nas produções.

4. Essa questão trabalha informações sobre as moradias indígenas. No item **a**, se necessário, retomar a definição de circunferência com os estudantes, de maneira que eles a compreendam como uma linha fechada e formada por todos os pontos equidistantes a um único ponto (centro da circunferência). No item **b** são tratados alguns aspectos da cultura de povos indígenas, em especial sobre as pinturas corporais e de utensílios.

Para ampliar

Ler para os estudantes o trecho a seguir, que traz informações sobre a cultura de povos indígenas.

Cultura indígena

A cultura é o que faz com que as pessoas de um povo, de uma sociedade, olhem e pensem o mundo e as coisas de uma determinada maneira, sempre muito própria. A partir da cultura, as pessoas estabelecem o seu modo de agir e de se relacionar com o mundo, com outras pessoas e com as coisas.

[...]

As manifestações artísticas de um povo ou a criação de objetos e utensílios que servem à vida cotidiana também são, necessariamente, expressões culturais.

[...]

Para os povos indígenas no Brasil, de maneira geral, não existe uma diferença ou um limite preciso entre arte e objetos utilitários (como uma ferramenta ou uma panela), uma vez que tudo garante as necessidades da vida cotidiana, ritual e artística.

A cultura material (a criação e a produção de objetos) e a arte produzida pelos povos indígenas são chamadas nas cidades de "artesanato indígena". E essa não é uma expressão adequada, porque é usada de forma pejorativa, desvalorizando as expressões culturais desses povos.

[...]

As diferenças entre os objetos utilitários e artísticos produzidos pelos povos indígenas são dadas pelas diferenças culturais existentes entre eles e também, pelos recursos materiais disponíveis, como fibras e barro e vegetais, dos quais se fabricam tinturas.

[...]

Vale a pena saber que não há especialistas entre os nativos: todos sabem confeccionar os objetos necessários à sua sobrevivência. O que existe são pessoas que se destacam em um ou outro tipo de objeto utilitário ou artístico, devido ao talento pessoal.

[...]

MUNDURUKU, D. **Coisas de índio**. São Paulo: Callis, 2000. p. 51-53.

Páginas 146 a 151

» + ATIVIDADES

Essa seção contém questões do Enem e de vestibulares aplicadas pelo Brasil. Elas podem ser utilizadas no processo avaliativo dos estudantes em relação à aprendizagem dos conceitos tratados neste Volume, inclusive como subsídio a propostas de avaliações diagnósticas que podem ser efetivadas no decorrer do estudo das Unidades. Na parte geral destas **Orientações para o professor**, há informações que podem ser consultadas sobre avaliação e instrumentos de avaliação.

1. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume. Se necessário, retomar o estudo da soma dos *n* primeiros termos de uma PA.
2. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume. Se necessário, relembrar os estudantes do conceito de mínimo múltiplo comum (m.m.c.).
3. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume. Caso julgar necessário, retomar o estudo de equação do 2º grau com uma incógnita, conceito que pode ser utilizado de acordo com a estratégia de resolução do estudante.
4. Essa atividade trabalha a ideia de progressão geométrica e relações métricas no triângulo retângulo, conteúdos tratados, respectivamente, nas Unidades **1** e **2** deste Volume. Se necessário, relembrar os estudantes sobre o conceito de triângulo isósceles.
5. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume.
6. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume. Para complementar, propor aos estudantes que representem graficamente a expressão determinada em um plano cartesiano.
7. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos, conteúdo tratado na Unidade **2** deste Volume. Para resolver essa atividade, sugerir aos estudantes que representem por meio de desenho o compasso de acordo com os dados do enunciado, obtendo um triângulo isósceles.
8. Essa atividade trabalha as relações trigonométricas no triângulo retângulo, conteúdo tratado na Unidade **2** deste Volume. Se necessário, sugerir aos estudantes que consultem os valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis.
9. Essa atividade trabalha as relações trigonométricas no triângulo retângulo, conteúdo tratado na Unidade **2** deste Volume.
10. Essa atividade trabalha conceitos relacionados à circunferência, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Se necessário, retomar a expressão de cálculo do comprimento de uma circunferência.
11. Essa atividade trabalha o conceito de circunferência, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Se possível, discutir com os estudantes as diferentes estratégias que podem ter sido utilizadas por eles.
12. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume.
13. Essa atividade trabalha os parâmetros de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Se necessário, retomar com os estudantes a ideia de período de função do tipo trigonométrica e a relação desse período com os parâmetros da função.
14. Essa atividade trabalha os parâmetros de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. De acordo com as estratégias utilizadas pelos estudantes, pode ser necessário retomar a resolução de sistemas de equações lineares para a determinação dos parâmetros *A* e *B*.
15. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Caso seja necessário, discutir com os estudantes sobre o valor máximo e o valor mínimo que a função seno pode assumir (1 e -1, respectivamente).
16. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume.
17. Essa atividade trabalha a ideia de progressão geométrica, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume. Se necessário, retomar o conceito de soma dos termos de uma PG infinita.
18. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume.

19. Essa atividade trabalha a lei dos cossenos, conteúdo tratado na Unidade **2** deste Volume.

20. Essa atividade trabalha as ideias de progressões aritmética e geométrica, conteúdos tratados na Unidade **1** deste Volume.

21. Essa atividade trabalha a ideia da lei dos senos e do seno da soma de dois arcos, conteúdos tratados, respectivamente, nas Unidades **2** e **3** deste Volume. Se necessário, relembrar os estudantes da relação $\text{sen}\, 2\beta = 2 \cdot \text{sen}\, \beta \cdot \cos \beta$.

22. Essa atividade trabalha a resolução de uma equação trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Se necessário, retomar o estudo sobre a redução de um arco ao 1º quadrante nos cálculos envolvendo as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico.

23. Essa atividade trabalha a transformação das razões trigonométricas da soma de arcos, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Ao final, propor aos estudantes que discutam as estratégias utilizadas por eles no desenvolvimento das expressões indicadas.

24. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Para a resolução, se necessário, retomar o estudo de sistemas de equações lineares.

25. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Verificar se os estudantes perceberam que o tempo gasto para uma volta completa na roda-gigante corresponde ao período da função apresentada.

26. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Para complementar, sugerir aos estudantes que pesquisem aplicações sobre o estudo de ondas sonoras em contextos relacionados à recepção e à emissão de sons por animais, o que pode ser realizado em parceria com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

27. Essa atividade trabalha os conceitos de progressão geométrica e de circunferência, conteúdos tratados nas Unidades **1** e **3** deste Volume. Se necessário, retomar o estudo da soma dos termos de uma PG infinita.

28. Essa atividade trabalha os conceitos de relações trigonométricas no triângulo retângulo e de circunferência, conteúdos tratados nas Unidades **2** e **3** deste Volume. Se necessário, retomar com os estudantes a expressão para o cálculo da área de um triângulo.

29. Essa atividade trabalha os conceitos de relações trigonométricas no triângulo retângulo e tangente da soma de dois arcos, conteúdos tratados nas Unidades **2** e **3** deste Volume.

30. Essa atividade trabalha a ideia de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume.

31. Essa atividade trabalha os conceitos de relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, conteúdos tratados na Unidade **2** deste Volume.

32. Essa atividade trabalha os conceitos de lei dos senos e de circunferência, conteúdos tratados nas Unidades **2** e **3** deste Volume.

33. Essa atividade trabalha os conceitos de arco de circunferência, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Para complementar, propor aos estudantes que pesquisem sobre coordenadas geográficas, em particular a latitude e a longitude em que o município onde moram se localiza no globo terrestre. Esse trabalho pode ser desenvolvido em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

34. Essa atividade trabalha o conceito de função relacionada a razões trigonométricas, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume.

35. Essa atividade trabalha o conceito de progressão aritmética, conteúdo tratado na Unidade **1** deste Volume.

36. Essa atividade trabalha os conceitos de relações trigonométricas no triângulo retângulo e de circunferência, conteúdos tratados nas Unidades **2** e **3** deste Volume.

37. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Se necessário, relembrar os estudantes dos conceitos de valor máximo, valor mínimo e período de uma função do tipo trigonométrica.

38. Essa atividade trabalha o conceito de função do tipo trigonométrica, conteúdo tratado na Unidade **3** deste Volume. Para complementar, propor aos estudantes que representem o gráfico das funções indicadas nas alternativas utilizando o **GeoGebra** e, assim, realizar a comparação entre esses gráficos e verificar se a resposta indicada está correta.

10. Resoluções das atividades propostas no Livro do Estudante

Unidade 1 • Sequências e noções de linguagem de programação

1. $45 \cdot 24 = 1\,080 \rightarrow$ cerca de 1 080 quadros

2. **a)** • $a_1 = 10 - 3 \cdot 1 = 7$
• $a_2 = 10 - 3 \cdot 2 = 4$
• $a_3 = 10 - 3 \cdot 3 = 1$
• $a_4 = 10 - 3 \cdot 4 = -2$
• $a_5 = 10 - 3 \cdot 5 = -5$
$(7, 4, 1, -2, -5, ...)$

b) • $a_1 = -8$
• $a_2 = a_1 - 6 = -8 - 6 = -14$
• $a_3 = a_2 - 6 = -14 - 6 = -20$
• $a_4 = a_3 - 6 = -20 - 6 = -26$
• $a_5 = a_4 - 6 = -26 - 6 = -32$
$(-8, -14, -20, -26, -32, ...)$

c) • $a_1 = 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$
• $a_2 = 2 \cdot 2 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$
• $a_3 = 2 \cdot 3 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$
• $a_4 = 2 \cdot 4 + \frac{1}{4} = \frac{33}{4}$
• $a_5 = 2 \cdot 5 + \frac{1}{4} = \frac{41}{4}$
$\left(\frac{9}{4}, \frac{17}{4}, \frac{25}{4}, \frac{33}{4}, \frac{41}{4}, ...\right)$

3. **a)** Resposta esperada: Não recursiva, pois, para determinar um termo qualquer da sequência, não é necessário conhecer o valor de um ou mais termos anteriores.

b) Finita, pois o seu domínio é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5}.

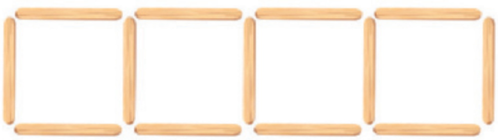
c) • $a_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$
• $a_2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$
• $a_3 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$
• $a_4 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$
• $a_5 = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$
Portanto, Marcela foi quem escreveu corretamente todos os termos da sequência.

4. **a)** Algumas respostas possíveis: 1, 2 e 4; 2, 4 e 8; 4, 8 e 16; 8, 16 e 32.

b) 32. 2

5. **a)** figura **1**: 4 palitos e 1 representação de contorno de quadrado; figura **2**: 7 palitos e 2 representações de contorno de quadrado; figura **3**: 10 palitos e 3 representações de contorno de quadrado

b) Resposta esperada:



ARTUR FUJITA

• 13 palitos. 4 representações de contorno de quadrado.

c) Resposta esperada: A partir da figura **2**, acrescentam-se três palitos à figura anterior, de maneira a obter a representação de um contorno de quadrado a mais do que essa figura anterior possui.

d) (4, 7, 10, ...)
A partir do segundo termo, cada termo é igual ao anterior somado com 3. Assim:
• $a_1 = 4$
• $a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 4 + 1 \cdot 3$
• $a_3 = a_2 + 3 = 4 + 3 + 3 = 4 + 2 \cdot 3$
• $a_4 = a_3 + 3 = 4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3 \cdot 3$
⋮
Assim, podemos definir essa sequência de maneira não recursiva por meio do termo geral $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$.
Resposta esperada: $a_n = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Resposta esperada:
• Recursiva: O primeiro termo é igual a 0 e, a partir do segundo, cada termo é igual ao anterior somado com 13, ou seja, definimos $a_n = a_{n-1} + 13$ e $a_1 = 0$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$.
• Não recursiva: Os termos da sequência são os múltiplos não negativos de 13, sendo $a_n = 13(n - 1)$ ou $a_n = 13n - 13$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Notar que $a_n = 9(n - 1) - 5 = 9n - 14$. Assim, um número k é termo da sequência se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $9n - 14 = k$.
• Para $k = 238$:
$9n - 14 = 238 \Rightarrow 9n = 252 \Rightarrow n = 28 \in \mathbb{N}^*$
• Para $k = 483$:
$9n - 14 = 483 \Rightarrow 9n = 497 \Rightarrow n = 55,\overline{2} \notin \mathbb{N}^*$
• Para $k = 260$:
$9n - 14 = 260 \Rightarrow 9n = 274 \Rightarrow n = 30,\overline{4} \notin \mathbb{N}^*$
• Para $k = 355$:
$9n - 14 = 355 \Rightarrow 9n = 369 \Rightarrow n = 41 \in \mathbb{N}^*$
Portanto, 238 e 355 são termos da sequência. Temos que $a_{28} = 238$ e $a_{41} = 355$, ou seja, 238 é o termo da 28ª posição e 355, da 41ª posição.

8. • $a_1 = -4$
• $a_2 = 14 - a_1 = 14 - (-4) = 18$
• $a_3 = 14 - a_2 = 14 - 18 = -4$
• $a_4 = 14 - a_3 = 14 - (-4) = 18$
⋮

Notar que os termos da sequência são alternadamente iguais a -4 e 18. Isso ocorre porque, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$a_{n+2} = 14 - a_{n+1} = 14 - (14 - a_n) = a_n$

Assim, o décimo termo da sequência é:

$a_{10} = a_8 = a_6 = a_4 = a_2 = 18$

9. a) (1, 1, 2, 3, 5, ...)

b) Resposta esperada: A partir do 3º mês, a quantidade de casais de coelhos corresponde à soma das quantidades de casais nos dois meses anteriores.

c)
- 1º mês: 1
- 2º mês: 1
- 3º mês: $1 + 1 = 2$
- 4º mês: $1 + 2 = 3$
- 5º mês: $2 + 3 = 5$
- 6º mês: $3 + 5 = 8$
- 7º mês: $5 + 8 = 13$
- 8º mês: $8 + 13 = 21$
- 9º mês: $13 + 21 = 34$
- 10º mês: $21 + 34 = 55$
- 11º mês: $34 + 55 = 89$
- 12º mês: $55 + 89 = 144$

Portanto, ao final do 12º mês haverá 144 casais de coelhos.

d) Resposta esperada: $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

10. a) Não é PA, pois $\underbrace{14 - 11}_{3} \neq \underbrace{21 - 14}_{7}$.

b) É PA, pois:

$\underbrace{88 - 70}_{18} = \underbrace{106 - 88}_{18} = \underbrace{124 - 106}_{18} = \underbrace{142 - 124}_{18}$

c) É PA, pois:

$\underbrace{7 - 15}_{-8} = \underbrace{(-1) - 7}_{-8} = \underbrace{(-9) - (-1)}_{-8} = \underbrace{(-17) - (-9)}_{-8}$

d) É PA, pois:

$\underbrace{2{,}5 - 2{,}5}_{0} = \underbrace{2{,}5 - 2{,}5}_{0} = \underbrace{2{,}5 - 2{,}5}_{0} = \underbrace{2{,}5 - 2{,}5}_{0}$

- **b**: $r = 18$, crescente; **c**: $r = -8$, decrescente; **d**: $r = 0$, constante

11. a)
- $a_1 = -2$
- $a_2 = -2 + 7 = 5$
- $a_3 = 5 + 7 = 12$
- $a_4 = 12 + 7 = 19$
- $a_5 = 19 + 7 = 26$

$(-2, 5, 12, 19, 26)$

b)
- $a_3 = a_1 + (3 - 1)r \Rightarrow 13 = a_1 + 2 \cdot 21 \Rightarrow a_1 = -29$
- $a_1 = -29$
- $a_2 = -29 + 21 = -8$
- $a_3 = -8 + 21 = 13$
- $a_4 = 13 + 21 = 34$
- $a_5 = 34 + 21 = 55$

$(-29, -8, 13, 34, 55)$

c)
- $a_1 = 9$
- $a_2 = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$
- $a_3 = \frac{28}{3} + \frac{1}{3} = \frac{29}{3}$
- $a_4 = \frac{29}{3} + \frac{1}{3} = 10$
- $a_5 = 10 + \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$

$\left(9, \frac{28}{3}, \frac{29}{3}, 10, \frac{31}{3}\right)$

d) Como $r = 0$, a PA é constante, sendo ela a PA $(-3, -3, -3, -3, -3)$.

e)
- $a_4 = a_1 + (4 - 1)r \Rightarrow 28 = a_1 + 3 \cdot (-4) \Rightarrow a_1 = 40$
- $a_1 = 40$
- $a_2 = 40 + (-4) = 36$
- $a_3 = 36 + (-4) = 32$
- $a_4 = 32 + (-4) = 28$
- $a_5 = 28 + (-4) = 24$

$(40, 36, 32, 28, 24)$

12. a) É uma PA definida por recorrência com $r = 8 > 0$, logo, é uma PA crescente.

b) É uma PA com termo geral:

$a_n = 9n - 2 \Rightarrow a_n = 9(n - 1) + 9 - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 7 + (n - 1) \cdot 9$

A razão é $r = 9 > 0$, logo, é uma PA crescente.

c) É uma PA definida por recorrência com $r = -6 < 0$, logo, é uma PA decrescente.

d) Não é uma PA, pois:
- $a_1 = -1^2 = -1$
- $a_2 = -2^2 = -4$
- $a_3 = -3^2 = -9$

Assim:

$\underbrace{(-4) - (-1)}_{-3} \neq \underbrace{(-9) - (-4)}_{-5}$

13. Escrevendo a_{11} em função de a_8 e r, temos:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = \underbrace{a_1 + 7r}_{a_8} + 3r \Rightarrow a_{11} = a_8 + 3r$

Assim, a razão r é dada por:

$65 = 47 + 3r \Rightarrow r = 6$

E o primeiro termo a_1 é dado por:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow 65 = a_1 + 10 \cdot 6 \Rightarrow a_1 = 5$

Segue que:
- $a_1 = 5$
- $a_2 = 5 + 6 = 11$
- $a_3 = 11 + 6 = 17$

14. A PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ pode ser expressa como $(a_2 - r, a_2, a_2 + r, a_5 - r, a_5, a_5 + r)$, sendo r a razão da PA.

De acordo com o enunciado:
- $(a_2 - r) + a_2 + (a_2 + r) = 12 \Rightarrow 3a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 4$
- $(a_5 - r) + a_5 + (a_5 + r) = -15 \Rightarrow 3a_5 = -15 \Rightarrow a_5 = -5$

Segue que:

$a_4 - a_3 = r \Rightarrow (a_5 - r) - (a_2 + r) = r \Rightarrow a_5 - a_2 = 3r \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 - 4 = 3r \Rightarrow r = -3$

Assim, os outros termos são:

- $a_1 = 4 - (-3) = 7$
- $a_3 = 4 + (-3) = 1$
- $a_4 = -5 - (-3) = -2$
- $a_6 = -5 + (-3) = -8$

Portanto, a PA é (7, 4, 1, −2, −5, −8).

15. Inicialmente, vamos determinar o termo geral da PA. Temos:

$a_{24} = a_1 + 23r \Rightarrow 73 = a_1 + 23 \cdot 7 \Rightarrow a_1 = -88$

Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = -88 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 7n - 95$

Logo, um número k é um termo da PA se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $7n - 95 = k$.

- Para $k = 17$:
$7n - 95 = 17 \Rightarrow 7n = 112 \Rightarrow n = 16 \in \mathbb{N}^*$

- Para $k = -60$:
$7n - 95 = -60 \Rightarrow 7n = 35 \Rightarrow n = 5 \in \mathbb{N}^*$

- Para $k = 198$:
$7n - 95 = 198 \Rightarrow 7n = 293 \Rightarrow n = \dfrac{293}{7} \notin \mathbb{N}^*$

- Para $k = 39$:
$7n - 95 = 39 \Rightarrow 7n = 134 \Rightarrow n = \dfrac{134}{7} \notin \mathbb{N}^*$

- Para $k = 152$:
$7n - 95 = 152 \Rightarrow 7n = 247 \Rightarrow n = \dfrac{247}{7} \notin \mathbb{N}^*$

- Para $k = -75$:
$7n - 95 = -75 \Rightarrow 7n = 20 \Rightarrow n = \dfrac{20}{7} \notin \mathbb{N}^*$

- Para $k = 220$:
$7n - 95 = 220 \Rightarrow 7n = 315 \Rightarrow n = 45 \in \mathbb{N}^*$

- Para $k = 287$:
$7n - 95 = 287 \Rightarrow 7n = 382 \Rightarrow n = \dfrac{382}{7} \notin \mathbb{N}^*$

- Para $k = 4$:
$7n - 95 = 4 \Rightarrow 7n = 99 \Rightarrow n = \dfrac{99}{7} \notin \mathbb{N}^*$

Portanto, apenas 17, −60 e 220 são termos da PA.

16. Como as medidas formam uma PA, temos:

$10x - (8x - 1) = x + \dfrac{13}{2} - 10x \Rightarrow 2x + 1 = -9x + \dfrac{13}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 11x = \dfrac{11}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Assim, as medidas do trapézio, em centímetros, são:

- base menor: $8 \cdot \dfrac{1}{2} - 1 = 3$
- altura: $10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$
- base maior: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{13}{2} = 7$

Logo, a área do trapézio é:

$\dfrac{3 + 7}{2} \cdot 5 = 25 \rightarrow 25\ \text{cm}^2$

17. Temos $a_1 = -20$ e $r = -27 - (-20) = -7$. Assim:

$a_{72} = a_1 + 71r = -20 + 71 \cdot (-7) = -517$

18. a) Temos $a_1 = 3$ e $r = 11 - 3 = 8$. Vamos determinar n tal que $a_n = 171$:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 171 = 3 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8n = 176 \Rightarrow n = 22$

Portanto, 22 termos.

b) Temos $a_1 = 10$ e $r = 29 - 10 = 19$. Vamos determinar n tal que $a_n = 1\,435$:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 1\,435 = 10 + (n - 1) \cdot 19 \Rightarrow$
$\Rightarrow 19n = 1\,444 \Rightarrow n = 76$

Portanto, 76 termos.

c) Temos $a_1 = 286$ e $r = 244 - 286 = -42$. Vamos determinar n tal que $a_n = -302$:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow -302 = 286 + (n - 1) \cdot (-42) \Rightarrow$
$\Rightarrow 42n = 630 \Rightarrow n = 15$

Portanto, 15 termos.

19. a) A quantidade de municípios atendidos em cada ano do período formam uma PA com $a_1 = 54$ e $a_4 = 189$. Temos:

$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow 189 = 54 + 3r \Rightarrow 3r = 135 \Rightarrow r = 45$

Assim, a quantidade de municípios atendidos eram:

- em 2018:
$a_2 = 54 + 45 = 99 \rightarrow 99$ municípios
- em 2019:
$a_3 = 99 + 45 = 144 \rightarrow 144$ municípios

b) De acordo com a resolução do item **a**, temos $a_1 = 54$ e $r = 45$. Assim:

$a_n > 500 \Rightarrow a_1 + (n - 1)r > 500 \Rightarrow$
$\Rightarrow 54 + (n - 1) \cdot 45 > 500 \Rightarrow 45n > 491 \Rightarrow$
$\Rightarrow n > \dfrac{491}{45} = 10{,}91$

Logo, a empresa ultrapassará 500 municípios atendidos no ano correspondente a $n = 11$, ou seja, em 2027.

20. a) $r = 4$. Resposta esperada: Como devem ser interpolados cinco termos entre −10 e 14, temos que a PA obtida deve ter sete termos, em que $a_1 = -10$ e $a_7 = 14$. Assim, basta fazer $a_7 = -10 + (7 - 1) \cdot r \Rightarrow 14 = -10 + 6r \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 4$.

b) Temos $a_1 = 77$ e $a_{10} = -31$. Assim:

$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow -31 = 77 + 9r \Rightarrow 9r = -108 \Rightarrow r = -12$

Segue que:

- $a_2 = 77 + (-12) = 65$
- $a_3 = 65 + (-12) = 53$
- $a_4 = 53 + (-12) = 41$
- $a_5 = 41 + (-12) = 29$
- $a_6 = 29 + (-12) = 17$
- $a_7 = 17 + (-12) = 5$
- $a_8 = 5 + (-12) = -7$
- $a_9 = -7 + (-12) = -19$

(77, 65, 53, 41, 29, 17, 5, −7, −19, −31)

c) Sendo $a_1 = 19$, $a_n = 264$ e $r = 35$, temos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 264 = 19 + (n - 1) \cdot 35 \Rightarrow$
$\Rightarrow 35n = 280 \Rightarrow n = 8$

Logo, devem-se interpolar 6 meios aritméticos.

21. a) Temos $\dfrac{45}{12} = 3{,}75$ e $\dfrac{290}{12} = 24{,}1\overline{6}$, logo, o primeiro múltiplo de 12 no intervalo é $4 \cdot 12 = 48$ e, o último, $24 \cdot 12 =$
$= 288$. Assim, os múltiplos de 12 formam uma PA em que

$a_1 = 48$, $a_n = 288$ e $r = 12$. Temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 288 = 48 + (n - 1) \cdot 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 12n = 252 \Rightarrow n = 21$
Portanto, existem 21 múltiplos de 12 no intervalo.

b) De maneira similar ao feito no item **a**, temos $\dfrac{105}{12} = 8{,}75$ e $\dfrac{550}{12} = 45{,}8\overline{3}$, logo, $a_1 = 9 \cdot 12 = 108$, $a_n = 45 \cdot 12 = 540$ e $r = 12$. Temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 540 = 108 + (n - 1) \cdot 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 12n = 444 \Rightarrow n = 37$
Portanto, existem 37 múltiplos de 12 no intervalo.

c) De maneira similar ao feito no item **a**, temos $\dfrac{640}{12} = 53{,}\overline{3}$ e $\dfrac{1\,146}{12} = 95{,}5$, logo, $a_1 = 54 \cdot 12 = 648$, $a_n = 95 \cdot 12 = 1\,140$ e $r = 12$. Temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 1\,140 = 648 + (n - 1) \cdot 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 12n = 504 \Rightarrow n = 42$
Portanto, existem 42 múltiplos de 12 no intervalo.

22. a) crescente

b) Temos $a_1 = -54$ e $r = -46 - (-54) = 8$. Assim, o termo geral é:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = -54 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 8n - 62$
Assim, para verificar se 106 é um termo da PA, fazemos:
$8n - 62 = 106 \Rightarrow 8n = 168 \Rightarrow n = 21$
Logo, o número 106 é termo da PA com $a_{21} = 106$.

c) De acordo com a resolução do item **b**, o termo geral é $a_n = 8n - 62$. Assim:
- o 50º termo é:

$a_{50} = 8 \cdot 50 - 62 = 338$
- $a_n > 0 \Rightarrow 8n - 62 > 0 \Rightarrow 8n > 62 \Rightarrow n > 7{,}75$

Logo, o primeiro termo positivo é:
$a_8 = 8 \cdot 8 - 62 = 2$

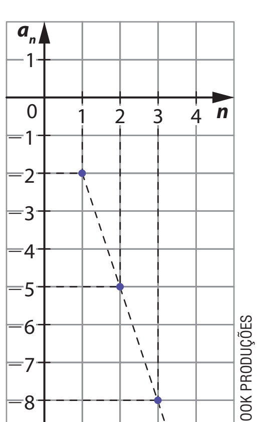
d) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(n) = 8n - 62$

23. a) Se $a_n = f(n) = -3n + 1$ para $n \in \mathbb{N}^*$, temos:
- $a_1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$
- $a_2 = -3 \cdot 2 + 1 = -5$
- $a_3 = -3 \cdot 3 + 1 = -8$

⋮

Assim, temos a PA $(-2, -5, -8, ...)$ em que o primeiro termo é $a_1 = -2$ e a razão é $r = -5 - (-2) = -3$.

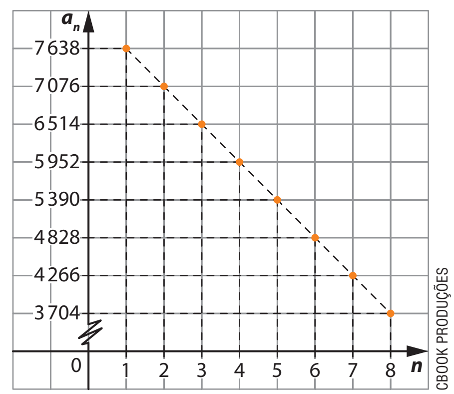
b)



24. a) Temos $a_1 = 7\,638$ e $r = 7\,076 - 7\,638 = -562$. Sendo $a_n = 3\,704$ o último termo da PA, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 3\,704 = 7\,638 + (n - 1) \cdot (-562) \Rightarrow$
$\Rightarrow 562n = 4\,496 \Rightarrow n = 8$
Assim, a PA possui 8 termos, logo, o preço da motocicleta pode ser estimado por até 8 anos de uso.

b) Como $a_1 = 7\,638$ e $r = -562$, o termo geral da PA é:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 7\,638 + (n - 1) \cdot (-562) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -562n + 8\,200$
Assim, definimos $f: A \to \mathbb{R}$, com $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$, tal que $f(n) = -562n + 8\,200$.

c)



25. Resposta pessoal.

26. a) Temos $a_1 = 125\,550$ e $r = -1\,620$. Assim, a fórmula do termo geral é:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 125\,550 + (n - 1) \cdot (-1\,620) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -1\,620n + 127\,170$

b) A quantidade de domicílios com acesso à TV por assinatura em dezembro de 2019 corresponde ao termo a_8. Temos:
$a_8 = -1\,620 \cdot 8 + 127\,170 = 114\,210 \to 114\,210$ domicílios

27. Para resolver os itens **a** e **b**, considere a PA (1, 2, 3, 4, ...) em que o termo geral é $a_n = n$, que expressa a quantidade de copos em cada camada.

a) • 15 camadas:
$$S_{15} = \frac{15 \cdot (a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15 \cdot (1 + 15)}{2} = 120 \to 120 \text{ copos}$$
• 24 camadas:
$$S_{24} = \frac{24 \cdot (a_1 + a_{24})}{2} = \frac{24 \cdot (1 + 24)}{2} = 300 \to 300 \text{ copos}$$

b) • 78 copos:
$$S_n \leqslant 78 \Rightarrow \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \leqslant 78 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{n \cdot (1 + n)}{2} \leqslant 78 \Rightarrow n(n + 1) \leqslant 156$$
Note que, como $n \in \mathbb{N}$, temos $n^2 \leqslant n(n + 1) \leqslant (n + 1)^2$, ou seja, $n(n + 1)$ está entre dois quadrados perfeitos consecutivos. Como $\underbrace{12^2}_{144} \leqslant 156 \leqslant \underbrace{13^2}_{169}$, estimamos que $n = 12$ e calculamos S_{12}:
$$S_{12} = \frac{12 \cdot (1 + 12)}{2} = 78$$

Portanto, podem ser empilhadas no máximo 12 camadas.

- 195 copos:

$$S_n \leqslant 195 \Rightarrow \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \leqslant 195 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot (1 + n)}{2} \leqslant 195 \Rightarrow n(n + 1) \leqslant 390$$

Utilizando o mesmo argumento que o utilizado para 78 copos, observamos que $\underbrace{19^2}_{361} \leqslant 390 \leqslant \underbrace{20^2}_{400}$ e estimamos que $n = 19$ e calculamos S_{19}:

$$S_{19} = \frac{19 \cdot (1 + 19)}{2} = 190$$

Ao somar os copos da 20ª camada, obteríamos um total de $190 + 20 = 210$ copos, o que supera os 195 copos permitidos, logo, podem ser empilhadas no máximo 19 camadas.

28. **a)** Temos $a_1 = 2$, $r = 13 - 2 = 11$ e o último termo é $a_n = 112$. Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 112 = 2 + (n - 1) \cdot 11 \Rightarrow n = 11$

Logo, a PA tem 11 termos a e sua soma é:

$$S_{11} = \frac{11 \cdot (a_1 + a_{11})}{2} = \frac{11 \cdot (2 + 112)}{2} = 627$$

b) Temos $a_1 = 127$, $r = 121 - 127 = -6$ e o último termo é $a_n = -47$. Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow -47 = 127 + (n - 1) \cdot (-6) \Rightarrow n = 30$

Logo, a PA tem 30 termos e sua soma é:

$$S_{30} = \frac{30 \cdot (a_1 + a_{30})}{2} = \frac{30 \cdot [127 + (-47)]}{2} = 1\,200$$

c) Temos $a_1 = 60$, $r = 70 - 60 = 10$ e o último termo é $a_n = 2\,020$. Assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 2\,020 = 60 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow n = 197$

Logo, a PA tem 197 termos e sua soma é:

$$S_{197} = \frac{197 \cdot (a_1 + a_{197})}{2} = \frac{197 \cdot (60 + 2\,020)}{2} = 204\,880$$

29. • X é a soma dos termos da PA em que $a_1 = 10$, $r = 5$ e o último termo é $a_n = 150$. Temos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 150 = 10 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow n = 29$

Logo, a PA tem 29 termos e X é dado por:

$$X = S_{29} = \frac{29 \cdot (a_1 + a_{29})}{2} = \frac{29 \cdot (10 + 150)}{2} = 2\,320$$

- Y é a soma dos termos da PA em que $a_1 = 150$, $r = 3$ e o último termo é $a_n = 198$. Temos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 198 = 150 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 17$

Logo, a PA tem 17 termos e Y é dado por:

$$Y = S_{17} = \frac{17 \cdot (a_1 + a_{17})}{2} = \frac{17 \cdot (150 + 198)}{2} = 2\,958$$

Segue que:

$$X + Y = 2\,320 + 2\,958 = 5\,278$$

30. Temos:

$a_{15} = a_1 + 14r = 4 + 14 \cdot 68 = 956$

Assim:

$$S_{15} = \frac{15 \cdot (a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15 \cdot (4 + 956)}{2} = 7\,200$$

31. Temos:

$$\begin{cases} S_8 = 148 \\ S_{16} = -280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8 \cdot (a_1 + a_8)}{2} = 148 \\ \dfrac{16 \cdot (a_1 + a_{16})}{2} = -280 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_8 = 37 \\ a_1 + a_{16} = -35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 7r = 37 \\ a_1 + a_1 + 15r = -35 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7r = 37 \\ -2a_1 - 15r = 35 \; + \end{cases}$$

$$0a_1 - 8r = 72 \Rightarrow r = -9$$

Substituindo $r = -9$ na equação $2a_1 + 7r = 37$, temos:

$2a_1 + 7 \cdot (-9) = 37 \Rightarrow a_1 = 50$

Como $a_1 = 50$ e $r = -9$, os cinco primeiros termos da PA são 50, 41, 32, 23 e 14.

32. A quantidade de poltronas forma uma PA de 10 termos em que $a_1 = 17$ e $r = 2$. O último termo é:

$a_{10} = a_1 + 9r = 17 + 9 \cdot 2 = 35$

Assim, o total de poltronas é dado por:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \cdot (17 + 35)}{2} = 260 \rightarrow$$

$\rightarrow$ 260 poltronas

33. alternativa **d**

a) Falso. Temos $a_1 = 13$ e $r = 16 - 13 = 3$, assim:

$a_{20} = a_1 + 19r = 13 + 19 \cdot 3 = 70$

Segue que:

$$S_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + a_{20})}{2} = \frac{20 \cdot (13 + 70)}{2} = 830 \neq 2\,150$$

b) Falso. O primeiro termo comum das duas PAs é 16. Os outros termos comuns são todos os números que são a soma de 16 com um número simultaneamente múltiplo de 4 e de 6, logo, esses termos formam uma PA em que $a_1 = 16$ e $r = 12$, pois 12 é o menor número que é múltiplo comum de 4 e 6. Assim:

$a_{10} = a_1 + 9r = 16 + 9 \cdot 12 = 124$

Segue que:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \cdot (16 + 124)}{2} = 700 \neq 660$$

c) Falso. Temos $a_1 = 8$ e $r = 12 - 8 = 4$, assim:

$a_{25} = a_1 + 24r = 8 + 24 \cdot 4 = 104 \neq 108$

d) Verdadeiro. O primeiro termo comum das duas PAs é 16. A partir desse termo, todos os termos seguintes da PA indicada em **II** também são termos da PA indicada em **III**, pois a razão da PA indicada em **II** ($r = 6$) é múltiplo da razão da PA indicada em **III** ($r = 3$). Logo, os termos comuns formam uma PA em que $a_1 = 16$ e $r = 6$. Assim:

$a_{12} = a_1 + 11r = 16 + 11 \cdot 6 = 82$

Segue que:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (a_1 + a_{12})}{2} = \frac{12 \cdot (16 + 82)}{2} = 588$$

34. Temos $a_1 = 34\,000$, $r = 36\,800 - 34\,000 = 2\,800$ e o termo correspondente à quantidade estimada de visitantes em 2030 é o termo a_{10}. Temos:

$a_{10} = a_1 + 9r = 34\,000 + 9 \cdot 2\,800 = 59\,200$

Então, a quantidade total de visitantes de 2021 até 2030 será:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \cdot (34\,000 + 59\,200)}{2} =$$
$$= 466\,000 \rightarrow 466\,000 \text{ visitantes}$$

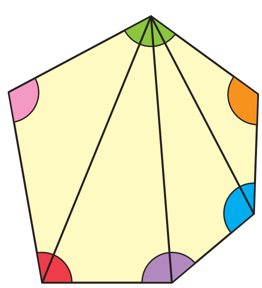
35. $\begin{cases} a_{15} = -40 \\ a_{45} = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 14r = -40 \quad \cdot(-1) \\ a_1 + 44r = 80 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 14r = 40 \\ a_1 + 44r = 80 \end{cases} +$$
$$0a_1 + 30r = 120 \Rightarrow r = 4$$

Substituindo $r = 4$ na equação $a_1 + 14r = -40$, temos:
$a_1 + 14 \cdot 4 = -40 \Rightarrow a_1 = -96$
O último termo da PA é:
$a_{50} = a_1 + 49r = -96 + 49 \cdot 4 = 100$
Assim, a soma dos termos da PA é:

$$S_{50} = \frac{50 \cdot (a_1 + a_{50})}{2} = \frac{50 \cdot (-96 + 100)}{2} = 100$$

36. O hexágono pode ser decomposto em 4 triângulos, logo, a soma das medidas de seus ângulos internos é $4 \cdot 180° = 720°$.


CBOOK PRODUÇÕES

Assim, as medidas dos ângulos internos do hexágono formam uma PA de 6 termos em que $a_6 = 140$ e $S_6 = 720$. Logo:

$$S_6 = \frac{6 \cdot (a_1 + a_6)}{2} \Rightarrow 720 = \frac{6 \cdot (a_1 + 140)}{2} \Rightarrow a_1 = 100$$

A razão r da PA é dada por:
$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow 140 = 100 + 5r \Rightarrow r = 8$
Portanto, as medidas dos demais ângulos internos do hexágono são 100°, 108°, 116°, 124° e 132°.

37. Na primeira figura, adiciona-se 1 palito para formar cada um dos cinco lados do contorno. A partir da segunda figura, adiciona-se uma quantidade constante de 1 palito nos dois lados aproveitados da figura anterior e 1 palito a mais em cada um dos três lados não aproveitados. Logo, a quantidade de palitos adicionados em cada figura forma uma PA com $a_1 = 5$ e $r = 3$. A quantidade de palitos que forma a 10ª figura corresponde a S_{10}, mas, para determinar essa soma, precisamos antes calcular a_{10}:
$a_{10} = a_1 + 9r = 5 + 9 \cdot 3 = 32$
Segue que:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \cdot (5 + 32)}{2} = 185 \rightarrow 185 \text{ palitos}$$

38. Temos:
- $a_1 = S_1 = 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 0$
- $a_1 + a_2 = S_2 \Rightarrow 0 + a_2 = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = 8$

Assim:
- razão: $r = 8 - 0 = 8$
- 40º termo: $a_{40} = a_1 + 39r = 0 + 39 \cdot 8 = 312$

39. a) As parcelas formam uma PA em que $a_1 = x + \frac{1}{3}$, $r = (x + 1) - \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ e o último termo é $a_n = x + \frac{35}{3}$. Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow x + \frac{35}{3} = x + \frac{1}{3} + (n - 1) \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow (n - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{34}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 17 \Rightarrow n = 18$

Segue que:
$S_{18} = 378 \Rightarrow \frac{18 \cdot (a_1 + a_{18})}{2} = 378 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{35}{3}\right) = 42 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 12 = 42 \Rightarrow x = 15$

b) As parcelas formam uma PA em que $a_1 = 4m - 27$, $r = (4m - 10) - (4m - 27) = 17$ e o último termo é $a_n = 4m + 551$. Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow 4m + 551 = 4m - 27 + (n - 1) \cdot 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow (n - 1) \cdot 17 = 578 \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 34 \Rightarrow n = 35$

Segue que:
$S_{35} = 8\,750 \Rightarrow \frac{35 \cdot (a_1 + a_{35})}{2} = 8\,750 \Rightarrow$
$\Rightarrow (4m - 27) + (4m + 551) = 500 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8m + 524 = 500 \Rightarrow m = -3$

c) As parcelas formam uma PA em que $a_1 = 44 + p$, $r = (38 + p) - (44 + p) = -6$ e o último termo é $a_n = -70 + p$. Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow -70 + p = 44 + p + (n - 1) \cdot (-6) \Rightarrow$
$\Rightarrow (n - 1) \cdot 6 = 114 \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 19 \Rightarrow n = 20$

Segue que:
$S_{20} = 540 \Rightarrow \frac{20 \cdot (a_1 + a_{20})}{2} = 540 \Rightarrow$
$\Rightarrow (44 + p) + (-70 + p) = 54 \Rightarrow$
$\Rightarrow -26 + 2p = 54 \Rightarrow p = 40$

40. Vamos calcular o valor total a ser pago em cada opção, em reais.
- Opção **1**: $20\,000 + 60 \cdot 750 = 65\,000$
- Opção **2**: $S_{48} = \frac{48 \cdot (a_1 + a_{48})}{2} =$

$= 24 \cdot (2\,500 + 244) = 65\,856$
Logo, a opção **1** é mais vantajosa, e o valor a ser pago a menos é:
$65\,856 - 65\,000 = 856 \rightarrow$ R$ 856,00

41. Temos:

$$\begin{cases} a_4 + a_9 = 74 \\ S_{10} = 330 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 3r) + (a_1 + 8r) = 74 \\ \dfrac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2} = 330 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 11r = 74 \\ a_1 + a_1 + 9r = 66 \quad \cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 11r = 74 \\ -2a_1 - 9r = -66 \end{cases} +$$

$$0a_1 + 2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

Portanto, a razão é igual a 4.

42. Temos que:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12}}{12} = 92 \Rightarrow \frac{S_{12}}{12} = 92 \Rightarrow \frac{\frac{12 \cdot (a_1 + a_{12})}{2}}{12} = 92 \Rightarrow \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 92$$

Notar que a_2 e a_{11} são termos equidistantes dos extremos a_1 e a_{12}, logo, $a_2 + a_{11} = a_1 + a_{12}$. Assim, a média aritmética dos termos de a_1 até a_{12}, desconsiderando-se a_2 e a_{11}, é:

$$\frac{S_{12} - (a_2 + a_{11})}{10} = \frac{\frac{12 \cdot (a_1 + a_{12})}{2} - (a_1 + a_{12})}{10} = \frac{\frac{10 \cdot (a_1 + a_{12})}{2}}{10} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 92$$

43. a) Notar que não importa a ordem com que as partes são entregues a cada homem, então vamos supor que a PA é crescente. Assim, como as três partes maiores são a_3, a_4 e a_5, temos:

$$\frac{a_3 + a_4 + a_5}{7} = a_1 + a_2 \Rightarrow a_3 + a_4 + a_5 = 7(a_1 + a_2)$$

Além disso, como o total de pães é 100, temos:

- $a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4 + a_5}_{7(a_1 + a_2)} = 100 \Rightarrow 8(a_1 + a_2) = 100 \Rightarrow a_1 + a_2 = \dfrac{25}{2}$
- $S_5 = 100 \Rightarrow \dfrac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = 100 \Rightarrow a_1 + a_5 = 40$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = \dfrac{25}{2} \\ a_1 + a_5 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + r = \dfrac{25}{2} \quad \cdot(-1) \\ a_1 + a_1 + 4r = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - r = -\dfrac{25}{2} \\ 2a_1 + 4r = 40 \end{cases} +$$

$$0a_1 + 3r = \frac{55}{2} \Rightarrow r = \frac{55}{6}$$

Logo, a razão da PA é $\dfrac{55}{6}$. Ao inverter a ordem de entrega dos pães, teríamos uma PA decrescente de razão $-\dfrac{55}{6}$.

b) De acordo com a resolução do item **a**, temos $a_1 + a_2 = \dfrac{25}{2}$ e $r = \dfrac{55}{6}$. Assim:

- $a_1 + a_1 + r = \dfrac{25}{2} \Rightarrow 2a_1 + \dfrac{55}{6} = \dfrac{25}{2} \Rightarrow a_1 = \dfrac{20}{12} = \dfrac{5}{3}$
- $a_2 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{55}{6} = \dfrac{65}{6}$
- $a_3 = \dfrac{65}{6} + \dfrac{55}{6} = 20$
- $a_4 = 20 + \dfrac{55}{6} = \dfrac{175}{6}$
- $a_5 = \dfrac{175}{6} + \dfrac{55}{6} = \dfrac{230}{6} = \dfrac{115}{3}$

Logo, as quantidades recebidas foram $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{65}{6}$, 20, $\dfrac{175}{6}$ e $\dfrac{115}{3}$.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

44. a)
- $q = \dfrac{-10}{-30} = \dfrac{1}{3}$
- Crescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$.

b) • $q = \frac{5}{9} : \frac{5}{9} = 1$
• Constante, pois $q = 1$.

c) • $q = (-4) : (-1) = 4$
• Decrescente, pois $q > 1$ e $a_1 < 0$.

d) • $q = 18 : (-3) = -6$
• Alternante, pois $q < 0$.

e) • $q = 2^{-4} : 2^{-2} = 2^{-2}$
• Decrescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$.

45. a) • $a_1 = \sqrt{7}$
• $a_2 = \sqrt{7} \cdot 4\sqrt{7} = 4 \cdot 7 = 28$
• $a_3 = 28 \cdot 4\sqrt{7} = 112\sqrt{7}$
• $a_4 = 112\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{7} = 448 \cdot 7 = 3\,136$

Portanto, $\sqrt{7}$, 28, $112\sqrt{7}$ e 3 136.

b) $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{1}{40} = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{40} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-4} = \frac{625}{40} = \frac{125}{8}$

• $a_1 = \frac{125}{8}$
• $a_2 = \frac{125}{8} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{25}{8}$
• $a_3 = -\frac{25}{8} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{8}$
• $a_4 = \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{8}$

Portanto, $\frac{125}{8}, -\frac{25}{8}, \frac{5}{8}$ e $-\frac{1}{8}$.

c) $a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 9^5 = a_1 \cdot (9^2)^2 \Rightarrow a_1 = 9^5 \cdot 9^{-4} = 9$
• $a_1 = 9$
• $a_2 = 9 \cdot 9^2 = 9^3$
• $a_3 = 9^3 \cdot 9^2 = 9^5$
• $a_4 = 9^5 \cdot 9^2 = 9^7$

Portanto, 9, 9^3, 9^5 e 9^7.

46. $a_7 = a_1 \cdot q^6 = a_1 \cdot q^3 \cdot q^3 = a_4 \cdot q^3 = (-70) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^3 =$
$= (-70) \cdot \left(-\frac{125}{64}\right) = 35 \cdot \frac{125}{32} = \frac{4\,375}{32}$

47. $\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_6 = a_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = a_1 \cdot q \\ \frac{4}{625} = a_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \cdot q^{-1} \\ a_1 \cdot q^5 = \frac{4}{625} \end{cases}$

Substituindo $a_1 = 4 \cdot q^{-1}$ na segunda equação, temos:

$4 \cdot q^{-1} \cdot q^5 = \frac{4}{625} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{5^4} \Rightarrow q = \frac{1}{5}$ ou $q = -\frac{1}{5}$

Como a PG é decrescente, temos $q = \frac{1}{5}$, pois a razão $q = -\frac{1}{5}$ indica uma PG alternante. Substituindo $q = \frac{1}{5}$ na primeira equação, temos:

$a_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \Rightarrow a_1 = 4 \cdot 5 = 20$

Portanto, $q = \frac{1}{5}$ e $a_1 = 20$.

48. Temos $a_1 = 1$ e $q = 3$. Assim:

a) $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 1 \cdot 3^6 = 729 \rightarrow$ 729 triângulos em preto

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 19\,683 = 1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 3^9 \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10 \rightarrow$ figura **10**

c) Cada figura, a partir da segunda, é formada por triângulos com a medida do lado correspondente à metade da medida dos triângulos em preto da figura anterior. Assim, essas medidas formam a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$.

d) PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer da sequência e seu antecessor é igual a uma constante denominada razão. Nesse caso, a razão é $q = \frac{1}{2}$.

• Fórmula do termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) A medida do lado de cada triângulo, em metros, é:

$a_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

Logo, o perímetro é:

$3 \cdot \frac{1}{32} = \frac{3}{32} \rightarrow \frac{3}{32}$ m

49. alternativa **c**

a) Falso. A população estimada de Boa Vista forma uma PG em que $a_1 = 399\,213$ e $q = 1{,}0635$, sendo a população estimada em 2026 correspondente ao termo a_8. Calculando a_8, temos:

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = 399\,213 \cdot (1{,}0635)^7 \simeq 614\,281$

b) Falso. A população estimada de Porto Alegre forma uma PG em que $a_1 = 1\,483\,771$ e $q = 1{,}0032$. A população estimada em 2021 corresponde ao termo a_3. Calculando a_3, temos:

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 1\,483\,771 \cdot (1{,}0032)^2 \simeq 1\,493\,282$

Portanto, em 2021 a população de Porto Alegre não ultrapassará 1,6 milhão de habitantes.

c) Verdadeiro. A população de cada cidade em 2024 corresponde ao 6º termo da respectiva PG, que representa sua população no decorrer dos anos. Assim, a população de cada cidade nesse ano é:
• Boa Vista: $399\,213 \cdot (1{,}0635)^5 \simeq 543\,115$
• Porto Alegre: $1\,483\,771 \cdot (1{,}0032)^5 \simeq 1\,507\,664$

Temos:

$543\,115 : 1\,507\,664 \simeq 0{,}36 \rightarrow$ aproximadamente 36%

d) Falso. De acordo com a resolução do item **c**, 1 507 664 é a população aproximada de Porto Alegre no ano de 2024.

50. $(x + 1)^2 = (x - 4) \cdot (5x + 11) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 11x - 20x - 44 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 11x - 45 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$

Como os termos são positivos, temos $x = 5$, pois o primeiro termo seria negativo para $x = -\frac{9}{4}$. Assim,

$a_1 = x - 4 = 5 - 4 = 1$ e $q = \dfrac{x+1}{x-4} = \dfrac{5+1}{5-4} = 6$. Segue que:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1 \cdot 6 = 6$
- $a_3 = 6 \cdot 6 = 36$
- $a_4 = 36 \cdot 6 = 216$
- $a_5 = 216 \cdot 6 = 1\,296$

Portanto, 1, 6, 36, 216 e 1 296.

51. Temos $a_1 = 4$, $q = 8 : 4 = 2$ e o último termo é $a_n = 4^{10}$. Assim:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 4^{10} = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow (2^2)^{10} = 2^2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{20} = 2^{n+1} \Rightarrow 20 = n + 1 \Rightarrow n = 19$

Portanto, a PG tem 19 termos.

52. $$\begin{cases} a_2 + a_3 = -\dfrac{4}{9} \\ a_5 + a_6 = \dfrac{12}{343} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = -\dfrac{4}{9} \\ a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = \dfrac{12}{343} \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira equação, temos:

$$\frac{a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2} = \frac{12}{343} : \left(-\frac{4}{9}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q^3(a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2)}{a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2} = \frac{12}{343} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3 = -\frac{27}{343} \Rightarrow q = -\frac{3}{7}$$

Portanto, a razão da PG é $-\dfrac{3}{7}$.

53. a)
- $a_1 = 40$
- $a_2 = 40 \cdot 2 = 80$
- $a_3 = 80 \cdot 2 = 160$
- $a_4 = 160 \cdot 2 = 320$
- $a_5 = 320 \cdot 2 = 640$

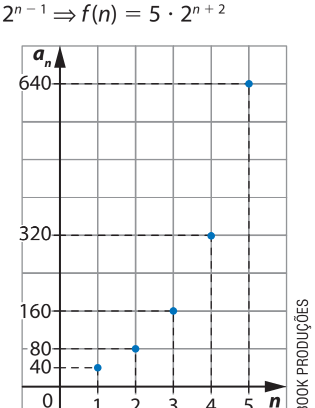
$\vdots$

(40, 80, 160, 320, 640, ...)

b) PG, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo qualquer da sequência e seu antecessor é igual a uma constante denominada razão. Nesse caso, a razão $q = 2$.

c) Temos $a_1 = 40$ e $q = 2$. Assim, o termo geral é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 40 \cdot 2^{n-1}$

d) $f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = 40 \cdot 2^{n-1}$
Como $40 = 2^3 \cdot 5$, também podemos escrever:
$f(n) = 2^3 \cdot 5 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow f(n) = 5 \cdot 2^{n+2}$



e) O tempo, em horas, após o início da análise em que é feita cada verificação forma uma PA em que $b_1 = 0$ e $r = 3$. Após 2 dias, que correspondem a 48 h, é feita a verificação n tal que $b_n = 48$. Temos:
$b_n = b_1 + (n-1)r \Rightarrow 48 = (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 17$
Logo, a quantidade de bactérias após 2 dias é:
$a_{17} = 5 \cdot 2^{17+2} = 2\,621\,440 \rightarrow 2\,621\,440$ bactérias

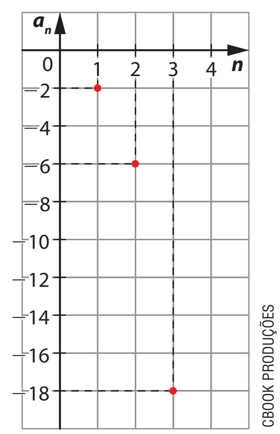
54. O montante da aplicação forma uma PG em que $a_1 = 1\,800$ e $q = 1{,}005$, sendo a_n o montante da aplicação após $n - 1$ meses, para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant 2$. Assim, o montante ao final de três anos de aplicação, que correspondem a 36 meses, é:
$a_{37} = a_1 \cdot q^{36} = 1\,800 \cdot (1{,}005)^{36} \simeq 2\,154{,}02 \rightarrow$ aproximadamente R$ 2.154,02

55. a)
- $a_1 = f(1) = -2 \cdot 3^{1-1} = -2$
- $a_2 = f(2) = -2 \cdot 3^{2-1} = -6$
- $a_3 = f(3) = -2 \cdot 3^{3-1} = -18$

$\vdots$

$(-2, -6, -18, ...)$
Temos $a_1 = -2$ e $q = (-6) : (-2) = 3$.

b)



56. Temos $a_1 = \dfrac{1}{8}$ e $q = \dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4$. Assim, o termo geral da PG é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{8} \cdot 4^{n-1}$
Então, definimos $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(n) = \dfrac{1}{8} \cdot 4^{n-1}$. Observe que:
$\dfrac{1}{8} \cdot 4^{n-1} = \dfrac{1}{2^3} \cdot (2^2)^{n-1} = 2^{-3} \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-5}$
Logo, também podemos escrever $f(n) = 2^{2n-5}$.

57. a) A PG é tal que $a_1 = 32$, $q = \dfrac{48}{32} = \dfrac{3}{2}$ e o último termo é $a_n = 243$. Assim:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 243 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{243}{32} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$
Logo, estima-se que as árvores param de crescer 6 anos após o plantio.

b) Uma resposta possível: $f: A \to \mathbb{R}$, com $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 6\}$, definida por $f(n) = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Temos que $f(4) = 108$; indica que a estimativa de altura dessas árvores, 4 anos após o plantio, é de 108 cm.

58. Resposta pessoal.

59. **a)** Temos $a_1 = -1$ e $q = (-5) : (-1) = 5$. Assim:

$$S_9 = \frac{a_1 \cdot (1 - q^9)}{1 - q} = \frac{(-1) \cdot (1 - 5^9)}{1 - 5} = \frac{1 - 5^9}{4} = -488\,281$$

b) Temos $a_1 = \frac{4}{21}$ e $q = \frac{4}{7} : \frac{4}{21} = \frac{4}{7} \cdot \frac{21}{4} = 3$. Assim:

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (1 - q^6)}{1 - q} = \frac{4}{21} \cdot \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = \frac{2}{21} \cdot (3^6 - 1) = \frac{208}{3}$$

c) Temos $a_1 = 2$ e $q = 6 : 2 = 3$. Assim:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{2 \cdot (1 - 3^{10})}{1 - 3} = 3^{10} - 1 = 59\,048$$

d) Temos $a_1 = 3$ e $q = (-27) : 3 = -9$. Assim:

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot (1 - q^7)}{1 - q} = \frac{3 \cdot \left[1 - (-9)^7\right]}{1 - (-9)} = \frac{3}{10} \cdot (1 + 9^7) =$$
$$= 1\,434\,891$$

60. **a)** $75\,000 \cdot 1{,}12 = 84\,000 \to 84\,000$ entregas

b) O total de entregas esperadas no primeiro semestre de 2020 corresponde à soma dos seis primeiros termos da PG em que $a_1 = 75\,000$ e $q = 1{,}12$, ou seja:

$$S_6 = \frac{a_1 \cdot (1 - q^6)}{1 - q} = \frac{75\,000 \cdot (1 - 1{,}12^6)}{1 - 1{,}12} =$$
$$= 625\,000 \cdot (1{,}12^6 - 1) \simeq 608\,639 \to$$

$\to$ aproximadamente 608 639 entregas

61. alternativa **c**

Temos $a_1 = 3$ e $q = -1$. Assim:

a) Falso, pois:

$$S_{25} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{25})}{1 - q} = \frac{3 \cdot \left[1 - (-1)^{25}\right]}{1 - (-1)} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

b) Falso, pois:

$$a_{38} = a_1 \cdot q^{37} = 3 \cdot (-1)^{37} = -3$$

c) Verdadeiro. Assim como no item **a**, podemos utilizar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG para mostrar que $S_{50} = 0$ ou observar que os termos se anulam em pares, logo, ao somar uma quantidade par de termos consecutivos, o resultado é zero.

d) Falso. A PG é alternante.

62. alternativa **d**

A quantidade total de grãos de trigo corresponde à soma dos 64 primeiros termos da PG em que $a_1 = 1$ e $q = 2$, ou seja:

$$S_{64} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{64})}{1 - q} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{64})}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

63. Temos $a_1 = 7$ e, sendo n a quantidade de termos, $a_n = -54\,432$ e $S_n = -46\,655$. Assim, a razão q é dada por:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \Rightarrow -46\,655 = \frac{-54\,432 \cdot q - 7}{q - 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -46\,655q + 46\,655 = -54\,432q - 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7\,777q = -46\,662 \Rightarrow q = -6$$

64. Temos:

$$a_8 = a_1 \cdot q^7 = a_1 \cdot q^2 \cdot q^5 = a_3 \cdot q^5$$

Assim:

$$\frac{25}{32} = 800 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{1}{1\,024} \Rightarrow q^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

Para determinar o primeiro termo, observe que:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 800 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow a_1 = 12\,800$$

Segue que a soma dos termos da PG é:

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{\frac{25}{32} \cdot \frac{1}{4} - 12\,800}{\frac{1}{4} - 1} =$$
$$= \frac{-\frac{1\,638\,375}{128}}{-\frac{3}{4}} = \frac{546\,125}{32}$$

65. Os termos da PG em que $a_1 = 20$ e $q = 0{,}65$, a partir do 2º termo, correspondem às alturas, em metros, que a bola atinge após cada choque com o solo, sendo o termo a_{n+1} a altura atingida após o n-ésimo choque.

a) A altura que a bola atinge após o 4º choque é:

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 0{,}65^4 \simeq 3{,}57 \to$ aproximadamente 3,57 m

b) • No momento em que se choca com o solo pela 2ª vez, a bola percorreu as distâncias correspondentes à descida da bola das alturas a_1 e a_2 e à subida da bola até a altura a_2, ou seja:

$a_1 + 2a_2 = 20 + 2 \cdot (20 \cdot 0{,}65) = 46 \to 46$ m

• No momento em que se choca com o solo pela 5ª vez, a bola percorreu as distâncias correspondentes à descida da bola das alturas a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 e à subida da bola até as alturas a_2, a_3, a_4 e a_5. O total percorrido corresponde a:

$$2S_5 - a_1 =$$
$$= 2 \cdot \frac{a_1 \cdot (1 - q^5)}{1 - q} - a_1 = 2 \cdot \frac{20 \cdot (1 - 0{,}65^5)}{1 - 0{,}65} - 20 =$$
$$= 81{,}02525 \to 81{,}02525 \text{ m}$$

66. **a)** Resposta esperada: De acordo com a ordem das linhas, o primeiro número das sequências corresponde a um termo de uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = 2$. Já em cada linha, a sequência corresponde a uma PA de razão $r = 3$. Na 1ª linha tem apenas um número e, a partir da 2ª linha, a quantidade de números é o dobro da que tem na linha anterior.

b) O primeiro termo da PA da 6ª linha corresponde ao sexto termo da PG de primeiro termo 3 e razão 2, ou seja:

$a_1 = 3 \cdot 2^5 = 96$

A quantidade n de termos dessa PA corresponde ao sexto termo da PG de primeiro termo 1 e razão 2, ou seja:

$n = 1 \cdot 2^5 = 32$

Como a razão dessa PA é $r = 3$, o seu último termo é:

$a_{32} = a_1 + 31r = 96 + 31 \cdot 3 = 189$

Assim, a soma dos termos da sequência da 6ª linha é:

$S_{32} = \dfrac{32 \cdot (a_1 + a_{32})}{2} = \dfrac{32 \cdot (96 + 189)}{2} = 4\,560$

67. **a)** Temos $a_1 = -4$ e $q = -\dfrac{1}{4}$, assim:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{-4}{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)} = -4 \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{16}{5}$

b) Temos $a_1 = 625$ e $q = \dfrac{125}{625} = \dfrac{1}{5}$, assim:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{625}{1 - \dfrac{1}{5}} = 625 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{3\,125}{4}$

c) Temos $a_1 = \dfrac{3}{7}$ e $q = \left(-\dfrac{1}{7}\right) : \dfrac{3}{7} = -\dfrac{1}{3}$, assim:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{3}{7}}{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{28}$

d) Temos $a_1 = 25$ e $q = 0{,}25 : 25 = \dfrac{1}{100}$, assim:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{25}{1 - \dfrac{1}{100}} = 25 \cdot \dfrac{100}{99} = \dfrac{2\,500}{99}$

68. **a)** $1{,}7777... = 1 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + ... =$

$= 1 + \underbrace{\dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1\,000} + \dfrac{7}{10\,000} + ...}_{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n}$

As parcelas destacadas formam uma PG em que $a_1 = \dfrac{7}{10}$ e $q = \dfrac{7}{100} : \dfrac{7}{10} = \dfrac{1}{10}$, logo:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{7}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{10}{9} = \dfrac{7}{9}$

Assim:

$1{,}7777... = 1 + \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1 + \dfrac{7}{9} = \dfrac{16}{9}$

b) $8{,}\overline{112} = 8 + 0{,}112 + 0{,}000112 + 0{,}000000112 + ... =$

$= 8 + \underbrace{\dfrac{112}{10^3} + \dfrac{112}{10^6} + \dfrac{112}{10^9} + ...}_{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n}$

As parcelas destacadas formam uma PG em que $a_1 = \dfrac{112}{10^3}$ e $q = \dfrac{112}{10^6} : \dfrac{112}{10^3} = \dfrac{1}{10^3}$, logo:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{112}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^3}} = \dfrac{112}{10^3} \cdot \dfrac{10^3}{999} = \dfrac{112}{999}$

Assim:

$8{,}\overline{112} = 8 + \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 8 + \dfrac{112}{999} = \dfrac{8\,104}{999}$

c) $-0{,}9191... = (-1) \cdot (0{,}91 + 0{,}0091 + 0{,}000091 + ...) =$

$= (-1) \cdot \underbrace{\left(\dfrac{91}{10^2} + \dfrac{91}{10^4} + \dfrac{91}{10^6} + ...\right)}_{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n}$

As parcelas da soma destacada formam uma PG em que $a_1 = \dfrac{91}{10^2}$ e $q = \dfrac{91}{10^4} : \dfrac{91}{10^2} = \dfrac{1}{10^2}$, logo:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{91}{10^2}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = \dfrac{91}{10^2} \cdot \dfrac{10^2}{99} = \dfrac{91}{99}$

Assim:

$-0{,}9191... = (-1) \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = (-1) \cdot \dfrac{91}{99} = -\dfrac{91}{99}$

d) $2{,}\overline{39} = 2 + 0{,}39 + 0{,}0039 + 0{,}000039 + ... =$

$= 2 + \underbrace{\dfrac{39}{10^2} + \dfrac{39}{10^4} + \dfrac{39}{10^6} + ...}_{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n}$

As parcelas destacadas formam uma PG em que $a_1 = \dfrac{39}{10^2}$ e $q = \dfrac{39}{10^4} : \dfrac{39}{10^2} = \dfrac{1}{10^2}$, logo:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\dfrac{39}{10^2}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = \dfrac{39}{10^2} \cdot \dfrac{10^2}{99} = \dfrac{39}{99}$

Assim:

$2{,}\overline{39} = 2 + \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2 + \dfrac{39}{99} = \dfrac{237}{99} = \dfrac{79}{33}$

- Resposta pessoal.

69. alternativa **d**

A partir da 2ª circunferência, o quociente do perímetro de cada circunferência com o perímetro da circunferência anterior é $\dfrac{2\pi r}{2\pi \cdot 2r} = \dfrac{1}{2}$, logo, os perímetros das circunferências formam uma PG em que $a_1 = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ e $q = \dfrac{1}{2}$. Assim, o limite da soma dos perímetros das circunferências é:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{20\pi}{1 - \dfrac{1}{2}} = 20\pi \cdot 2 = 40\pi \to 40\pi$ cm

70. As parcelas do 1º membro formam uma PG em que $a_1 = x$ e $q = \dfrac{x}{5} : x = \dfrac{1}{5}$. Assim:

$\underbrace{x + \dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{25} + ...}_{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n} = 30 \Rightarrow \dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{5}} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \dfrac{5}{4} = 30 \Rightarrow x = 24$

Integrando

1. Resposta pessoal.
2. Respostas pessoais.
3. a) Gráfico de segmentos.
   b) De 1960 até 2060. A população brasileira de 2020 até 2060.
   c) Década de 2050.
4. a) Resposta pessoal.
   b) Resposta pessoal.
5. a) Método geométrico. Método aritmético.
   b) Método aritmético: $22\,000 + 2\,000 = 24\,000 \rightarrow$ 24 000 habitantes
   Método geométrico: $29\,860 \cdot 1{,}2 = 35\,832 \rightarrow$ aproximadamente 35 832 habitantes
   c) Resposta esperada: Não, pois nas estimativas realizadas a população não cresce igualmente em valores absolutos nem a uma mesma taxa de crescimento.
6. a) Respostas pessoais.
   b) Resposta pessoal.
   c) Resposta pessoal.

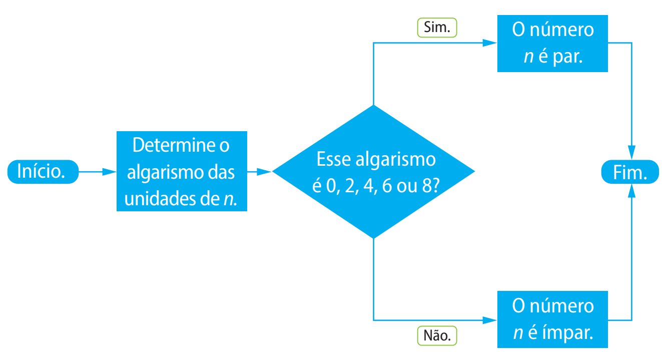
---

71. **a)** Resposta esperada: Todo número natural é par ou é ímpar, sendo que qualquer número par é divisível por 2.

b) Sim. O passo que questiona se a divisão, realizada no passo anterior, tem resto igual a zero.

c) • 237: Primeiro, realizamos a divisão $237 : 2$, obtendo quociente 118 e resto 1. Como o resto da divisão não é igual a zero, concluímos que 237 é ímpar.
• 108: Primeiro, realizamos a divisão $108 : 2 = 54$, com resto zero. Como o resto da divisão é igual a zero, concluímos que 108 é par.

d) Uma resposta possível:



EDITORIA DE ARTE

72. **a)** O currículo é arquivado e retoma-se o processo.

b) Resposta esperada: Não, além da análise de currículo, também são analisadas as referências pessoais e profissionais do candidato e realizada uma entrevista para indicação de um candidato apto ao cargo.

c) Verificar se a entrevista indica um candidato apto ao cargo.

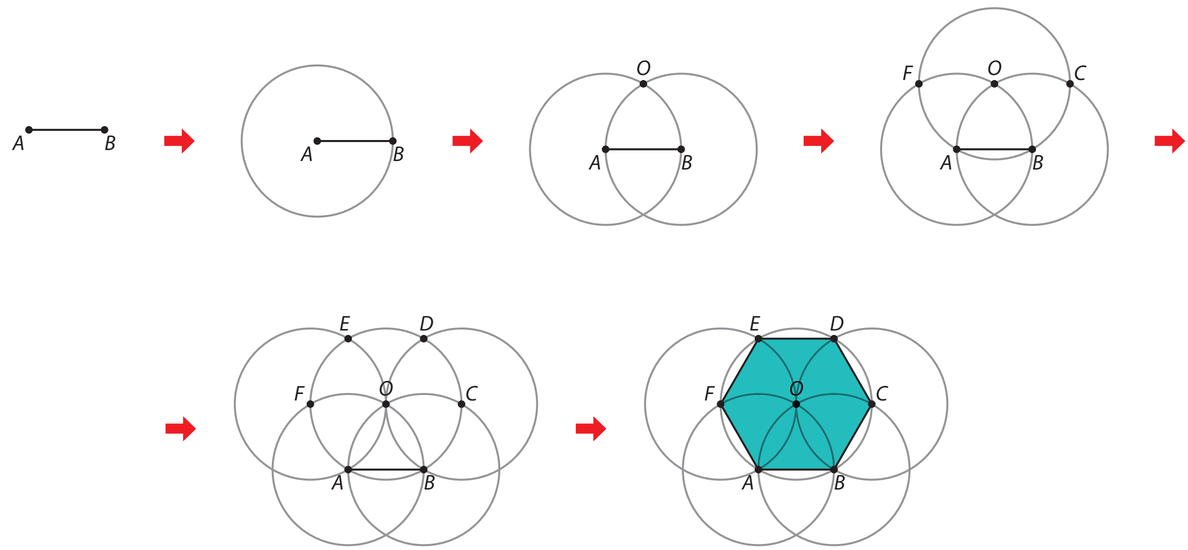
d) Resposta pessoal.

73. De acordo com o fluxograma:
- $a_1 = 5$
- $a_2 = 5 \cdot (-2) + 7 = -3$
- $a_3 = (-3) \cdot (-2) + 7 = 13$
- $a_4 = 13 \cdot (-2) + 7 = -19$

$\vdots$

Portanto, $(5, -3, 13, -19, ...)$.
$a_n = -2a_{n-1} + 7$ e $a_1 = 5$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$

74. **e – a – d – f – c – b**



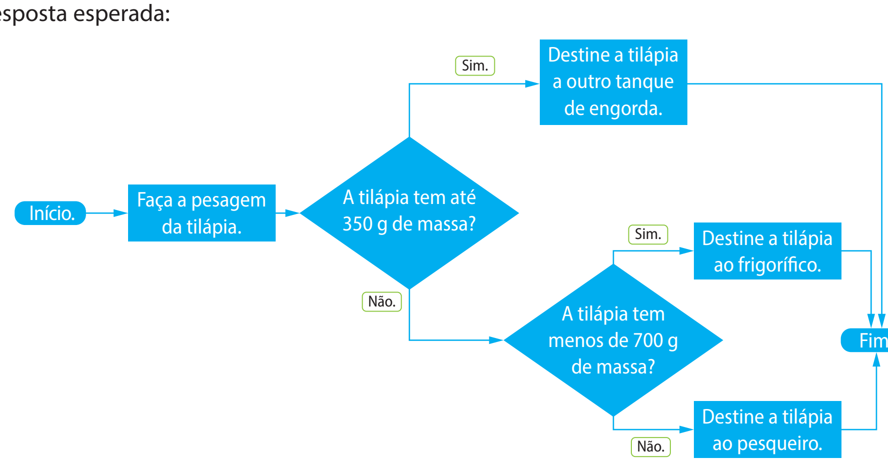
CBOOK PRODUÇÕES

75. Resposta esperada:

- Utilizar a régua para traçar um segmento *AB* com 3 cm de comprimento, um lado do triângulo.
- Com abertura de medida *AB*, fixar a ponta-seca do compasso em *A* e traçar uma circunferência.
- Com a mesma abertura, fixar a ponta-seca do compasso em *B* e traçar outra circunferência. Marcar o ponto *C* em um dos cruzamentos das circunferências.
- Com a régua, traçar $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. Por fim, colorir a região interna da figura obtida.

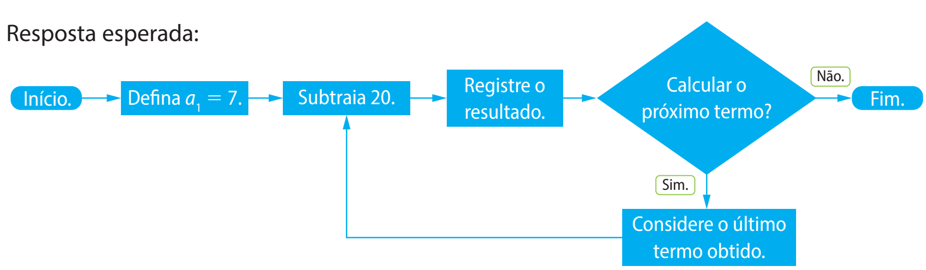
76. **a)** • 495 g: frigorífico, pois $350 < 495 < 700$.
- 810 g: pesqueiro, pois $810 \geqslant 700$.
- 309 g: tanque de engorda, pois $309 \leqslant 350$.

b) Resposta esperada:



EDITORIA DE ARTE

77. **a)** Resposta esperada:



EDITORIA DE ARTE

b) A sequência é uma PA em que $a_1 = 7$ e $r = -20$, assim:
$a_9 = a_1 + 8r = 7 + 8 \cdot (-20) = -153$

78. Resposta pessoal.

79. a) Exemplo **1**: variáveis: x, y, z; operadores: $+$, $=$. Exemplo **2**: variáveis: a, b, soma; operadores: $+$, $=$.

b) É calculada a soma $10 + 5 = 15$.

c) Resposta esperada: No exemplo **1**, o algoritmo realiza a adição de dois números inteiros predefinidos, 10 e 5; já no exemplo **2**, o algoritmo realiza a adição de dois números quaisquer do tipo real, que devem ser inseridos ao executar o algoritmo.

d) Uma resposta possível:
Início
real: *a*, *b*, *c*, produto
escreva ("Digite o primeiro número: ");
leia *a*
escreva ("Digite o segundo número: ");
leia *b*
escreva ("Digite o terceiro número: ");
leia *c*
produto = *a* * *b* * *c*
escreva ("O produto dos números é igual a: ", produto);
Fim

80. a) itens **I** e **III**

- I: $\underbrace{10 + 18}_{28} > 26$; $\underbrace{10 + 26}_{36} > 18$; $\underbrace{18 + 26}_{44} > 10$.

É possível construir um triângulo.

- II: $\underbrace{7 + 9}_{16} > 1$; $\underbrace{7 + 1}_{8} < 9$.

Não é possível construir um triângulo.

- III: $\underbrace{3 + 4}_{7} > 5$; $\underbrace{3 + 5}_{8} > 4$; $\underbrace{4 + 5}_{9} > 3$.

É possível construir um triângulo.

- IV: $\underbrace{13 + 21}_{34} > 8$; $\underbrace{13 + 8}_{21} = 21$.

Não é possível construir um triângulo.

b) Algumas respostas possíveis:

- 9, 5 e 2, pois $\underbrace{5 + 2}_{7} < 9$.
- 15, 1 e 17, pois $\underbrace{15 + 1}_{16} < 17$.
- 5, 3 e 2, pois $\underbrace{3 + 2}_{5} = 5$.

81. alternativa **d**, pois, se a, x e b são três termos consecutivos de uma PA, então o termo central x é dado por $x = \dfrac{a + b}{2}$. O algoritmo proposto também pode ser utilizado para calcular a média aritmética de dois números.

82. a) Figura **II**, pois, a cada uma das 6 repetições, determina-se um segmento de 150 unidades de comprimento e a direção é alterada em 60°, que corresponde à medida do ângulo externo de um hexágono regular, resultando na representação de um hexágono regular com 150 unidades de lado.

b) Resposta esperada: **I** – Use a caneta; repita 5 vezes (mova 150 passos; gire 72 graus para a direita).
III – Use a caneta; repita 3 vezes (mova 150 passos; gire 120 graus para a direita).

83. a) Resposta esperada: Recursiva, pois, para obter esse termo, o termo anterior é multiplicado por -5.

b) razão: $q = -5$
primeiro termo: $a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 10 = a_1 \cdot (-5) \Rightarrow a_1 = -2$

c)
- recursiva: $a_n = -5 \cdot a_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 2$ e $a_1 = -2$
- não recursiva: $a_n = -2 \cdot (-5)^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}^*$

84. a) Uma resposta possível: **III**, **V**, **II**, **IV** e **I**.

b) Uma resposta possível:
Após clicar na bandeira verde, o código é executado da seguinte maneira:
- III: A bandeira foi clicada;
- V: x tem o valor alterado para 2;
- II: É adicionado 10 a x, que passa a ter o valor $2 + 10 = 12$;
- IV: $f(x)$ tem o valor alterado para $x \cdot 2$, que corresponde a $12 \cdot 2 = 24$;
- I: O personagem fala o valor de $f(x)$, que é 24.

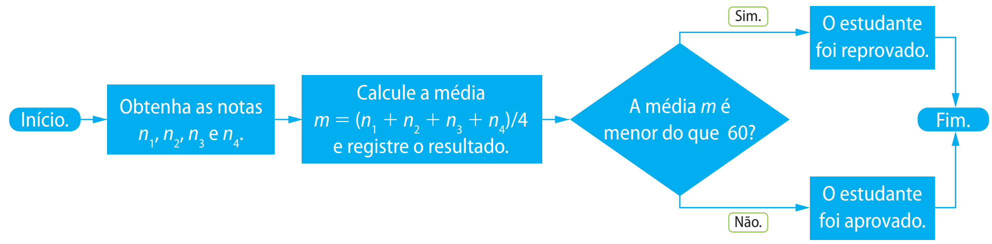
c) Uma resposta possível: $f(x) = 2(x + 10)$ ou $f(x) = 2x + 20$.

85. a) 62,5. Aprovado.

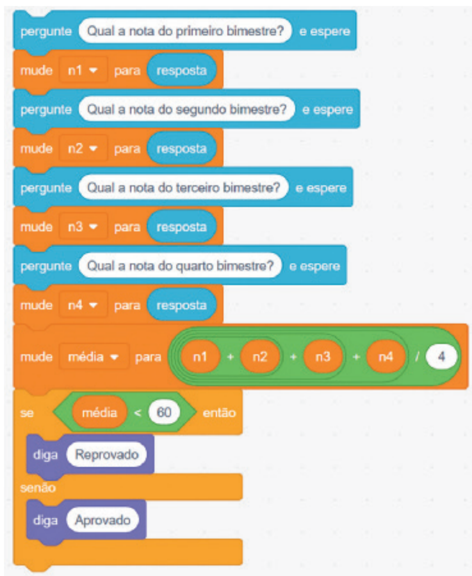
b) Temos: $\dfrac{45 + 66 + 50 + 63}{4} = \dfrac{224}{4} = 56$

Logo, na célula **B6** aparecerá 56 e, como $56 < 60$, aparecerá o texto “Reprovado” na célula **E6**.

c) Uma resposta possível:

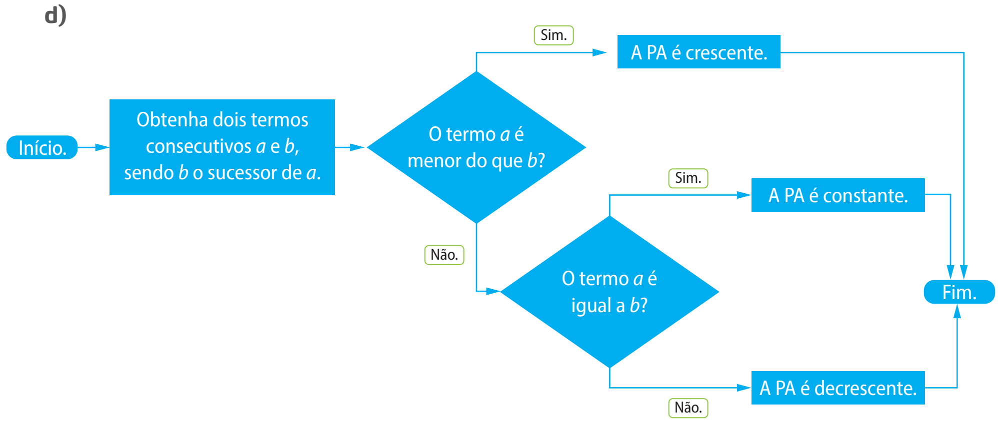


EDITORIA DE ARTE



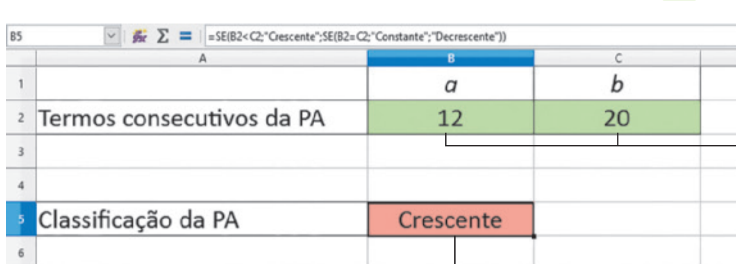
FUNDAÇÃO SCRATCH/LIFELONG KINDERGARTEN NO MIT MEDIA

d)



EDITORIA DE ARTE

LIBREOFFICE CALC



Nas células **B2** e **C2**, digitam-se os termos consecutivos *a* e *b*, sendo *b* o sucessor de *a*.

Na célula **B6** foi digitada a fórmula SE(B2,C2,”Crescente”,SE(B2=C2,”Constante”,”Decrescente”)). Com isso, se a for menor que b, apresenta-se o texto ”Crescente”; senão, faz-se outra verificação de modo que, se *a* for igual a *b*, apresenta-se o texto ”Constante”, caso contrário, apresenta-se o texto ”Decrescente”.

86. Respostas pessoais.

O que estudei

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. **a)** I. A cada minuto, utilizam-se $24 \cdot 60 = 1\,440$ quadros.
Assim, os cinco primeiros termos da sequência são:
   - $1\,440 \cdot 1 = 1\,440$
   - $1\,440 \cdot 2 = 2\,880$
   - $1\,440 \cdot 3 = 4\,320$
   - $1\,440 \cdot 4 = 5\,760$
   - $1\,440 \cdot 5 = 7\,200$

   Essa sequência é uma PA em que $a_1 = 1\,440$ e $r = 1\,440$.
   II. $f(n) = 1\,440n$
   III. Temos:
   1h15min = (60 + 15) min = 75 min
   Assim, o total de quadros utilizados é:
   $f(75) = 1\,440 \cdot 75 = 108\,000 \rightarrow 108\,000$ quadros

   b) I. Uma resposta possível:
   A cada personagem a mais no filme, a quantidade de comandos é multiplicada por 2. Assim, as quantidades são:
   - 1 personagem: 2 000
   - 2 personagens: $2\,000 \cdot 2 = 4\,000$
   - 3 personagens: $4\,000 \cdot 2 = 8\,000$
   - 4 personagens: $8\,000 \cdot 2 = 16\,000$
   - 5 personagens: $16\,000 \cdot 2 = 32\,000$
   - 6 personagens: $32\,000 \cdot 2 = 64\,000$
   - 7 personagens: $64\,000 \cdot 2 = 128\,000$
   - 8 personagens: $128\,000 \cdot 2 = 256\,000$
   - 9 personagens: $256\,000 \cdot 2 = 512\,000$
   - 10 personagens: $512\,000 \cdot 2 = 1\,024\,000$

   Essa sequência é uma PG em que $a_1 = 2\,000$ e $q = 2$.
   II. $f(p) = 2\,000 \cdot 2^{p-1}$

   c) Resposta pessoal.

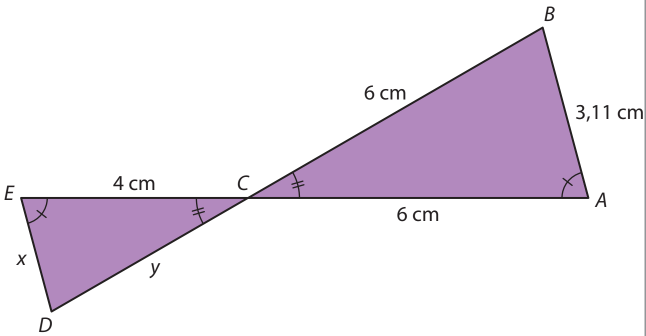
Unidade 2 • Relações métricas e trigonometria no triângulo

1. **a)** $\frac{212}{106} = \frac{234}{x} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{234}{x} \Rightarrow x = \frac{234}{2} = 117 \rightarrow$
$\rightarrow 117$ cm

   b) $\frac{x}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2 \rightarrow 2$ cm
2. alternativa **a**
$\frac{3{,}21}{y} = \frac{3{,}94}{2{,}54} \Rightarrow 3{,}94y = 8{,}1534 \Rightarrow y \simeq 2{,}07$
Assim, a área do triângulo de base 5 m e altura y é aproximadamente igual a:
$\frac{5 \cdot 2{,}07}{2} = 5{,}175 \rightarrow$ aproximadamente 5,17 m^2
3. alternativa **a**
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-2}{9} = \frac{x}{5x-10} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x^2 - 15x + 10 = 12x \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$
Para $x = \frac{4}{5}$, as medidas AD e EC seriam negativas, logo, devemos ter $x = 5$. Segue que o perímetro do triângulo ABC é:
$(x - 2) + 9 + 16 + (5x - 10) + x = 7\underset{5}{\underbrace{x}} + 15 =$
$= 7 \cdot 5 + 13 = 48 \rightarrow 48$ cm
4. alternativa **b**
$\frac{57{,}6}{18} = \frac{x+18}{15} \Rightarrow 3{,}2 = \frac{x+18}{15} \Rightarrow x + 18 = 48 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 30 \rightarrow 30$ m
5. Como a propriedade tem a forma de um trapézio, os lados de medidas 3 km e 10,84 km são paralelos, pois correspondem às bases do trapézio. Além disso, como os ângulos indicados são congruentes, a cerca dividindo a propriedade será paralela a essas bases. Assim, pelo teorema de Tales:
$\frac{5}{2} = \frac{3{,}4}{x} \Rightarrow 5x = 6{,}8 \Rightarrow x = 1{,}36$
Então, o comprimento total da cerca, em km, que será construída é:
$3 + 3{,}4 + 1{,}36 + 10{,}84 + 2 + 5 + 8{,}6 = 34{,}2$
Como 34,2 km = 34 200 m, o custo total da cerca será:
$34\,200 \cdot 0{,}20 = 6\,840 \rightarrow$ R$ 6.840,00
6. Resposta pessoal.
7. De acordo com a figura, os ângulos $A\hat{B}C$, $C\hat{D}A$, $E\hat{F}G$ e $G\hat{H}E$ são todos congruentes entre si, logo, como dois ângulos adjacentes de um paralelogramo qualquer são suplementares, os ângulos $D\hat{A}B$, $B\hat{C}D$, $H\hat{E}F$ e $F\hat{G}H$ também são congruentes entre si. Além disso, os lados correspondentes são proporcionais entre si, pois:
   - $\frac{BC}{FG} = \frac{AD}{EH} = \frac{300}{75} = 4$
   - $\frac{CD}{GH} = \frac{AB}{EF} = \frac{212}{53} = 4$

   Portanto, os paralelogramos são semelhantes com razão de semelhança igual a 4.
8. • Triângulo **a**: A medida do ângulo interno não indicada é:
$180° - (72° + 66°) = 42°$
Notar que o triângulo **c** também possui um ângulo com essa medida e os lados que formam esse ângulo possuem medidas tais que:
$\frac{24}{12} = \frac{25}{12{,}5} = 2$
Logo, pelo caso **LAL**, os triângulos **a** e **c** são semelhantes.
• Triângulo **b**: Os três lados do triângulo **b** são proporcionais aos lados do triângulo **e**, pois:
$\frac{24}{4{,}8} = \frac{18}{3{,}6} = \frac{15}{3} = 5$
Logo, pelo caso **LLL**, os triângulos **b** e **e** são semelhantes.
• Triângulo **d**: A medida do ângulo interno não indicada é:
$180° - (60° + 45°) = 75°$
Como os triângulos **d** e **f** possuem ângulos de 45° e 75°, então, pelo caso **AA**, esses triângulos são semelhantes.

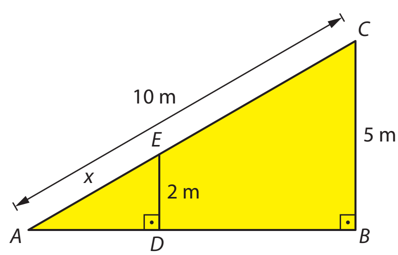
9. Observe, na figura abaixo, que os ângulos $A\hat{C}B$ e $E\hat{C}D$ são congruentes, pois são opostos pelo vértice.



Então, pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, temos que $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. Assim:

- $\dfrac{ED}{AB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow \dfrac{x}{3{,}11} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow x \simeq 2{,}07 \rightarrow$ $\rightarrow$ aproximadamente 2,07 cm
- $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow \dfrac{y}{6} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow y = 4 \rightarrow 4$ cm

10. a)



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

b) Os ângulos $E\hat{A}D$ e $C\hat{A}B$ são coincidentes e os ângulos $E\hat{D}A$ e $C\hat{B}A$ são congruentes, pois são ambos retos, logo, pelo caso de semelhança **AA**, temos que $\Delta EAD \sim \Delta CAB$. Assim:

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{ED}{CB} \Rightarrow \dfrac{x}{10} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow x = 4 \rightarrow 4$ m

11. a)

- **A:** $\dfrac{800}{600} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$
- **B:** $\dfrac{1\,600}{1\,200} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$
- **C:** $\dfrac{1\,280}{720} = \dfrac{128}{72} = \dfrac{16}{9}$
- **D:** $\dfrac{1\,024}{768} = \dfrac{4}{3}$
- **E:** $\dfrac{1\,600}{900} = \dfrac{16}{9}$

Logo, as resoluções **A**, **B** e **D** são utilizadas em formato de DVD padrão, e as resoluções **C** e **E**, em formato *widescreen*.

b) Resposta esperada: Sim, elas têm formatos de polígonos semelhantes quando obtidas nas resoluções **A**, **B** e **D** e quando obtidas nas resoluções **C** e **E**. Nessas situações, possuem, respectivamente, ângulos internos congruentes (ângulos retos) e lados correspondentes proporcionais.

12. Resposta pessoal.

13. a) Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 12{,}8^2 + 9{,}6^2 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{256} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ \quad\text{ou} \\ x = -16 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, x corresponde a 16 cm.

b) Utilizando a relação $h^2 = m \cdot n$, temos:

$26^2 = 15 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{676}{15} \simeq 45$

Portanto, x corresponde a aproximadamente 45 mm.

c) Seja c a medida do cateto $\overline{AB}$. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} c = 5 \\ \quad\text{ou} \\ c = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Utilizando a relação $c \cdot h = b \cdot n$, temos:

$5 \cdot 4 = x \cdot 3 \Rightarrow x = \dfrac{20}{3} \simeq 6{,}67$

Portanto, x corresponde a aproximadamente 6,67 m.

d) Utilizando a relação $h^2 = m \cdot n$, temos:

$12^2 = 16 \cdot x \Rightarrow x = 9$

Portanto, x corresponde a 9 dm.

14. alternativa **a**

Utilizando a relação $b^2 = a \cdot m$, temos:

$36^2 = 45 \cdot m \Rightarrow m = \dfrac{1\,296}{45} = \dfrac{144}{5}$

Observe que m é a medida da projeção do cateto de medida 36 m, logo, a medida da projeção do outro cateto é $n = 45 - \dfrac{144}{5} = \dfrac{81}{5}$. Assim:

$m \cdot n = \dfrac{144}{5} \cdot \dfrac{81}{5} = 466{,}56$

Portanto, o produto das medidas das projeções é de aproximadamente 467.

15. a) Seja x a medida do outro cateto. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$6^2 = x^2 + 3{,}6^2 \Rightarrow x^2 = 23{,}04 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{23{,}04} \Rightarrow \begin{cases} x = 4{,}8 \\ \quad\text{ou} \\ x = -4{,}8 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o outro cateto mede 4,8 cm.

b) Utilizando a relação $a \cdot h = b \cdot c$, temos:

$6 \cdot h = 3{,}6 \cdot 4{,}8 \Rightarrow h = 2{,}88$

Portanto, a altura relativa à hipotenusa mede 2,88 cm.

c) Utilizando a relação $c^2 = a \cdot n$ para obter a medida n da projeção do cateto de medida 3,6 cm sobre a hipotenusa, temos:

$3{,}6^2 = 6 \cdot n \Rightarrow n = 2{,}16$

Logo, a medida m da projeção do outro cateto é $m = 6 - 2{,}16 = 3{,}84$. Portanto, as medidas das projeções são 2,16 cm e 3,84 cm.

16. a) O raio da circunferência mede, em cm:

$r = \dfrac{21 + 7}{2} = 14$

Logo, o comprimento da circunferência é:

$2\pi \cdot 14 = 28\pi \rightarrow 28\pi$ cm ou aproximadamente 87,92 cm

b) Utilizando a relação $h^2 = m \cdot n$ para obter a medida h da altura relativa à hipotenusa, temos que:

$h^2 = 21 \cdot 7 \Rightarrow h^2 = 3 \cdot 7^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \pm\sqrt{3 \cdot 7^2} \Rightarrow \begin{cases} h = 7\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ h = -7\sqrt{3} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, a área do triângulo é:

$$\frac{(21 + 7) \cdot 7\sqrt{3}}{2} = 98\sqrt{3} \rightarrow 98\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

ou aproximadamente 169,74 cm^2

17. Sendo $a_1 = 6$ o primeiro termo e $r = 3$ a razão, temos:

- $a_{59} = a_1 + 58r = 6 + 58 \cdot 3 = 180$
- $a_{79} = a_1 + 78r = 6 + 78 \cdot 3 = 240$

Assim, pelo teorema de Pitágoras, a medida a da hipotenusa é dada por:

$a^2 = 180^2 + 240^2 \Rightarrow a^2 = 90\,000 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{90\,000} \Rightarrow \begin{cases} a = 300 \\ \text{ou} \\ a = -300 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, a hipotenusa mede 300 cm.

18. a) Resposta esperada: Como a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados do triângulo é igual à área do quadrado construído sobre o maior lado, pode-se concluir que as medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo e que os números 3, 4 e 5 formam um terno pitagórico.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

19. Inicialmente, vamos determinar a medida do lado AB:

$43^2 = AB^2 + 35^2 \Rightarrow AB^2 = 624 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = \pm\sqrt{16 \cdot 39} \Rightarrow \begin{cases} AB = 4\sqrt{39} \\ \text{ou} \\ AB = -4\sqrt{39} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim:

- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{35}{43}$
- $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4\sqrt{39}}{43}$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{35}{4\sqrt{39}} = \dfrac{35\sqrt{39}}{156}$

20. a) Como a razão de semelhança é igual a 2, temos:

$$\frac{AC}{DF} = 2 \Rightarrow \frac{AC}{6} = 2 \Rightarrow AC = 12$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$12^2 = 7{,}2^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 92{,}16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \pm\sqrt{92{,}16} \Rightarrow \begin{cases} BC = 9{,}6 \\ \text{ou} \\ BC = -9{,}6 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, o perímetro do triângulo ABC é:

$7{,}2 + 9{,}6 + 12 = 28{,}8 \rightarrow 28{,}8$ m

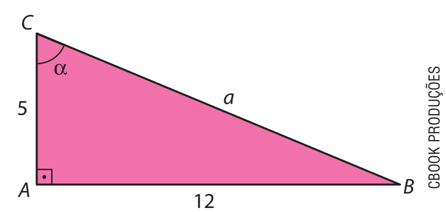
E o perímetro do triângulo DEF é:

$$\frac{7{,}2}{2} + \frac{9{,}6}{2} + \frac{12}{2} = \frac{28{,}8}{2} = 14{,}4 \rightarrow 14{,}4 \text{ m}$$

b)
- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{9{,}6}{12} = \dfrac{96}{120} = \dfrac{4}{5}$
- $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{7{,}2}{12} = \dfrac{72}{120} = \dfrac{3}{5}$
- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{9{,}6}{7{,}2} = \dfrac{96}{72} = \dfrac{4}{3}$

c)
- $\text{sen}\,\beta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{7{,}2}{12} = \dfrac{72}{120} = \dfrac{3}{5}$
- $\cos\beta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{9{,}6}{12} = \dfrac{96}{120} = \dfrac{4}{5}$
- $\text{tg}\,\beta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7{,}2}{9{,}6} = \dfrac{72}{96} = \dfrac{3}{4}$

21. A medida α corresponde à medida do ângulo interno de um triângulo retângulo de catetos medindo 12 e 5 unidades de comprimento, sendo 12 a medida do cateto oposto a esse ângulo, conforme a figura.



A medida da hipotenusa é dada por:

$a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{169} \Rightarrow \begin{cases} a = 13 \\ \text{ou} \\ a = -13 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Segue que:

a) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{13}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{13}$

c) $(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 =$

$$= \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{12^2 + 5^2}{13^2} = \frac{169}{169} = 1$$

- Resposta esperada: Infinitos triângulos retângulos, semelhantes, cujos ângulos agudos medem α e $90° - \alpha$.

22. a) $\text{tg}\,\beta = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

b) Sabendo que $\text{tg}\,\beta = \dfrac{2}{3}$, temos:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = 9$$

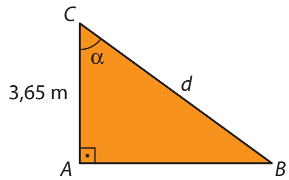
Assim:

$AD + DC = AC \Rightarrow AD + 6 = 9 \Rightarrow AD = 3 \rightarrow 3$ m

c) Como $AC = 9$, a área do triângulo ABC é:

$$\frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \rightarrow 27 \text{ m}^2$$

23 De acordo com o enunciado, temos o seguinte triângulo retângulo:



Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow 1{,}37 = \dfrac{AB}{3{,}65} \Rightarrow AB = 5{,}0005 \simeq 5$

Segue que a distância d percorrida pela bola é, aproximadamente, dada por:

$d^2 \simeq 3{,}65^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 \simeq 38{,}3225 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \simeq \pm\sqrt{38{,}3225} \Rightarrow \begin{cases} d \simeq 6{,}19 \\ \quad\text{ou} \\ d \simeq -6{,}19 \text{ (não convém)} \end{cases}$

Portanto, a distância percorrida é de aproximadamente 6,19 m.

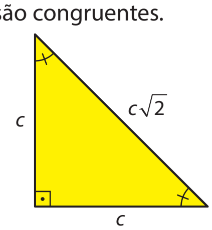
24. A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é sempre maior do que a medida de qualquer um dos catetos, logo, um triângulo retângulo isósceles só pode ter os dois catetos congruentes. Sejam c a medida comum dos dois catetos e a a medida da hipotenusa. Então, pelo teorema de Pitágoras:

$a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2$

Como a e c são números positivos, segue que:

$a = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$

Além disso, como o triângulo é isósceles, os dois ângulos internos agudos são congruentes.



Assim:

- seno: $\dfrac{c}{c\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- cosseno: $\dfrac{c}{c\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- tangente: $\dfrac{c}{c} = 1$

25. Resposta pessoal.

26. **a)** • $\cos 45° = \dfrac{11\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{11\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = 22$

• $\text{tg}\,45° = \dfrac{y}{11\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = \dfrac{y}{11\sqrt{2}} \Rightarrow y = 11\sqrt{2}$

Portanto, $x = 22$ cm e $y = 11\sqrt{2}$ cm.

b) • $\cos 20° = \dfrac{x}{4} \Rightarrow 0{,}940 \simeq \dfrac{x}{4} \Rightarrow x \simeq 3{,}76$

• $\text{sen}\,20° = \dfrac{y}{4} \Rightarrow 0{,}342 \simeq \dfrac{y}{4} \Rightarrow y \simeq 1{,}368$

Portanto, $x \simeq 3{,}76$ m e $y \simeq 1{,}37$ m.

27. Observe que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, as medidas α e β dos ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são tais que:

$\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

Ou seja, os ângulos internos agudos de um triângulo retângulo são ângulos complementares.

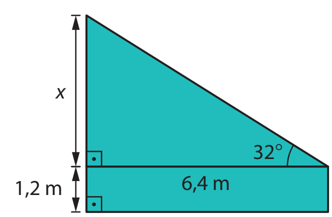
a) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{20\sqrt{3}}{20} = \sqrt{3}$

Como $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$, temos $\alpha = 60°$ e $\beta = \underbrace{30°}_{90° - 60°}$.

b) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{20}{32} = 0{,}625$

Como $\text{tg}\,32° \simeq 0{,}625$, temos $\alpha \simeq 32°$ e $\beta \simeq \underbrace{58°}_{90° - 32°}$.

28. A situação está representada na seguinte figura:



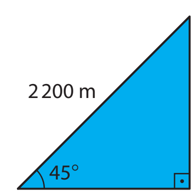
Temos:

$\text{tg}\,32° = \dfrac{x}{6{,}4} \Rightarrow 0{,}625 \simeq \dfrac{x}{6{,}4} \Rightarrow x \simeq 4$

A altura do barranco corresponde a $x + 1{,}2$, o que é aproximadamente igual a:

$4 + 1{,}2 = 5{,}2 \rightarrow$ aproximadamente 5,2 m

29. **a)**



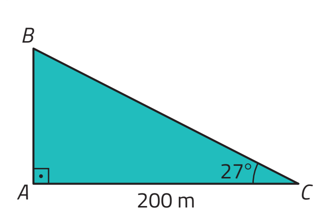
b) Seja h a altura em relação ao solo. Então:

$\text{sen}\,45° = \dfrac{h}{2\,200} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h}{2\,200} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 1\,100\sqrt{2} \simeq 1\,555{,}63$

Portanto, o avião está a uma altura de aproximadamente 1 555,63 m.

30. **a)** Podemos representar parte dessa ponte por um triângulo retângulo ABC e calcular o cosseno do ângulo de 27°, conforme segue.



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

$\cos 27° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{200}{BC}$

Consultando a tabela trigonométrica, temos que $\cos 27° \simeq 0{,}891$. Assim:

$$0{,}891 \simeq \frac{200}{BC} \Rightarrow BC \simeq \frac{200}{0{,}891} \simeq 224{,}47$$

Portanto, o último cabo de sustentação tem aproximadamente 224,47 m de comprimento.

b) Com base no triângulo *ABC*, representado no item **a**, temos:

$$\text{tg } 27° = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{200}$$

Consultando a tabela trigonométrica, temos que $\text{tg } 27° \simeq 0{,}510$. Assim:

$$0{,}510 \simeq \frac{AB}{200} \Rightarrow AB \simeq 200 \cdot 0{,}510 = 102$$

Portanto, o topo do mastro central está a uma altura de aproximadamente 102 m acima do tabuleiro.

31. a) **I** e **III**

I) $\text{tg } \alpha = \dfrac{90}{149{,}75} \simeq 0{,}601$

Como $\text{tg } 31° \simeq 0{,}601$, temos que $\alpha \simeq 31°$. Logo, a escada atende à norma.

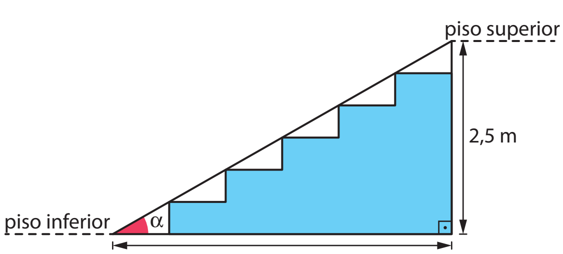
II) $\text{tg } \beta = \dfrac{95}{140{,}74} \simeq 0{,}675$

Como $\text{tg } 34° \simeq 0{,}675$, temos que $\beta \simeq 34°$. Logo, a escada não atende à norma.

III) $\text{tg } \theta = \dfrac{100}{173{,}31} \simeq 0{,}577$

Como $\text{tg } 30° \simeq 0{,}577$, temos que $\theta \simeq 30°$. Logo, a escada atende à norma.

b) Na figura a seguir, *x* é o comprimento da projeção horizontal da escada, o qual depende do ângulo de inclinação de medida α.



Observe que a inclinação mínima, com $\alpha = 26{,}57°$, determina a escada de comprimento máximo, e a inclinação máxima, com $\alpha = 32{,}74°$, determina a escada de comprimento mínimo. Vamos calcular *x* em cada caso:

- Para $\alpha = 26{,}57°$:

$$\text{tg } 26{,}57° = \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow 0{,}500 \simeq \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow x \simeq 5$$

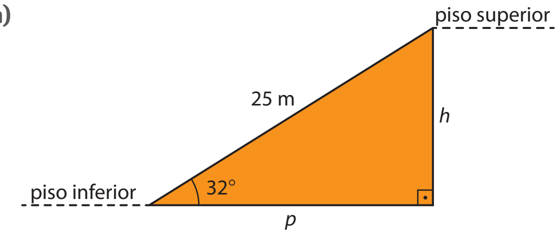
- Para $\alpha = 32{,}74°$:

$$\text{tg } 32{,}74° = \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow 0{,}643 \simeq \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow x \simeq 3{,}89$$

Portanto, os comprimentos mínimo e máximo da projeção horizontal são, respectiva e aproximadamente, 3,89 m e 5 m.

c) Resposta pessoal.

32. a)



b) O comprimento da projeção horizontal da escada corresponde à medida *p* indicada na figura. Temos:

$$\cos 32° = \frac{p}{25} \Rightarrow 0{,}848 \simeq \frac{p}{25} \Rightarrow p \simeq 21{,}2 \rightarrow$$

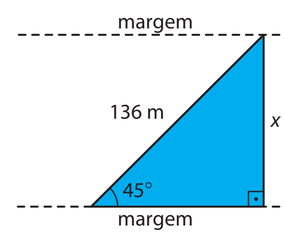
$\rightarrow$ aproximadamente 21,20 m

c) A altura do desnível entre os dois pisos corresponde à medida *h* indicada na figura. Temos:

$$\text{sen } 32° = \frac{h}{25} \Rightarrow 0{,}530 \simeq \frac{h}{25} \Rightarrow h \simeq 13{,}25 \rightarrow$$

$\rightarrow$ aproximadamente 13,25 m

33. Na figura abaixo, a medida *x* corresponde à largura do lago naquele trecho.

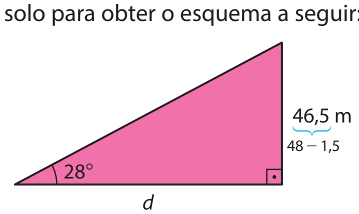


Temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{x}{136} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{136} \Rightarrow x = 68\sqrt{2} \simeq 96{,}17$$

Portanto, a largura é de aproximadamente 96,17 m.

34. A altura total do edifício é de $16 \cdot 3 = 48$ metros, porém, precisamos subtrair desse valor a altura dos olhos em relação ao solo para obter o esquema a seguir:

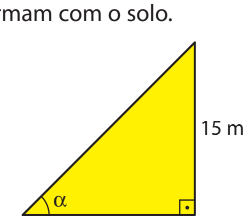


Nesse esquema, a medida *d* corresponde à distância da pessoa ao edifício e é dada por:

$$\text{tg } 28° = \frac{46{,}5}{d} \Rightarrow 0{,}532 \simeq \frac{46{,}5}{d} \Rightarrow d \simeq 87{,}4 \rightarrow$$

$\rightarrow$ aproximadamente 87,4 m

35. A figura abaixo ilustra o comprimento da sombra *c* de acordo com a medida do ângulo de inclinação α que os raios solares formam com o solo.



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

a) Para $c = 9$ m:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{15}{9} \simeq 1{,}667$

Temos tg 59° ≃ 1,664 e tg 60° ≃ 1,732, logo, o ângulo é de aproximadamente 59°.

b) Para $c = 18$ m:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{15}{18} \simeq 0{,}833$

Temos tg 39° ≃ 0,810 e tg 40° ≃ 0,839, logo, o ângulo é de aproximadamente 40°.

c) Para $c = 15$ m:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{15}{15} = 1$

Temos tg 45° = 1, logo, o ângulo é de 45°.

36. A inclinação mínima, com $\beta = 29°$, determina a rampa de extensão máxima, e a inclinação máxima, com $\beta = 37°$, determina a rampa de extensão mínima. Vamos calcular essa extensão em cada caso:

- $\text{sen}\ 29° = \dfrac{6}{x} \Rightarrow 0{,}485 \simeq \dfrac{6}{x} \Rightarrow x \simeq 12{,}4$
- $\text{sen}\ 37° = \dfrac{6}{x} \Rightarrow 0{,}602 \simeq \dfrac{6}{x} \Rightarrow x \simeq 10$

Portanto, a rampa pode ter, aproximadamente, de 10 m até 12,4 m de extensão.

37. a) Respostas esperadas: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$, com $0° < \alpha < 90°$; $\text{sen}\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$, com $0° < \alpha < 90°$.

b) Resposta pessoal.

38. a) Cada placa tem uma área de $1 \cdot 2 = 2$ metros quadrados. Como o painel é formado por duas placas, sua área é de: $2 \cdot 2 = 4 \rightarrow 4\ \text{m}^2$

b) Como o comprimento da placa é de 2 m, temos:

$\cos \alpha = \dfrac{1{,}82}{2} = 0{,}91$

Temos cos 24° ≃ 0,914 e cos 25° ≃ 0,906, logo α está entre 24° e 25°. O município com a latitude mais próxima desse ângulo é Guarapuava (PR).

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

39. Resposta esperada:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \cos^2 \alpha + \text{sen}^2\ \alpha$$

Integrando

1. Algumas respostas possíveis: Construção de rampas; instalação de elevadores; adaptação de banheiros; aplicação de piso tátil em calçadas; disponibilização de transporte coletivo adaptado; instalação de semáforo sonoro; estabelecimento de vagas especiais em estacionamentos. Resposta pessoal.

2. Resposta esperada: As normas de acessibilidade estabelecem critérios e parâmetros técnicos para garantir que diferentes construções e espaços sejam acessíveis à maior quantidade possível de pessoas. Resposta pessoal.

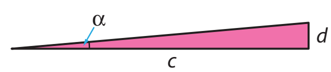
3. a) Algumas respostas possíveis: Consulta a locais de acordo com o município, tipo de estabelecimento ou atração turística, ou tipo de recurso de acessibilidade; cadastro ou avaliação de um estabelecimento ou atração turística; acesso a materiais sobre o Programa Turismo Acessível, direitos da pessoa com deficiência, informações para estabelecimentos, entre outras.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

4. Resposta esperada: Não, pois a norma estabelece que a inclinação da rampa não deve ultrapassar 0,0833 (8,33%) e, nesse caso, a inclinação é de 0,1 (10%).

5. a)



CBOOK PRODUÇÕES

b) De acordo com as informações, é necessário que $\dfrac{d}{c} \leqslant 0{,}0833$, ou seja, $\text{tg}\ \alpha \leqslant 0{,}0833$. Como tg 4° ≃ 0,070 e tg 5° ≃ 0,087, podemos concluir que a inclinação máxima corresponde a um ângulo com medida entre 4° e 5°.

6. a)

d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
c	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4	9,6

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

40. a) A medida x do ângulo $A\hat{C}B$ é dada por:

$x + 43° + 68° = 180° \Rightarrow x = 69°$

Assim:

- $\dfrac{5}{\text{sen}\ 69°} = \dfrac{AC}{\text{sen}\ 68°} \Rightarrow \dfrac{5}{0{,}934} \simeq \dfrac{AC}{0{,}927} \Rightarrow AC \simeq 4{,}96$
- $\dfrac{5}{\text{sen}\ 69°} = \dfrac{BC}{\text{sen}\ 43°} \Rightarrow \dfrac{5}{0{,}934} \simeq \dfrac{BC}{0{,}682} \Rightarrow BC \simeq 3{,}65$

Portanto, o perímetro do triângulo é, aproximadamente:

$5 + 4{,}96 + 3{,}65 = 13{,}61 \rightarrow$ aproximadamente 13,61 cm

b) A medida x do ângulo $B\hat{A}C$ é dada por:

$x + 60° + 80° = 180° \Rightarrow x = 40°$

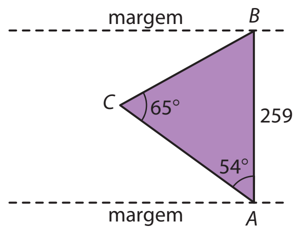
Assim:

- $\dfrac{9}{\text{sen}\ 80°} = \dfrac{BC}{\text{sen}\ 40°} \Rightarrow \dfrac{9}{0{,}985} = \dfrac{BC}{0{,}643} \Rightarrow BC \simeq 5{,}88$
- $\dfrac{9}{\text{sen}\ 80°} = \dfrac{AC}{\text{sen}\ 60°} \Rightarrow \dfrac{9}{0{,}985} = \dfrac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC \simeq 7{,}91$

Portanto, o perímetro do triângulo é, aproximadamente:

$9 + 5{,}88 + 7{,}91 = 22{,}79 \rightarrow$ aproximadamente 22,79 m

41. a)



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

b) A medida x do ângulo $A\hat{B}C$ é dada por:

$x + 54° + 65° = 180° \Rightarrow x = 61°$

Assim:

- $\dfrac{259}{\text{sen } 65°} = \dfrac{AC}{\text{sen } 61°} \Rightarrow \dfrac{259}{0{,}906} \simeq \dfrac{AC}{0{,}875} \Rightarrow AC \simeq 250{,}14$
- $\dfrac{259}{\text{sen } 65°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 54°} \Rightarrow \dfrac{259}{0{,}906} \simeq \dfrac{BC}{0{,}809} \Rightarrow BC \simeq 231{,}27$

Portanto, a distância aproximada percorrida pelo pescador foi:

$AC + BC \simeq 250{,}14 + 231{,}27 = 481{,}41 \rightarrow$ aproximadamente 481,41 m

42. A medida x do ângulo $A\hat{B}C$ é dada por:

$x + 58° + 72° = 180° \Rightarrow x = 50°$

Assim:

$\dfrac{250}{\text{sen } 50°} = \dfrac{AB}{\text{sen } 58°} \Rightarrow \dfrac{250}{0{,}766} \simeq \dfrac{AB}{0{,}848} \Rightarrow AB \simeq 276{,}76$

Portanto, a distância do ponto A até a boia é de aproximadamente 276,76 m.

43. a) $\dfrac{\frac{7\sqrt{6}}{3}}{\text{sen } 45°} = \dfrac{7}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \dfrac{\frac{7\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{7}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{3\sqrt{12}}{12} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } 60°$

Logo, $\alpha = 60°$ ou $\alpha = \underbrace{120°}_{180° - 60°}$.

- Para $\alpha = 60°$:

$60° + \beta + 45° = 180° \Rightarrow \beta = 75°$

- Para $\alpha = 120°$:

$120° + \beta + 45° = 180° \Rightarrow \beta = 15°$

Portanto, $\alpha = 60°$ e $\beta = 75°$ ou $\alpha = 120°$ e $\beta = 15°$.

b) $\dfrac{25}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{34}{\text{sen } 78°} \Rightarrow \dfrac{25}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{34}{0{,}978} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha \simeq 0{,}719 \simeq \text{sen } 46°$

Logo, $\alpha \simeq 46°$ é a única possibilidade, pois, como o ângulo $A\hat{B}C$ mede 78°, então $\alpha < \underbrace{102°}_{180° - 78°}$. Assim:

$46° + \beta + 78° \simeq 180° \Rightarrow \beta \simeq 56°$

Portanto, $\alpha \simeq 46°$ e $\beta \simeq 56°$.

c) $\dfrac{52{,}8}{\text{sen } \beta} = \dfrac{60}{\text{sen } 77°} \Rightarrow \dfrac{52{,}8}{\text{sen } \beta} = \dfrac{60}{0{,}974} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \beta \simeq 0{,}857 \simeq \text{sen } 59°$

Logo, $\beta \simeq 59°$ é a única possibilidade, pois, como o ângulo $A\hat{C}B$ mede 77°, então $\beta < \underbrace{103°}_{180° - 77°}$. Assim:

$\alpha + 59° + 77° \simeq 180° \Rightarrow \alpha \simeq 44°$

Portanto, $\alpha \simeq 44°$ e $\beta \simeq 59°$.

d) $\dfrac{32}{\text{sen } \beta} = \dfrac{45}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \dfrac{32}{\text{sen } \beta} \simeq \dfrac{45}{0{,}866} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \beta \simeq 0{,}616 \simeq \text{sen } 38°$

Logo, $\beta \simeq 38°$ é a única possibilidade, pois, como o ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°, então $\beta < \underbrace{120°}_{180° - 60°}$. Assim:

$\alpha + 38° + 60° \simeq 180° \Rightarrow \alpha \simeq 82°$

Portanto, $\alpha \simeq 82°$ e $\beta \simeq 38°$.

44. Resposta pessoal.

45. A medida x do ângulo $A\hat{C}B$ é dada por:

$x + 55° + 44° = 180° \Rightarrow x = 81°$

Assim:

- $\dfrac{13}{\text{sen } 81°} = \dfrac{BC}{\text{sen } 55°} \Rightarrow \dfrac{13}{0{,}988} \simeq \dfrac{BC}{0{,}819} \Rightarrow BC \simeq 10{,}78$
- $\dfrac{13}{\text{sen } 81°} = \dfrac{AC}{\text{sen } 44°} \Rightarrow \dfrac{13}{0{,}988} \simeq \dfrac{AC}{0{,}695} \Rightarrow AC \simeq 9{,}14$

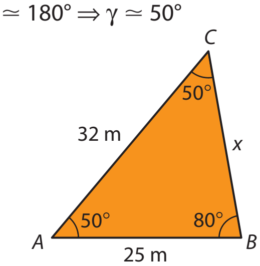
Portanto, Maurício estava a aproximadamente 10,78 m de distância do *drone* e Pamela, a aproximadamente 9,14 m.

46. O ângulo $A\hat{B}C$ é suplementar de um ângulo de 100°, logo, mede $180° - 100° = 80°$. Seja β a medida do ângulo $A\hat{C}B$. Então, pela lei dos senos:

$\dfrac{32}{\text{sen } 80°} = \dfrac{25}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \dfrac{32}{0{,}985} \simeq \dfrac{25}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \text{sen } \beta \simeq 0{,}770$

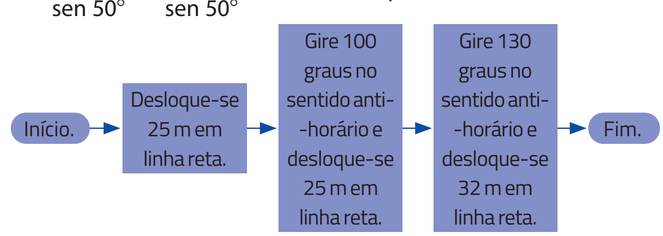
Temos sen 50° $\simeq$ 0,766 e sen 51° $\simeq$ 0,777, logo, $\text{sen } \beta \simeq \text{sen } 50°$. Então $\beta \simeq 50°$, pois, como o ângulo $A\hat{B}C$ mede 80°, temos $\beta < \underbrace{100°}_{180° - 80°}$. Segue que a medida γ do ângulo $B\hat{A}C$ é dada por:

$\gamma + 50° + 80° \simeq 180° \Rightarrow \gamma \simeq 50°$



Assim, a medida x é dada, aproximadamente, por:

$\dfrac{x}{\text{sen } 50°} \simeq \dfrac{25}{\text{sen } 50°} \Rightarrow x \simeq 25 \rightarrow$ aproximadamente 25 m

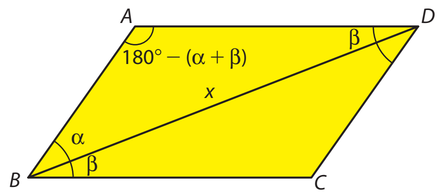


47. alternativa **a**

Como os ângulos $C\hat{B}D$ e $A\hat{D}B$ são alternos internos, então $A\hat{D}B$ tem medida β. Assim, o ângulo $B\hat{A}D$ tem medida γ tal que:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

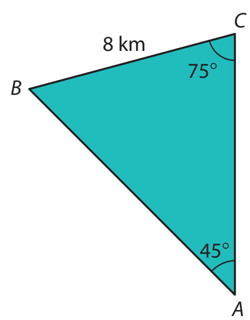


Assim, usando a lei dos senos no triângulo *ABD*, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen}\,\beta} = \frac{x}{\underbrace{\text{sen}\,[180° - (\alpha + \beta)]}_{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}} \Rightarrow AB = \frac{x \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}$$

48. alternativa **b**

De acordo com as informações do enunciado, o triângulo *ABC* pode ser representado pela figura a seguir.



A medida *x* do ângulo $A\hat{B}C$ é dada por:

$x + 45° + 75° = 180° \Rightarrow x = 60°$

Assim, a distância *AC*, em km, é dada por:

$$\frac{8}{\text{sen}\,45°} = \frac{AC}{\text{sen}\,60°} \Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}$$

49. $74^2 = 35^2 + 45^2 - 2 \cdot 35 \cdot 45 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\,476 = 1\,225 + 2\,025 - 3\,150 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3\,150 \cdot \cos\alpha = 2\,226 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2\,226}{3\,150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(180° - \alpha) = \frac{2\,226}{3\,150} \simeq 0{,}707$$

Temos $\cos 45° \simeq 0{,}707$, assim:

$180° - \alpha \simeq 45° \Rightarrow \alpha \simeq 135°$

50. $x^2 = 32{,}3^2 + 30^2 - 2 \cdot 32{,}3 \cdot 30 \cdot \cos 70° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \simeq 1\,043{,}29 + 900 - 1\,938 \cdot 0{,}342 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \simeq 1\,280{,}494 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \simeq \pm\sqrt{1\,280{,}494} \Rightarrow \begin{cases} x \simeq 35{,}78 \\ \quad\text{ou} \\ x \simeq -35{,}78 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, aproximadamente 35,78 cm.

51. **a)** Seja *x* a distância de *B* até *C*, em metros. Então:

$x^2 = 150^2 + 118{,}2^2 - 2 \cdot 150 \cdot 118{,}2 \cdot \cos 88° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \simeq 36\,471{,}24 - 1\,241{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \simeq 35\,230{,}14 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \simeq \pm\sqrt{35\,230{,}14} \Rightarrow \begin{cases} x \simeq 187{,}7 \\ \quad\text{ou} \\ x \simeq -187{,}7 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, aproximadamente 187,7 m.

b) Seja α a medida do ângulo $A\hat{C}B$. Então:

$$\frac{150}{\text{sen}\,\alpha} \simeq \frac{187{,}7}{\underbrace{\text{sen}\,88°}_{0{,}999}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \simeq 0{,}798 \simeq \text{sen}\,53°$$

Logo, $\text{med}(A\hat{C}B) = \alpha \simeq 53°$ e

$\text{med}(A\hat{B}C) \simeq 180° - 88° - 53° \simeq 39°$.

52. Seja $(x - 2, x, x + 2)$ a PA de razão 2 cujos termos correspondem às medidas dos lados do triângulo, em centímetros. O maior lado, cuja medida é $x + 2$, é oposto ao maior ângulo, que tem 120° de medida. Assim, pela lei dos cossenos:

$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2 - 2 \cdot x \cdot (x - 2) \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - 4x) \cdot (-\cos 60°) \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^2 + 8x = -(2x^2 - 4x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x^2 + 8x = x^2 - 2x \Rightarrow -2x^2 + 10x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (não convém)} \\ \quad\text{ou} \\ x = 5 \end{cases}$$

Logo, os lados do triângulo medem 3 cm, 5 cm e 7 cm e seu perímetro é: $3 + 5 + 7 = 15 \rightarrow 15$ cm

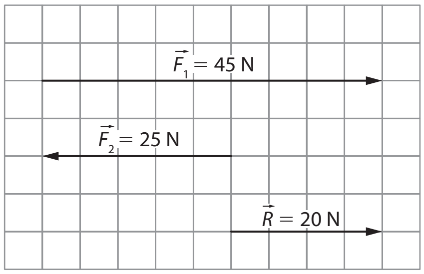
53. **a)** • mesma direção: $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{F}$ e $\vec{H}$; $\vec{A}$ e $\vec{D}$; $\vec{C}$, $\vec{G}$ e $\vec{I}$

• mesmo sentido: $\vec{B}$ e $\vec{F}$; $\vec{E}$ e $\vec{H}$; $\vec{C}$ e $\vec{I}$

• mesmo módulo: $\vec{A}$ e $\vec{D}$; $\vec{B}$ e $\vec{G}$; $\vec{C}$ e $\vec{H}$; $\vec{E}$, $\vec{F}$ e $\vec{I}$

b) O vetor resultante $\vec{R}$ possui módulo igual a:

$45 - 25 = 20 \rightarrow 20$ N



c) Pela lei dos cossenos:

$$15{,}04^2 = 8^2 + d^2 - 2 \cdot 8 \cdot d \cdot \underbrace{\cos 40°}_{0{,}766} \Rightarrow$$

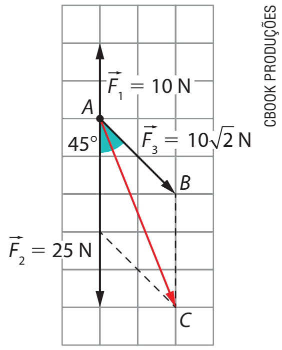
$\Rightarrow 226{,}2016 \simeq 64 + d^2 - 12{,}256d \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 - 12{,}256d - 162{,}2016 \simeq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \simeq 20{,}26 \\ \quad\text{ou} \\ d \simeq -8{,}01 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, $d \simeq 20{,}26$ m.

d)



Observe que $BC = 25 - 10 = 15$ e med$(A\hat{B}C) = 45° + 90° = 135°$. Logo, sendo x o módulo do vetor resultante, representado em vermelho, e utilizando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$x^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 + 15^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 15 \cdot \cos 135° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 425 - 300\sqrt{2} \cdot (-\cos 45°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 425 - 300\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 425 + 300 \Rightarrow x^2 = 725 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{725} \Rightarrow \begin{cases} x \simeq 26{,}93 \\ \text{ou} \\ x \simeq -26{,}93 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, o módulo do vetor resultante é de aproximadamente 26,93 N.

O que estudei

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. **a)** Premissas: Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes entre si e a razão de semelhança entre esses triângulos é k; conclusão: a razão entre os perímetros dos triângulos ABC e $A'B'C'$ também é k.

b) • $\cos 30° = \frac{AB}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{8} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$ cm

$\text{sen } 30° = \frac{AC}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{8} \Rightarrow AC = 4 \rightarrow 4$ cm

• Seja m a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa. Então:

$\cos 30° = \frac{m}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{4\sqrt{3}} \Rightarrow m = 6 \rightarrow 6$ cm

• A medida n da projeção do cateto AC sobre a hipotenusa é dada por:

$n + m = BC \Rightarrow n + 6 = 8 \Rightarrow n = 2 \rightarrow 2$ cm

c) Nessas condições, os triângulos ADE e ABC serão semelhantes e com razão de semelhança igual a $\frac{DE}{BC} = \frac{5}{8}$.

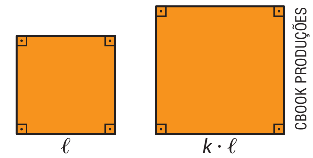
Assim:

• $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{AD}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{8} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

• $\frac{AE}{AC} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{AE}{4} = \frac{5}{8} \Rightarrow AE = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Portanto, as medidas dos outros lados serão $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm e 2,5 cm.

d) Sejam dois quadrados em que a razão de semelhança entre eles é k. Então um deles tem o lado medindo ℓ e, o outro, $k \cdot \ell$, sendo ℓ um número positivo.



Assim, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{(k \cdot \ell)^2}{\ell^2} = \frac{k^2 \cdot \ell^2}{\ell^2} = k^2$$

Unidade 3 • Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas

1. **a)** $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OG}$

b) $\overline{CG}$

c) $\overline{AH}$, $\overline{CG}$ e $\overline{EF}$

2. **a)** $2\pi \cdot 5 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 \rightarrow 31{,}4$ cm

b) $2\pi \cdot \frac{18}{2} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 56{,}52 \rightarrow 56{,}52$ dm

c) $2\pi \cdot \frac{7}{2} = 3{,}14 \cdot 7 = 21{,}98 \rightarrow 21{,}98$ m

3. **a)** $2\pi r = 15{,}7 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14r = 15{,}7 \Rightarrow r = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5$ cm

b) $2\pi r = 25{,}12 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14r = 25{,}12 \Rightarrow r = 4 \rightarrow 4$ m ou 400 cm

c) $2\pi r = 43{,}96 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14r = 43{,}96 \Rightarrow r = 7 \rightarrow 7$ dm ou 70 cm

d) $2\pi r = 75{,}36 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14r = 75{,}36 \Rightarrow r = 12 \rightarrow 12$ cm

4. Respostas pessoais.

5. Como o comprimento de uma circunferência é diretamente proporcional à medida de seu raio, então cada giro da catraca **A** corresponde a dois giros da catraca **B** e a quatro giros da catraca **C**. Assim:

Giros da catraca A	Giros da catraca B
1	2
300	x

$\frac{1}{300} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 600$

Giros da catraca A	Giros da catraca C
1	4
300	y

$\frac{1}{300} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 1\,200$

Portanto, a catraca **B** gira 600 voltas e a catraca **C**, 1 200 voltas.

6. Sejam r e r' as medidas dos raios, respectivamente, da circunferência original e da ampliação. Então seus respectivos comprimentos $C = 2\pi r$ e $C' = 2\pi r'$ são tais que $C' = C + 4$. Logo:

$$2\pi r' = 2\pi r + 4 \Rightarrow r' = \frac{2\pi r + 4}{2\pi} \Rightarrow r' = r + \frac{2}{\pi}$$

Portanto, o raio da circunferência obtida na ampliação aumentou em $\frac{2}{\pi}$ unidade de medida de comprimento, o que equivale a aproximadamente 0,637 unidade de medida de comprimento.

7. Sejam $d_1, d_2, d_3, ..., d_7$ as medidas dos diâmetros das semicircunferências. O comprimento C da curva corresponde à soma dos comprimentos das semicircunferências, ou seja:

$$C = \frac{d_1\pi}{2} + \frac{d_2\pi}{2} + \frac{d_3\pi}{2} + ... + \frac{d_7\pi}{2} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot (d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_7)$$

Como a soma das medidas dos raios das semicircunferências corresponde ao comprimento do segmento em preto, temos:

$$C = \frac{\pi}{2} \cdot 16 \simeq 25{,}12 \rightarrow \text{aproximadamente } 25{,}12 \text{ cm}$$

8. a)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	π

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow 2\pi x = 360\pi \Rightarrow x = 180$$

Portanto, π rad corresponde a 180°.

b)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{2\pi}{5}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} \Rightarrow 2\pi x = 360 \cdot \frac{2\pi}{5} \Rightarrow x = 72$$

Portanto, $\frac{2\pi}{5}$ rad corresponde a 72°.

c)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{\pi}{6}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow 2\pi x = 360 \cdot \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 30$$

Portanto, $\frac{\pi}{6}$ rad corresponde a 30°.

d)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{6\pi}{4}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{6\pi}{4}} \Rightarrow 2\pi x = 360 \cdot \frac{6\pi}{4} \Rightarrow x = 270$$

Portanto, $\frac{6\pi}{4}$ rad corresponde a 270°.

e)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{\pi}{3}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow 2\pi x = 360 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 60$$

Portanto, $\frac{\pi}{3}$ rad corresponde a 60°.

f)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{\pi}{4}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 2\pi x = 360 \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 45$$

Portanto, $\frac{\pi}{4}$ rad corresponde a 45°.

9.

Medida do arco, em grau	Comprimento do arco, em cm
360	$2\pi \cdot 5$
135	x

$$\frac{360}{135} = \frac{2\pi \cdot 5}{x} \Rightarrow 360x = 1\,350\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{1\,350\pi}{360} = \frac{15\pi}{4} \simeq 11{,}775$$

Portanto:

- comprimento de $\overset{\frown}{APB}$: aproximadamente 11,775 cm
- med($\overset{\frown}{APB}$) = 135°

10. a)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
150	x

$$\frac{360}{150} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 300\pi \Rightarrow x = \frac{300\pi}{360} = \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, med($\overset{\frown}{AB}$) $= \frac{5\pi}{6}$ rad.

b)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
200	x

$$\frac{360}{200} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 400\pi \Rightarrow x = \frac{400\pi}{360} = \frac{10\pi}{9}$$

Portanto, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{10\pi}{9}$ rad.

c)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
340	x

$$\frac{360}{340} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 680\pi \Rightarrow x = \frac{680\pi}{360} = \frac{17\pi}{9}$$

Portanto, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{17\pi}{9}$ rad.

d)

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
250	x

$$\frac{360}{250} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 500\pi \Rightarrow x = \frac{500\pi}{360} = \frac{25\pi}{18}$$

Portanto, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \frac{25\pi}{18}$ rad.

11.

Medida do arco, em grau	Comprimento do arco, em mm
360	$2\pi \cdot 12$
x	62,8

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi \cdot 12}{62{,}8} \Rightarrow 24\pi x = 22\,608 \Rightarrow x = \frac{22\,608}{24 \cdot 3{,}14} = 300$$

Assim, a medida do arco de circunferência é de 300°. Vamos calcular essa medida em radiano:

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
300	x

$$\frac{360}{300} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow 360x = 600\pi \Rightarrow x = \frac{600\pi}{360} = \frac{5\pi}{3}$$

Portanto, a medida do arco é de 300° ou $\frac{5\pi}{3}$ rad.

12. O raio da circunferência mede $\frac{36}{2} = 18$ centímetros. Temos:

Medida do arco, em grau	Comprimento do arco, em cm
360	$2\pi \cdot 18$
210	x

$$\frac{360}{210} = \frac{2\pi \cdot 18}{x} \Rightarrow 360x = 7\,560\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7\,560\pi}{360} = 21\pi = 65{,}94$$

Portanto, o arco de circunferência tem 65,94 cm de comprimento.

13. Inicialmente, vamos determinar o comprimento do arco correspondente ao ângulo central, cuja medida é $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ radianos.

Medida do arco, em radiano	Comprimento do arco, em cm
2π	$2\pi \cdot 2$
$\frac{7\pi}{4}$	x

$$\frac{2\pi}{\frac{7\pi}{4}} = \frac{2\pi \cdot 2}{x} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2} = 10{,}99$$

Segue que o perímetro do setor circular é:
$10{,}99 + 2 \cdot 2 = 14{,}99 \rightarrow 14{,}99$ cm

14. Por definição, um arco de 1 rad tem o comprimento r do raio da circunferência na qual está contido. Assim, temos a seguinte regra de três:

Medida do arco, em radiano	Comprimento do arco
1	r
2	x

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = 2r$$

Logo, o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ contido em uma circunferência de centro O e raio r, sendo $\text{med}(A\hat{O}B) =$ $= 2$ rad, é igual ao diâmetro $2r$ dessa circunferência.

15. a)

$$\begin{array}{r|l} 1\,970 & 360 \\ \hline -\,1\,800 & 5 \\ 170 & \end{array}$$

Assim, $1\,970° = 170° + 5 \cdot 360°$. Portanto, a 1ª determinação positiva é 170°.

b) $\frac{65\pi}{9} = \frac{11\pi}{9} + \frac{54\pi}{9} = \frac{11\pi}{9} + 6\pi = \frac{11\pi}{9} + 3 \cdot 2\pi$

Portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{11\pi}{9}$ rad.

c) $-\frac{10\pi}{9} + 2\pi = \frac{8\pi}{9} \Rightarrow -\frac{10\pi}{9} = \frac{8\pi}{9} + (-1) \cdot 2\pi$

Portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{8\pi}{9}$ rad.

d)

$$\begin{array}{r|l} 1\,110 & 360 \\ \hline -\,1\,080 & 3 \\ 30 & \end{array}$$

Assim, $-1\,110° = -(30° + 3 \cdot 360°) = -30° - 3 \cdot 360°$ e $-30° + 360° = 330°$.
Segue que:
$-1\,110° = 330° + (-4) \cdot 360°$
Portanto, a 1ª determinação positiva é 330°.

e)
$$\begin{array}{r|l} 1\,520 & 360 \\ \hline -1\,440 & 4 \\ 80 & \end{array}$$

Assim, 1 520° = 80° + 4 · 360°. Portanto, a 1ª determinação positiva é 80°.

f) $-\frac{70\pi}{9} = -\frac{16\pi}{9} - \frac{54\pi}{9} = -\frac{16\pi}{9} - 6\pi =$

$= -\frac{16\pi}{9} - 3 \cdot 2\pi$ e $-\frac{16\pi}{9} + 2\pi = \frac{2\pi}{9}$

Segue que:

$-\frac{70\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} + (-4) \cdot 2\pi$

Portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{2\pi}{9}$ rad.

16. a)
- $\frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{37\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{49\pi}{6}$

Portanto, os arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ entre 0 e $\frac{49\pi}{6}$ são: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$ e $\frac{37\pi}{6}$.

b)
- $\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{37\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{49\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 5 \cdot 2\pi = \frac{61\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 6 \cdot 2\pi > 12\pi$

Portanto, os arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ entre 4π e 12π são: $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{49\pi}{6}$ e $\frac{61\pi}{6}$.

c)
- $\frac{\pi}{6} + (-3) \cdot 2\pi = -\frac{35\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = -\frac{23\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi > 2\pi$

Portanto, os arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ entre -6π e 2π são: $-\frac{35\pi}{6}$, $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$.

d) Em radianos, 3 300° corresponde a $3\,300 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{110\pi}{6}$.

- $\frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{37\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{49\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 5 \cdot 2\pi = \frac{61\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 6 \cdot 2\pi = \frac{73\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 7 \cdot 2\pi = \frac{85\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 8 \cdot 2\pi = \frac{97\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 9 \cdot 2\pi = \frac{109\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 10 \cdot 2\pi = \frac{121\pi}{6} > \frac{110\pi}{6}$

Portanto, os arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ entre 0° e 3 300° são: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{25\pi}{6}$, $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{49\pi}{6}$, $\frac{61\pi}{6}$, $\frac{73\pi}{6}$, $\frac{85\pi}{6}$, $\frac{97\pi}{6}$ e $\frac{109\pi}{6}$.

e) Em radianos, 720° corresponde a $720 \cdot \frac{2\pi}{360} = 4\pi$ e $-720°$, a -4π.

- $\frac{\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = -\frac{23\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi > 4\pi$

Portanto, os arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ entre $-720°$ e 720° são: $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{13\pi}{6}$.

f) Em radianos, $-1\,800°$ corresponde a

$-1\,800 \cdot \frac{2\pi}{360} = -10\pi$ e $-360°$, a -2π.

- $\frac{\pi}{6} + (-5) \cdot 2\pi = -\frac{59\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-4) \cdot 2\pi = -\frac{47\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-3) \cdot 2\pi = -\frac{35\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = -\frac{23\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi > -2\pi$

Portanto, os arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ entre $-1\,800°$ e $-360°$

são: $-\frac{59\pi}{6}$, $-\frac{47\pi}{6}$, $-\frac{35\pi}{6}$ e $-\frac{23\pi}{6}$.

17. **a)** $315° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{5\pi}{12}$ rad $+ k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$

c) A 1ª determinação positiva do arco é $2\pi - \frac{3\pi}{10} = \frac{17\pi}{10}$.

Assim, a expressão é $\frac{17\pi}{10}$ rad $+ k \cdot 2\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

18. Inicialmente, vamos calcular a 1ª determinação positiva de cada arco.

$$\begin{array}{r|l} 1\,250 & 360 \\ -1\,080 & 3 \\ \hline 170 & \end{array}$$

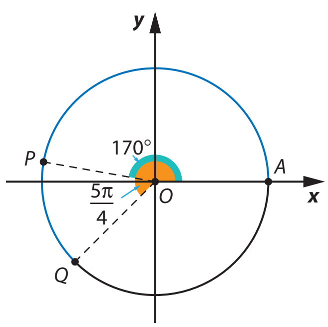
Assim, $1\,250° = 170° + 3 \cdot 360°$. Logo, a 1ª determinação positiva do arco de 1 250° é 170°.

$$-\frac{35\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - \frac{32\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - 8\pi =$$
$$= -\frac{3\pi}{4} - 4 \cdot 2\pi \text{ e } -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$$

Segue que:

$$-\frac{35\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + (-5) \cdot 2\pi$$

Logo, a 1ª determinação positiva do arco de $-\frac{35\pi}{4}$ rad é $\frac{5\pi}{4}$ rad, que corresponde a 225°.



CBOOK PRODUÇÕES

19. **a)** $\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} = \frac{23\pi}{6}$

Medida do arco, em grau	Medida do arco, em radiano
360	2π
x	$\frac{23\pi}{6}$

$$\frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{23\pi}{6}} \Rightarrow 2\pi x = 1\,380\pi \Rightarrow x = 690$$

Portanto, os três giros correspondem a um ângulo de 690°.

b) Como π rad corresponde a 180°, a medida de cada ângulo, em graus, é:

- $\frac{2\pi}{3} : \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$
- $\frac{3\pi}{2} : \frac{3}{2} \cdot 180° = 270°$
- $\frac{5\pi}{3} : \frac{5}{3} \cdot 180° = 300°$

Logo, Rafael obteve na roleta os números 5, 10 e 11. Assim, deve deslocar o peão em $5 + 10 + 11 = 26$ casas.

20. **a)** $\frac{3}{8} \cdot 360° = 135°$ ou $\frac{3}{8} \cdot 2\pi$ rad $= \frac{3\pi}{4}$ rad

b) $\frac{31\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 6\pi = \frac{7\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi$

Assim, a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{31\pi}{4}$ é $\frac{7\pi}{4}$.

Temos $\frac{7\pi}{4} : 2\pi = \frac{7}{8}$, logo, a extremidade do arco coincide com o vértice H, pois a 1ª determinação positiva corresponde a $\frac{7}{8}$ do arco de uma volta.

21. 4º quadrante

22. alternativa **c**

Como sen $\alpha > 0$ e tg $\alpha < 0$, a extremidade do arco pertence ao 2º quadrante. Considerar t a reta tangente à circunferência na origem dos arcos. Notar que a reta que contém o segmento BO intersecta a reta t em um ponto de ordenada menor do que -1, pois o ângulo entre $\overline{BO}$ e o eixo y é menor do que 45°. Portanto, o ponto C é o único que pode corresponder à extremidade desse arco.

23. **a)** Temos $610° = 250° + 1 \cdot 360°$. Como a extremidade do arco de 250° é no 3º quadrante, temos:

$\text{sen } 610° = \text{sen } 250° = -\text{sen } (250° - 180°) =$
$= -\text{sen } 70° = -0{,}940$

b) Como a extremidade do arco de 335° pertence ao 4º quadrante, temos:

$\text{tg } 335° = -\text{tg } (360° - 335°) = -\text{tg } 25° = -0{,}466$

c) Temos $\frac{53\pi}{9} = \frac{17\pi}{9} + 2 \cdot 2\pi$. Como a extremidade do arco de $\frac{17\pi}{9}$ é no 4º quadrante, temos:

$$\cos \frac{53\pi}{9} = \cos \frac{17\pi}{9} = \cos \left(2\pi - \frac{17\pi}{9}\right) =$$
$$= \cos \left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos 20° = 0{,}940$$

d) Temos $-\frac{91\pi}{36} = -\frac{19\pi}{36} - 2\pi$ e $-\frac{19\pi}{36} + 2\pi = \frac{53\pi}{36}$, logo:

$$-\frac{91\pi}{36} = \frac{53\pi}{36} + (-2) \cdot 2\pi$$

Como a extremidade do arco de $\frac{53\pi}{36}$ é no 3º quadrante, temos:

$$\text{tg } -\frac{91\pi}{36} = \text{tg } \frac{53\pi}{36} = \text{tg } \left(\frac{53\pi}{36} - \pi\right) =$$
$$= \text{tg } \frac{17\pi}{36} = \text{tg } 85° = 11{,}430$$

e) Em graus, $-\frac{43\pi}{60}$ corresponde a $-\frac{43}{60} \cdot 180° = -129°$.

Temos $-129° + 360° = 231°$, logo:
$-129° = 231° + (-1) \cdot 360°$

Como a extremidade do arco de 231° é no 3º quadrante, temos:

$\cos -\dfrac{43\pi}{60} = \cos(-129°) = \cos 231° =$

$= -\cos(231° - 180°) = -\cos 51° = -0{,}629$

f) Temos $-603° = -243° - 1 \cdot 360°$ e $-243° + 360° = 117°$, assim:

$-603° = 117° + (-2) \cdot 360°$

Como a extremidade do arco de 117° é no 2º quadrante, temos:

$\text{sen } -603° = \text{sen } 117° = \text{sen}(180° - 117°) =$

$= \text{sen } 63° = 0{,}891$

24. Temos:

• $\text{sen } \pi = 0$

• A extremidade do arco de $\dfrac{5\pi}{6}$ rad é no 2º quadrante, assim:

$\cos \dfrac{5\pi}{6} = -\cos\left(\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = -\cos \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• A extremidade do arco de $\dfrac{7\pi}{4}$ rad é no 4º quadrante, assim:

$\text{tg } \dfrac{7\pi}{4} = -\text{tg}\left(2\pi - \dfrac{7\pi}{4}\right) = -\text{tg } \dfrac{\pi}{4} = -1$

Segue que:

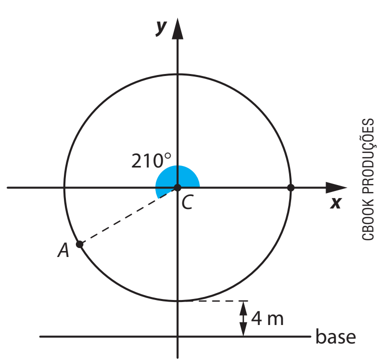
$$\frac{\text{sen } \pi + \cos \frac{5\pi}{6}}{\text{tg } \frac{\pi}{4}} = \frac{0 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

25. Note que a distância de A até a base corresponde à distância do centro C até B somado com 4 m, logo:

$BC + 4 = 104 \Rightarrow BC = 100$

Então a roda-gigante pode ser representada por uma circunferência com 100 m de raio.

Temos 1 290° = 210° + 3 · 360°, logo, a roda-gigante realizou 3 voltas completas e mais um giro de 210°, de modo que o ponto A ficou na posição ilustrada na imagem.



Como a circunferência tem 100 m de raio, então a distância do ponto A até o eixo x, em metros, corresponde a:

$100 \cdot |\text{sen}(210°)| = 100 \cdot |-\text{sen}(210° - 180°)| =$

$= 100 \cdot |-\text{sen}(30°)| = 100 \cdot \left|-\dfrac{1}{2}\right| = 50$

Logo, a distância do ponto A até a base é:

$100 - 50 + 4 = 54 \rightarrow 54$ m

26. **a)** $\text{sen } 135° = \text{sen}(90° + 45°) = \text{sen } 90° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 90° = 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 75° = \cos(45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $\text{tg } \dfrac{2\pi}{3} = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{tg } \frac{\pi}{3} + \text{tg } \frac{\pi}{3}}{1 - \text{tg } \frac{\pi}{3} \cdot \text{tg } \frac{\pi}{3}} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

d) $\text{sen } \dfrac{5\pi}{6} = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= \text{sen } \dfrac{\pi}{2} \cdot \cos \dfrac{\pi}{3} + \text{sen } \dfrac{\pi}{3} \cdot \cos \dfrac{\pi}{2} =$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 = \dfrac{1}{2}$

27.

$$\frac{\text{sen } 15°}{\text{sen } 20° \cdot \cos 10° + \text{sen } 10° \cdot \cos 20°} = \frac{\text{sen}(60° - 45°)}{\text{sen}(20° + 10°)} =$$

$$= \frac{\text{sen } 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 45° \cdot \cos 60°}{\text{sen } 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

28. **a)** $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + \left(\dfrac{7}{25}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{49}{625} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{576}{625}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos $\text{sen } x > 0$. Assim:

$\text{sen } x = \sqrt{\dfrac{576}{625}} = \dfrac{24}{25}$

b) Inicialmente, vamos determinar tg x:

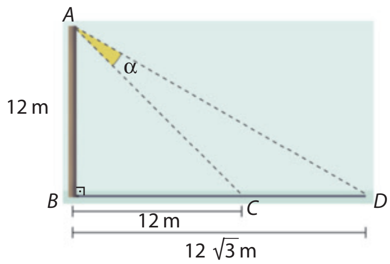
$\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \dfrac{24}{7}$

Segue que:

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } y} = \frac{\frac{24}{7} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{24}{7} \cdot \frac{12}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{204}{35}}{1 - \frac{288}{35}} = \frac{\frac{204}{35}}{-\frac{253}{35}} = -\frac{204}{253}$$

29. Vamos nomear os vértices dos triângulos formados por *A*, *B*, *C* e *D*, conforme a figura abaixo.



Sejam *x* e *y* as medidas dos ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{A}C$, respectivamente. Temos:

- $\text{tg } x = \dfrac{12\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3}$, logo, $x = 60°$.
- $\text{tg } y = \dfrac{12}{12} = 1$, logo, $y = 45°$.

Segue que:

$\alpha + y = x \Rightarrow \alpha + 45° = 60° \Rightarrow \alpha = 15°$

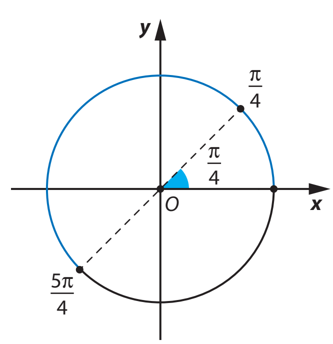
30. a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad} + k\pi \text{ rad}, k \in \mathbb{Z}$

b) Todos os arcos de medida $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, possuem a 1ª determinação positiva:

$\dfrac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \dfrac{\pi}{4}$; ou $\dfrac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \dfrac{5\pi}{4}$.

Assim, as extremidades desses arcos são representadas na figura a seguir:



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

31. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{1 - \text{sen}^2\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} =$

$= \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

32. Inicialmente, vamos calcular o valor de cos *x*:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{9}{25}$

Como $\cos^2 x > 0$, temos $\cos x = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$. Segue que:

a) $\text{sen } 2x = \text{sen } (x + x) = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x =$

$= 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$

b) $\cos 2x = \cos (x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x =$

$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25} - \dfrac{16}{25} = -\dfrac{7}{25}$

c) $\text{tg } 2x = \dfrac{\text{sen } 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\dfrac{24}{7}$

33. a) $\text{sen } 2\alpha = \text{sen } (\alpha + \alpha) =$

$= \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

b) $\cos 2\alpha = \cos (\alpha + \alpha) =$

$= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$

c) $\text{tg } 2\alpha = \text{tg } (\alpha + \alpha) = \dfrac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \alpha} = \dfrac{2 \cdot \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

34. a) Temos $\dfrac{11\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi$, assim:

$f\left(\dfrac{11\pi}{2}\right) = \text{sen } \dfrac{11\pi}{2} = \text{sen } \dfrac{3\pi}{2} = -1$

b) Temos $\dfrac{23\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi$, assim:

$g\left(\dfrac{23\pi}{6}\right) = \cos \dfrac{23\pi}{6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

35. a) $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$0 \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 2\pi \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2k\pi \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{3}{4} \Rightarrow k = 0$

Logo, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $-2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$-2\pi \leqslant \pi + 2k\pi \leqslant 4\pi \Rightarrow -3\pi \leqslant 2k\pi \leqslant 3\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant k \leqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow k = -1, 0, 1$

Logo:

- $x = \pi + 2 \cdot (-1) \cdot \pi = -\pi$
- $x = \pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi = \pi$
- $x = \pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi = 3\pi$

c) $\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $-4\pi \leqslant x \leqslant \pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos:

- $-4\pi \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \pi \Rightarrow$

  $\Rightarrow -\dfrac{13\pi}{3} \leqslant 2k\pi \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow -\dfrac{13}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

  $\Rightarrow k = -2, -1, 0$

  $-4\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \pi \Rightarrow$

  $\Rightarrow -\dfrac{11\pi}{3} \leqslant 2k\pi \leqslant \dfrac{4\pi}{3} \Rightarrow -\dfrac{11}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{2}{3} \Rightarrow k = -1, 0$

Logo:

- $x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot (-2) \cdot \pi = -\frac{11\pi}{3}$
- $x = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot (-1) \cdot \pi = -\frac{7\pi}{3}$
- $x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot (-1) \cdot \pi = -\frac{5\pi}{3}$
- $x = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi = -\frac{\pi}{3}$
- $x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$

36. **a)** $-1 \leqslant 2m + 11 \leqslant 1 \Rightarrow -12 \leqslant 2m \leqslant -10 \Rightarrow$
$\Rightarrow -6 \leqslant m \leqslant -5$

b) $-1 \leqslant 9 - m \leqslant 1 \Rightarrow -10 \leqslant -m \leqslant -8 \Rightarrow 8 \leqslant m \leqslant 10$

c) $-1 \leqslant \frac{5m + 1}{6} \leqslant 1 \Rightarrow -6 \leqslant 5m + 1 \leqslant 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -7 \leqslant 5m \leqslant 5 \Rightarrow -\frac{7}{5} \leqslant m \leqslant 1$

d) $3 + \text{sen}\, x = 3m \Rightarrow \text{sen}\, x = 3m - 3$

Assim:

$-1 \leqslant 3m - 3 \leqslant 1 \Rightarrow 2 \leqslant 3m \leqslant 4 \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant m \leqslant \frac{4}{3}$

37. **a)** Resposta esperada: No gráfico de função par, é possível identificar simetria de reflexão em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, se um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de uma função par, então o ponto $P'(-a, b)$ também pertence a esse gráfico. Já no gráfico de função ímpar, é possível identificar simetria de rotação em torno da origem O do sistema de eixos cartesianos, em 180°, ou seja, se um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de uma função ímpar, então o ponto $P'(-a, -b)$ também pertence a esse gráfico.

b) Algumas respostas possíveis:

função par:

- $f(x) = \cos(x)$, pois:
  $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$
- $f(x) = |x|$, pois:
  $f(-x) = |-x| = |-1| \cdot |x| = |x| = f(x)$
- $f(x) = x^2$, pois:
  $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2 = f(x)$

função ímpar:

- $f(x) = \text{sen}\,(x)$, pois:
  $f(-x) = \text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,(x) = -f(x)$
- $f(x) = x$, pois:
  $f(-x) = -x = -f(x)$
- $f(x) = x^3$, pois:
  $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x)$

c) Resposta pessoal.

38. **a)** $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \cos x + 2 \leqslant 3$
valor mínimo: 1; valor máximo: 3

b) $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2 \cdot \text{sen}\, x \leqslant 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -7 \leqslant 2 \cdot \text{sen}\, x - 5 \leqslant -3$
valor mínimo: -7; valor máximo: -3

c) $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \text{sen}\, x + 2 \leqslant 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{\text{sen}\, x + 2}{2} \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{\text{sen}\, x + 2} \leqslant 2$

valor mínimo: $\frac{2}{3}$; valor máximo: 2

d) $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 \leqslant -5 \cdot \cos x \leqslant 5 \Rightarrow -2 \leqslant 3 - 5 \cdot \cos x \leqslant 8$
valor mínimo: -2; valor máximo: 8

39. Resposta pessoal.

40. Podemos observar que o gráfico da função f, representado pela curva em verde, está acima do gráfico da função g, representado em vermelho, nos intervalos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right]$, ou seja, o conjunto solução é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{9\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{4}\right\}$.

41. $A\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, $B\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$, $F(2\pi, 0)$ e $G\left(\frac{13\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

42. **a)** $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

b) $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{\pi}{4}$

c) $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{4}\right|} = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8$

d) $p = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

43. **a)**
- Valor mínimo de f: $7 \cdot (-1) = -7$
- Valor máximo de f: $7 \cdot 1 = 7$

Logo, $Im(f) = [-7, 7]$.

b)
- Valor mínimo de g: $5 + 8 \cdot (-1) = -3$
- Valor máximo de g: $5 + 8 \cdot 1 = 13$

Logo, $Im(g) = [-3, 13]$.

c)
- Valor mínimo de m: $4 - 4 \cdot 1 = 0$
- Valor máximo de m: $4 - 4 \cdot (-1) = 8$

Logo, $Im(m) = [0, 8]$.

d) O valor mínimo e máximo de $|\cos x|$ são, respectivamente, 0 e 1. Assim:
- Valor mínimo de n: $2 + 0 = 2$
- Valor máximo de n: $2 + 1 = 3$

Logo, $Im(n) = [2, 3]$.

44. alternativa **d**

Suponha que g é da forma $g(x) = a + b\cos(cx + d)$.

- Como o gráfico é deslocado 3 unidades para baixo, temos $a = -3$
- Como a amplitude do gráfico é $(-1) - (-5) = 4$, então: $|b| = \frac{4}{2} = 2$
- Como o período de g é $p = \frac{\pi}{3}$, temos: $p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 6$
- Como o gráfico é deslocado em π unidades para a esquerda, temos:

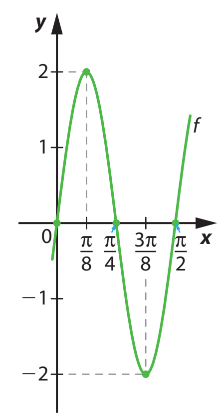
$$\frac{d}{c} = \pi \Rightarrow \left|\frac{d}{c}\right| = \pi \Rightarrow \frac{|d|}{6} = \pi \Rightarrow |d| = 6\pi$$

Portanto, a lei de formação de g pode ser a da alternativa **d**.

45. Resposta pessoal.

46. a)

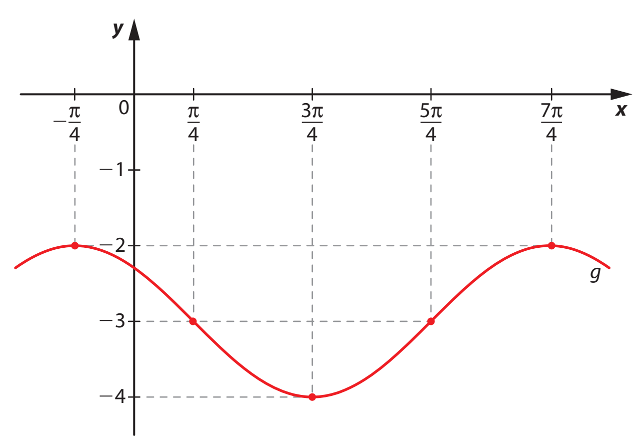
x	$y = f(x) = 2\operatorname{sen}(4x)$	(x, y)
0	$y = 2\operatorname{sen}\underbrace{(4 \cdot 0)}_{0} = 0$	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{8}$	$y = 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(4 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = 2$	$\left(\frac{\pi}{8}, 2\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$y = 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)}_{\pi} = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
$\frac{3\pi}{8}$	$y = 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(4 \cdot \frac{3\pi}{8}\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = -2$	$\left(\frac{3\pi}{8}, -2\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}_{2\pi} = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

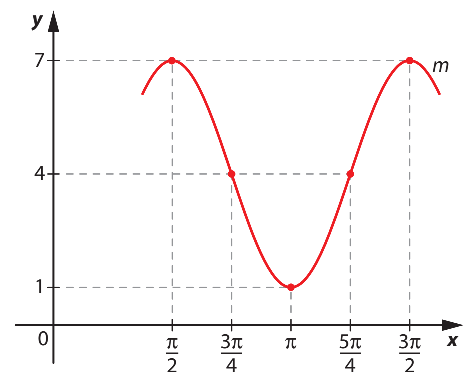
b)

x	$y = g(x) = -3 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	(x, y)
$-\frac{\pi}{4}$	$y = -3 + \cos\underbrace{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}_{0} = -2$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -2\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$y = -3 + \cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = -3$	$\left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y = -3 + \cos\underbrace{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}_{\pi} = -4$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -4\right)$
$\frac{5\pi}{4}$	$y = -3 + \cos\underbrace{\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = -3$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -3\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$y = -3 + \cos\underbrace{\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}_{2\pi} = -2$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -2\right)$



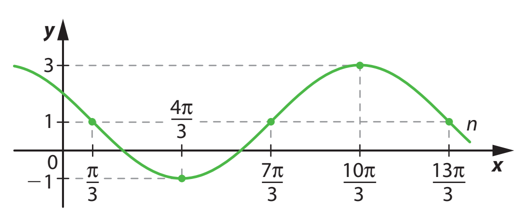
c)

x	$y = m(x) = 4 + 3\cos(2x - \pi)$	(x, y)
$\frac{\pi}{2}$	$y = 4 + 3\cos\underbrace{\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi\right)}_{0} = 7$	$\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y = 4 + 3\cos\underbrace{\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4} - \pi\right)}_{\frac{\pi}{2}} = 4$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 4\right)$
π	$y = 4 + 3\cos\underbrace{(2 \cdot \pi - \pi)}_{\pi} = 1$	$(\pi, 1)$
$\frac{5\pi}{4}$	$y = 4 + 3\cos\underbrace{\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4} - \pi\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = 4$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 4\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = 4 + 3\cos\underbrace{\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2} - \pi\right)}_{2\pi} = 7$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 7\right)$

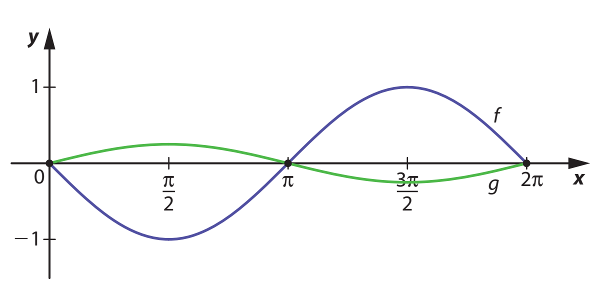


d)

x	$y = n(x) = 1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$	(x, y)
$\frac{\pi}{3}$	$y = 1 - 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}_{0} = 1$	$\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$
$\frac{4\pi}{3}$	$y = 1 - 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = -1$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -1\right)$
$\frac{7\pi}{3}$	$y = 1 - 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}_{\pi} = 1$	$\left(\frac{7\pi}{3}, 1\right)$
$\frac{10\pi}{3}$	$y = 1 - 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{10\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = 3$	$\left(\frac{10\pi}{3}, 3\right)$
$\frac{13\pi}{3}$	$y = 1 - 2\operatorname{sen}\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{13\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}_{2\pi} = 1$	$\left(\frac{13\pi}{3}, 1\right)$



47. a)



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

b) Sim. Em três pontos.

48. alternativa **c**

• Como os valores máximo e mínimo da função são, respectivamente, 0,5 e $-0{,}5$, então $|\alpha| = 0{,}5$.

• Como o período da função é $p = \frac{\pi}{2}$, então:

$$p = \frac{2\pi}{|\beta|} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|\beta|} \Rightarrow |\beta| = 4$$

• Como $f(0) = 0$, temos:

$$\alpha \cos(\beta \cdot 0 + \gamma) = 0 \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a alternativa **c** é a correta.

49. alternativa **b**

Vamos calcular a frequência $f = \frac{1}{p}$ da onda sonora correspondente a cada função, sendo p o seu período, em segundos.

a) $f = \frac{|30\pi|}{2\pi} = 15 \rightarrow 15$ Hz

b) $f = \frac{|240\pi|}{2\pi} = 120 \rightarrow 120$ Hz

c) $f = \frac{|20\pi|}{2\pi} = 10 \rightarrow 10$ Hz

d) $f = \frac{\left|\frac{151\pi}{4}\right|}{2\pi} = 18{,}875 \rightarrow 18{,}875$ Hz

Logo, a função da alternativa **b** é a que pode descrever uma onda sonora audível por uma pessoa, pois é a única cuja frequência está dentro do intervalo entre 20 Hz e 20 000 Hz.

50. alternativa **a**

• Altura máxima: $1{,}8 + 1{,}2 \cdot 1 = 3{,}0 \rightarrow 3{,}0$ m

• Altura mínima: $1{,}8 + 1{,}2 \cdot (-1) = 0{,}6 \rightarrow 0{,}6$ m

51. a) Sendo 110 mmHg e 70 mmHg, respectivamente, a pressão arterial máxima e mínima, temos:

$$\begin{cases} A + B \cdot 1 = 110 \\ A + B \cdot (-1) = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 110 \\ \underline{A - B = 70} \end{cases} + \\ \quad 2A + 0B = 180 \Rightarrow A = 90$$

Substituindo $A = 90$ na primeira equação, temos:

$90 + B = 110 \Rightarrow B = 20$

Para determinar o período, observe a seguinte proporção:

Batimentos	Tempo (s)
75	60
1	x

$$\frac{75}{1} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$$

Segue que:

$$p = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow |k| = 2{,}5\pi \Rightarrow k = \pm 2{,}5\pi$$

Observe que, como $\cos(kt) = \cos(-kt)$, podemos considerar $k = 2{,}5\pi$. Portanto, uma resposta possível é $p(t) = 90 + 20 \cdot \cos(2{,}5\pi t)$.

b) O valor da função varia de 70 mmHg a 110 mmHg e seu período é de $\frac{4}{5} = 0{,}8$. Logo, o gráfico **II** é o que melhor a representa.

52. a) 0,18 ampere; $-0{,}18$ ampere

b) • Seja $t_0 \in D(i)$ tal que $\text{sen}(\omega t_0 + \phi) = 1$. Então $i(t_0)$ assume seu valor máximo ou mínimo, logo:

$|i(t_0)| = 0{,}18 \Rightarrow |I \cdot \text{sen}(\omega t_0 + \phi)| = 0{,}18 \Rightarrow |I| = 0{,}18$

Como I é não negativo, a amplitude é $I = 0{,}18$.

• Como o período da função é $p = \frac{1}{60}$, temos:

$$p = \frac{2\pi}{|\omega|} \Rightarrow \frac{1}{60} = \frac{2\pi}{|\omega|} \Rightarrow |\omega| = 120\pi$$

Como ω é não negativo, a frequência angular é $\omega = 120\pi$.

c) Sendo i uma função do tipo trigonométrica e observando o gráfico, temos que o ponto de máximo destacado possui abscissa $\frac{1}{60} : 4 = \frac{1}{240}$. Assim:

$$i\left(\frac{1}{240}\right) = 0{,}18 \Rightarrow 0{,}18 \cdot \text{sen}\left(\frac{120\pi}{240} + \phi\right) = 0{,}18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tomando $k = 0$, obtemos a constante de fase $\phi = 0$. Assim:

$i(t) = 0{,}18 \cdot \text{sen}(120\pi t)$

d) • $t = 1$:

$i(1) = 0{,}18 \cdot \text{sen}(120\pi \cdot 1) = 0{,}18 \cdot \text{sen}(60 \cdot 2\pi) =$

$= 0{,}18 \cdot 0 = 0 \rightarrow 0$ ampere

• $t = \frac{241}{240}$:

$$i\left(\frac{241}{240}\right) = 0{,}18 \cdot \text{sen}\left(120\pi \cdot \frac{241}{240}\right) =$$

$$= 0{,}18 \cdot \text{sen}\left(\frac{241\pi}{2}\right) =$$

$$= 0{,}18 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 60 \cdot 2\pi\right) = 0{,}18 \cdot 1 =$$

$= 0{,}18 \rightarrow 0{,}18$ ampere

53. Resposta pessoal.

54. Resposta pessoal.

55. a) $\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x \cdot (\text{sen}\, x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \\ \quad \text{ou} \\ \text{sen}\, x = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

- $x - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$;
- $x - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + x\right) = -1 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} + x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$;
- $2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

56. a) $\text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 1 \\ \text{ou} \\ \text{sen}\, x = -1 \end{cases}$

Logo, para $x \in [0, 2\pi[$, temos $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

b) $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Logo, para $x \in [-\pi, \pi]$, temos $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) $\text{sen}^2 x + \cos x = 1 \Rightarrow (1 - \cos^2 x) + \cos x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot (-\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x = 1 \end{cases}$

Logo, para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$, temos $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = 2\pi$.

d) $\text{sen}\, x \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\, x \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \frac{5\pi}{4} = k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{4} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}$

Para $x \in]2\pi, 4\pi]$, temos:

$2\pi < x \leqslant 4\pi \Rightarrow 2\pi < -\frac{5\pi}{4} + k\pi \leqslant 4\pi \Rightarrow$

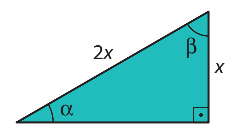
$\Rightarrow \frac{13\pi}{4} < k\pi \leqslant \frac{21\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{13}{4} < k \leqslant \frac{21}{4} \Rightarrow k = 4 \text{ ou } k = 5$

Portanto, $x = -\frac{5\pi}{4} + 4\pi = \frac{11\pi}{4}$ ou $x = -\frac{5\pi}{4} + 5\pi = \frac{15\pi}{4}$.

57. 3 raízes reais

58.



CBOOK PRODUÇÕES

Como α e β são ângulos agudos, temos:

- $\text{sen}\, \alpha = \frac{x}{2x} \Rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$
- $\cos \beta = \frac{x}{2x} \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60°$

Portanto, os ângulos internos medem 30°, 60° e 90°.

59. alternativa **d**

Como o conjunto imagem da função cosseno é $[-1, 1]$ e, de acordo com a lei de formação da função f, temos que o valor máximo de f é obtido quando $\cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right) = 1$. Assim, podemos substituir $\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right)$ por 1 na lei de formação de f para obter o valor máximo dessa função.

$f(t) = 1{,}625 + 1{,}25 \cdot 1 = 2{,}875$

Assim, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y é de 2,875.

Para determinar o mês em que o valor máximo ocorre, temos de considerar que $\cos x = 1$ para $x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$\cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right) = 1 \Rightarrow \pi \cdot \frac{(t-3)}{12} = 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 24k + 3 \text{ com } k \in \mathbb{Z}$

Como a análise da taxa de câmbio ocorreu no período de 1 ano e $t = 9$ indica a taxa no início de outubro, temos que:

$0 \leqslant t \leqslant 11 \Rightarrow 0 \leqslant 24k + 3 \leqslant 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 \leqslant 24k \leqslant 8 \Rightarrow -\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant \frac{1}{3}$

Dado que $k \in \mathbb{Z}$, segue que $k = 0$. Assim:

$t = 24 \cdot 0 + 3 = 3$

Logo, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y ocorreu quando $t = 3$, ou seja, no início de abril.

60. Resposta pessoal.

Integrando

1. Resposta pessoal.
2. Resposta esperada: Movimento de rotação, pois nele a Terra gira em torno de seu eixo imaginário.
3. • 14,4 horas. 22/12/2020.
   • 9,92 horas. 21/06/2021.
4. $h(100) = 12{,}16 + 2{,}24 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{100}{365}\right) \simeq 11{,}82 \rightarrow$
   $\rightarrow$ aproximadamente 11,82 h
5. **a)** Resposta pessoal.
   b) Resposta pessoal.
   c) Resposta pessoal
   d) Resposta pessoal

O que estudei

1. Resostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. **a)** I) Resposta esperada: Sim, as moradias estão dispostas em formato circular cujo centro corresponde à posição onde o *baito* está localizado, garantindo que todas essas moradias fiquem, aproximadamente, à mesma distância do *baito*.
   II) • Comprimento da circunferência:
   $2\pi \cdot 90 = 180\pi \rightarrow 180\pi$ m ou aproximadamente 565,2 m
   • A distância de uma moradia até o *baito* corresponde à medida do raio da circunferência, logo, a pessoa vai percorrer:
   $2 \cdot 90 = 180 \rightarrow 180$ m
   • Medida do arco em grau: $360° : 15 = 24°$;
   Medida do arco em radiano: $\frac{2\pi}{15}$ rad.

   b) I) $Im(f) = [-1, 1]$; período de f: 4π; valor máximo de f: 1; valor mínimo de f: -1
   II) Como o período da função é $p = 4\pi$, temos:
   $$p = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow |k| = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$
   • Para $k = \frac{1}{2}$: $f(\pi) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
   • Para $k = -\frac{1}{2}$: $f(\pi) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (Incorreto)
   Pelo gráfico, podemos observar que $f(\pi) = 1$, logo, $k = \frac{1}{2}$. Assim, a lei de formação de f é $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.
   III) Resposta esperada: Função ímpar, pois:
   $$f(-x) = \text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) = -f(x)$$
   IV) Os gráficos das funções g, h e m correspondem a deslocamentos verticais do gráfico da função f em 1 unidade para cima, 1 unidade para baixo e duas unidades para cima, respectivamente.
   $$g(x) = 1 + \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right);\ h(x) = -1 + \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right);$$
   $$m(x) = 2 + \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right).$$

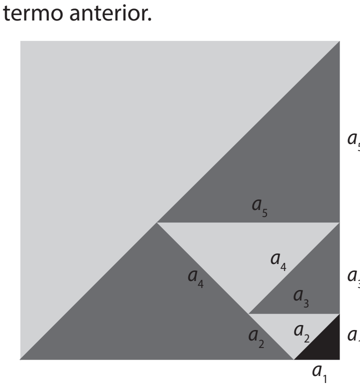
+Atividades

1. alternativa **c**
   As distâncias pedaladas em cada dia de treino formam uma PA de razão r em que $a_1 = 60$, o último termo é $a_n = 180$, e a soma dos termos é $S_n = 1\,560$. Assim:
   $$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 1\,560 = \frac{n \cdot (60 + 180)}{2} \Rightarrow n = 13$$
   Segue que:
   $a_{13} = a_1 + 12r \Rightarrow 180 = 60 + 12r \Rightarrow 12r = 120 \Rightarrow$
   $\Rightarrow r = 10 \rightarrow 10$ km

2. alternativa **d**
   Os instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente formam uma PA em que $a_1 = 1$ e a razão é igual ao mínimo múltiplo comum entre 2, 3 e 4, ou seja, $r = 12$. Assim, o termo geral é:
   $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 12(n - 1) + 1$
   A quantidade de termos dessa PA corresponde ao maior inteiro n_0 tal que:
   $$12(n_0 - 1) + 1 < 60 \Rightarrow 12(n_0 - 1) < 59 \Rightarrow n_0 - 1 < \frac{59}{12} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow n_0 < \frac{71}{12} \simeq 5{,}9$$
   Portanto, o termo geral é $12(n - 1) + 1$, com n um número natural, tal que $1 \leqslant n \leqslant 5$.

3. alternativa **b**
   As distâncias percorridas em cada dia de treino formam uma PA em que $a_1 = 300$ e $r = 200$. Assim, no dia n, o atleta percorrerá:
   $a_n = 300 + (n - 1) \cdot 200 = 200n + 100$
   O total percorrido do dia 1 até o dia n será, então:
   $$S_n = \frac{n \cdot (300 + 200n + 100)}{2} = 100n^2 + 200n$$
   Logo, a quantidade de dias que o *chip* poderá ser usado corresponde ao maior inteiro n tal que:
   $S_n < 9\,500 \Rightarrow 100n^2 + 200n < 9\,500 \Rightarrow n^2 + 2n - 95 < 0$
   Resolvendo a equação $n^2 + 2n - 95 = 0$, temos:
   $$n = -1 \pm 4\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} n_1 \simeq 8{,}8 \\ n_2 \simeq -10{,}8 \end{cases}$$
   Logo, $S_8 < 9\,500$ e $S_9 > 9\,500$.

4. alternativa **a**
   Observe que as medidas indicadas dos catetos dos triângulos formam uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos possuem a medida correspondente ao termo anterior.



EDITORIA DE ARTE

Em um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem ℓ e a hipotenusa mede d, temos:

$\ell^2 + \ell^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$

Logo, a sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ é uma PG com primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = \sqrt{2}$. Assim:

- $a_3 = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4$
- $a_5 = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 = 8$

Portanto, a medida do lado do quadrado é:

$2 + 4 + 8 = 14 \rightarrow 14$ cm

5. alternativa **d**

O número de passagens vendidas em cada mês, a partir de janeiro, forma uma PA em que $a_1 = 33\,000$ e $r = 34\,500 - 33\,000 = 1\,500$. A quantidade vendida em julho corresponde ao termo a_7, o qual é igual a:

$a_7 = 33\,000 + 6 \cdot 1\,500 = 42\,000$

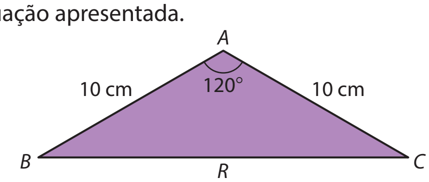
6. alternativa **b**

Cada figura, a partir da segunda, exige 3 canudos a mais para ser formada em relação à figura anterior, logo, a quantidade de canudos necessária para construir cada figura forma uma PA em que $a_1 = 4$ e $r = 3$. Assim, a quantidade de canudos $C = a_n$ se relaciona com a quantidade de quadrados $Q = n$ por meio da expressão:

$C = 4 + (Q - 1) \cdot 3 \Rightarrow C = 3Q + 1$

7. alternativa **d**

Observe o esquema a seguir, que representa o compasso na situação apresentada.



Pela lei dos cossenos, temos:

$R^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 200 - 200 \cdot (-\cos 60°) \Rightarrow$

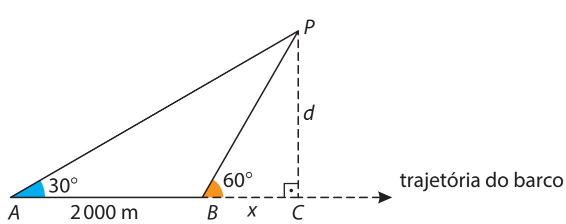
$\Rightarrow R^2 = 200 + 200 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow R^2 = 300 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = 10\sqrt{3} \simeq 17 \\ \text{ou} \\ R = -10\sqrt{3} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Como $15 < \underbrace{R}_{17} \leqslant 20$, o tipo de material a ser usado é o **IV**.

8. alternativa **b**

Considere d a distância do ponto P até sua projeção C na reta correspondente à trajetória do barco e x a distância de B a C, conforme o esquema a seguir.



Temos:

- $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{d}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{d}{x} \Rightarrow x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$
- $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{d}{2\,000 + x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{d}{2\,000 + x}$

Substituindo $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ na segunda equação, temos:

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{d}{2\,000 + \dfrac{d}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 3d = 2\,000\sqrt{3} + d \Rightarrow$

$\Rightarrow 2d = 2\,000\sqrt{3} \Rightarrow d = 1\,000\sqrt{3}$

Logo, a menor distância que o barco estará do ponto P será $d = 1\,000\sqrt{3}$ m.

9. alternativa **c**

Seja h a altura em que o balão se encontrava. Então:

- De acordo com o primeiro relato:

$\operatorname{tg} 60° = \dfrac{h}{1{,}8} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h}{1{,}8} \Rightarrow h = 1{,}8\sqrt{3} \simeq 3{,}12$

- De acordo com o segundo relato:

$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{h}{5{,}5} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{5{,}5} \Rightarrow h = 1{,}8\overline{3}\sqrt{3} \simeq 3{,}18$

Observe que ambos os relatos são coerentes e determinam uma altura aproximada de 3,1 km para o balão.

10. alternativa **d**

Vamos calcular o número de voltas da roda da bicicleta de cada ciclista.

- Ciclista **A**:

Comprimento da circunferência da roda:

$2\pi \cdot \dfrac{60}{2} = 60\pi \rightarrow 60\pi$ cm

Distância percorrida: 10 km $= 10 \cdot 10^5$ cm $= 10^6$ cm

Número aproximado de voltas da roda: $\dfrac{10^6}{60\pi}$

- Ciclista **B**:

Comprimento da circunferência da roda:

$2\pi \cdot \dfrac{40}{2} = 40\pi \rightarrow 40\pi$ cm

Distância percorrida: 5 km $= 5 \cdot 10^5$ cm

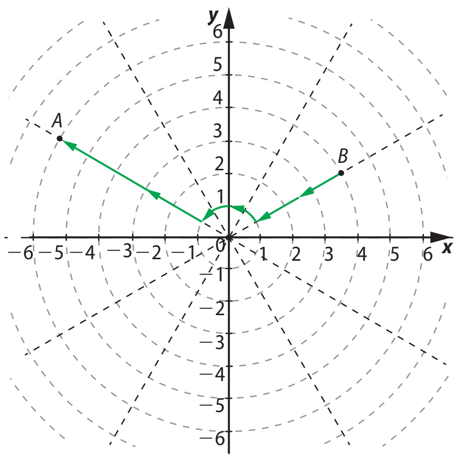
Número aproximado de voltas da roda: $\dfrac{5 \cdot 10^5}{40\pi}$

Assim, a relação entre o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista **A** e o número de voltas efetuadas pelas rodas da bicicleta do ciclista **B** é dada por:

$$\dfrac{\dfrac{10^6}{60\pi}}{\dfrac{5 \cdot 10^5}{40\pi}} = \dfrac{10^6}{60\pi} \cdot \dfrac{40\pi}{5 \cdot 10^5} = \dfrac{10 \cdot 40}{60 \cdot 5} = \dfrac{80}{60} = \dfrac{4}{3}$$

11. alternativa **a**

Observe que os pontos A e B estão sobre os lados de um ângulo de medida $4 \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$. O comprimento de um arco com essa medida é $\dfrac{2\pi}{3} \cdot r \simeq 2{,}09r$, o que é maior que a distância que se percorre sobre os lados do ângulo $(2r)$ para ir de uma extremidade à outra do arco de raio r. Logo, o caminho mais curto de B para A é passar pelo arco de menor raio, de modo a evitar a origem (0, 0), como na imagem a seguir.



EDITORIA DE ARTE

Como a distância entre duas circunferências consecutivas é de 1 unidade, a distância total do trajeto é:

$$3 + \frac{2\pi}{3} \cdot 1 + 5 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8$$

12. alternativa **b**

Para x variando de 0° a 90°, o valor de sen x varia de 0 a 1, de modo que a intensidade luminosa máxima é $k \cdot 1 = k$.

Quando $x = 30°$, temos:

$$I(x) = I(30°) = k \cdot \text{sen } 30° = k \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5k$$

Portanto, nessa situação, a intensidade luminosa se reduz a 50% de seu valor máximo.

13. alternativa **b**

O período p da função depende apenas de b, pois $p = \frac{2\pi}{|b|}$. Logo, b é o único parâmetro que necessita ser alterado.

14. alternativa **a**

A pressão mínima ocorre quando cos $(kt) = -1$, e a pressão máxima, quando cos $(kt) = 1$. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} A + B \cdot (-1) = 78 \\ A + B \cdot 1 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = 78 \\ A + B = 120 \end{cases} \Rightarrow A = 99 \text{ e } B = 21$$

Para determinar k, observe que:

Batimentos	Tempo (em segundos)
90	60
1	x

$$\frac{90}{1} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Logo, o período da função é igual a $\frac{2}{3}$ segundo. Assim, como k é positivo:

$$\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = 3\pi$$

Portanto, $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

15. alternativa **b**

Observe que:

- $0 \leqslant h \leqslant 12 \Rightarrow -12 \leqslant h - 12 \leqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\pi \leqslant \frac{\pi}{12}(h - 12) \leqslant 0 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) \leqslant 0$
- $12 \leqslant h \leqslant 24 \Rightarrow 0 \leqslant h - 12 \leqslant 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{\pi}{12}(h - 12) \leqslant \pi \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) \geqslant 0$

Logo, para que a temperatura seja menor durante a tarde ($h \geqslant 12$), é necessário que o parâmetro B seja negativo. Assim, a função T deve atingir o valor máximo quando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = -1$ e o valor mínimo quando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = 1$. Então, temos o sistema:

$$\begin{cases} A + B \cdot (-1) = 26 \\ A + B \cdot 1 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases} \Rightarrow A = 22 \text{ e } B = -4$$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

16. alternativa **c**

A quantidade de chapas fabricadas em cada mês do período forma uma PA em que $a_1 = 28\,000$ e $a_7 = 8\,800$.

A razão r da PA é dada por:

$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 8\,800 = 28\,000 + 6r \Rightarrow$
$\Rightarrow 6r = -19\,200 \Rightarrow r = -3\,200$

Então a produção de maio e junho totaliza:

$a_5 + a_6 = (a_1 + 4r) + (a_1 + 5r) = 2a_1 + 9r =$
$= 2 \cdot 28\,000 + 9 \cdot (-3\,200) =$
$= 56\,000 - 28\,800 = 27\,200 \rightarrow 27\,200$ chapas

17. alternativa **a**

Os deslocamentos efetuados pela bola nas descidas formam uma PG em que o primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razão é $q = \frac{1}{2}$. Já os deslocamentos efetuados nas subidas formam uma PG em que o primeiro termo é $b_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ e a razão também é $q = \frac{1}{2}$. Assim, a soma de todos os deslocamentos é:

$$\frac{a_1}{1-q} + \frac{b_1}{1-q} = \frac{a_1 + b_1}{1-q} = \frac{4 + 2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \rightarrow$$
$\rightarrow 12$ m

18. alternativa **c**

O gráfico pode ser obtido a partir da função seno, realizando-se a compressão de seu período. Como o período p da função é igual a π e sendo $y = \text{sen}(ct)$, com $c > 0$, temos:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 2$$

Portanto, $y = \text{sen}(2t)$.

19. alternativa **b**

Pela lei dos cossenos, a medida x do terceiro lado é dada por:

$x^2 = 7^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 135° \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 99 - 70\sqrt{2} \cdot (-\cos 45°) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 99 + 70\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 99 + 70 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = -13$ (não convém) ou $x = 13 \rightarrow 13$ m

20. alternativa **a**

- Progressão geométrica *A*:

$a_9 = a_1 \cdot q^8 \Rightarrow a_9 = \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4} \cdot q^5 \Rightarrow 1\,792 = 56 \cdot q^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow q = 2$

$a_4 = 56 \Rightarrow a_1 \cdot q^3 = 56 \Rightarrow a_1 \cdot 2^3 = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \cdot 8 = 56 \Rightarrow a_1 = 7$

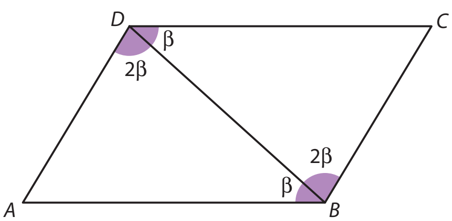
- Progressão geométrica *B*:

O primeiro termo é $b_1 = a_1 = 7$ e a razão é igual a $2 + 1 = 3$. Logo, o quarto termo é:

$b_4 = 7 \cdot 3^3 = 7 \cdot 27 = 189$

21. alternativa **c**

Observe que a diagonal determina dois pares de ângulos alternos internos, de modo que os dois ângulos com vértices nas extremidades dessa diagonal são divididos em ângulos de medidas β e 2β, conforme a figura.



Note que o lado $\overline{AB}$ é maior do que o lado $\overline{AD}$, pois corresponde ao lado do triângulo *ABD* oposto ao ângulo de medida 2β, que é maior do que a medida β do ângulo oposto ao lado $\overline{AD}$. Utilizando a lei dos senos nesse triângulo, temos $\dfrac{AB}{\text{sen } 2\beta} = \dfrac{AD}{\text{sen } \beta}$. Assim, a razão entre o maior e o menor lado do paralelogramo é:

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{\text{sen } 2\beta}{\text{sen } \beta} = \dfrac{2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta}{\text{sen } \beta} = 2\cos \beta$

22. alternativa **c**

- $\text{tg } 2\,160° = \text{tg } (6 \cdot 360°) = \text{tg } 0° = 0$

$\cos\left(-\dfrac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\text{sen } 2\,640° = \text{sen } (120° + 7 \cdot 360°) = \text{sen } (120°) =$

$= \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos \dfrac{5\pi}{4} = -\cos\left(\dfrac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\cos \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim:

$$x = \dfrac{0 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

23.
- $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } 2\alpha =$
$= \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha) - \text{sen } \alpha \cdot (2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos\alpha) =$
$= \cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot \text{sen}^2\,\alpha - 2\text{sen}^2\,\alpha \cdot \cos\alpha =$
$= \cos^3\alpha - 3\text{sen}^2\,\alpha \cdot \cos\alpha =$
$= \cos^3\alpha - 3 \cdot (1 - \cos^2\alpha) \cdot \cos\alpha =$
$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\text{sen } 3\alpha = \text{sen } (\alpha + 2\alpha) = \text{sen } \alpha \cdot \cos 2\alpha + \text{sen } 2\alpha \cdot \cos\alpha =$
$= \text{sen } \alpha \cdot (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha) + (2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\alpha =$
$= \text{sen } \alpha \cdot \cos^2\alpha - \text{sen}^3\,\alpha + 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos^2\alpha =$
$= 3\text{sen } \alpha \cdot \cos^2\alpha - \text{sen}^3\,\alpha = 3\text{sen } \alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\,\alpha) - \text{sen}^3\,\alpha =$
$= 3\text{sen } \alpha - 3\text{sen}^3\,\alpha - \text{sen}^3\,\alpha = 3\text{sen } \alpha - 4\text{sen}^3\,\alpha$

24. alternativa **a**

Como o ponto de coordenadas $(0, -1)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$-1 = a + b\cos 0 \Rightarrow a + b = -1$

Note que, como -1 não é o valor máximo da função e $\cos 0 = 1$, então o valor máximo é obtido quando $\cos x = -1$, logo:

$a + b \cdot (-1) = 5 \Rightarrow a - b = 5$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 5 \end{cases}$, temos $a = 2$ e $b = -3$. Assim:

$5a + 2b = 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 4$

25. alternativa **e**

- Altura máxima: $12{,}6 + 4 \cdot 1 = 16{,}6 \rightarrow 16{,}6$ metros
- Altura mínima: $12{,}6 + 4 \cdot (-1) = 8{,}6 \rightarrow 8{,}6$ metros
- O tempo gasto para uma volta completa corresponde ao período *p* da função, o qual é dado por:

$p = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{18}} = 36 \rightarrow 36$ segundos

26. alternativa **b**

Considere a função $I(t) = A + B\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$. O parâmetro *A* corresponde ao valor médio entre o mínimo e o máximo.

Como esses valores são, respectivamente, 20 decibéis e 40 decibéis, então:

$A = \dfrac{20 + 40}{2} = 30$

O módulo do parâmetro *B* corresponde à diferença entre o valor máximo e esse valor médio, ou seja:

$|B| = 40 - 30 = 10$

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

27. alternativa **b**

A sequência $(A_0A_1, B_0B_1, A_1A_2, B_1B_2, A_2A_3, ...)$ é uma PG em que $a_1 = A_0A_1$, $q = \dfrac{2}{3}$ e cujo limite da soma é igual a $A_0B_0 = 6$. Assim:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1 - q} \Rightarrow 6 = \dfrac{A_0A_1}{1 - \dfrac{2}{3}} \Rightarrow A_0A_1 = 2$

Por outro lado, a sequência $(B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, ...)$ é uma PG em que $b_1 = \dfrac{2}{3}A_0A_1 = \dfrac{4}{3}$, $q = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$ e cujo limite da soma é igual a B_0C. Assim:

$B_0C = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1 - q} = \dfrac{\dfrac{4}{3}}{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{9}{5} = \dfrac{12}{5}$

28. alternativa **e**

Temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{OM}{CO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OM}{1} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, a área do triângulo é: $\dfrac{CO \cdot OM}{2} = \dfrac{1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

29. alternativa **b**

Temos:

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{144}{169}$$

Como θ está no 2º quadrante, temos $\cos\theta < 0$, assim: $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{144}{169}} = -\dfrac{12}{13}$

Segue que: $\text{tg }\theta = \dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\dfrac{5}{13}}{-\dfrac{12}{13}} = -\dfrac{5}{12}$

Utilizando a fórmula da tangente da soma, temos:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2\text{tg }\theta}{1 - \text{tg}^2\,\theta} = \frac{2 \cdot \left(-\dfrac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\dfrac{5}{12}\right)^2} = \frac{-\dfrac{5}{6}}{1 - \dfrac{25}{144}} = \frac{-\dfrac{5}{6}}{\dfrac{119}{144}} = -\frac{5 \cdot 144}{6 \cdot 119} = -\frac{120}{119}$$

30. alternativa **c**

As distâncias percorridas em cada dia do treinamento formam uma PA em que $a_1 = 6$, $r = 2$ e último termo $a_n = 42$. Vamos determinar o número n de termos dessa PA.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 42 = 6 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n - 1 = 18 \Rightarrow n = 19$

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, em quilômetros, corresponde à soma dos termos dessa PA, ou seja:

$$S_{19} = \frac{19 \cdot (a_1 + a_{19})}{2} = \frac{19 \cdot (6 + 42)}{2} = 456$$

31. alternativa **a**

$$\text{tg }\theta = \frac{c - a}{d - b} = \frac{a \cdot q^2 - a}{a \cdot q^3 - a \cdot q} = \frac{a \cdot (q^2 - 1)}{aq \cdot (q^2 - 1)} = \frac{a}{aq} = \frac{1}{q}$$

32. alternativa **b**

De acordo com a lei dos senos, a razão entre a medida do lado de um triângulo e o seno do ângulo interno oposto a esse lado é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo, logo:

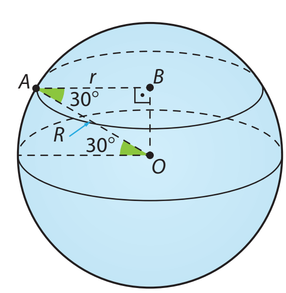
$$\frac{AB}{\text{sen } 60°} = 2R \Rightarrow \frac{80}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{160}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{80}{\sqrt{3}} = \frac{80\sqrt{3}}{3} \to \frac{80\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

33. alternativa **c**

Observe o esquema ao lado, que representa a Terra com a linha do equador e o paralelo 30° N traçados.

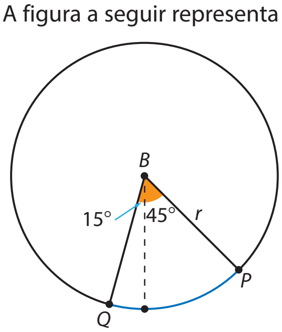
A medida OA corresponde ao raio da Terra $R = 6\,300$ km, enquanto $AB = r$ corresponde ao raio da circunferência do paralelo 30° N. Assim:

$$\cos 30° = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{6\,300} \Rightarrow r = 3\,150\sqrt{3}$$



GRÁFICOS: CBOOK PRODUÇÕES

A figura a seguir representa os pontos P e Q sobre esse paralelo.



O menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ nessa circunferência é o arco de medida $\underbrace{60°}_{15° + 45°}$, cujo comprimento é dado pela seguinte regra de três:

Medida do arco (em graus)	Comprimento do arco (em km)
360	$2\pi r$
60	x

$$\frac{360}{60} = \frac{2\pi r}{x} \Rightarrow 6 = \frac{2\pi \cdot 3\,150\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 1\,050\pi\sqrt{3} \to 1\,050\pi\sqrt{3}\text{ km}$$

34. Os valores de r_M para $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$ correspondem, respectivamente, à distância do Sol até o ponto *A* e à distância do Sol até o ponto *P*, em milhões de quilômetros. Logo:

$$PA = \frac{555}{10 - 2 \cdot \underbrace{\cos 0°}_{1}} + \frac{555}{10 - 2 \cdot \underbrace{\cos 180°}_{-1}} = \frac{555}{8} + \frac{555}{12} = 115{,}625 \rightarrow 115{,}625 \text{ milhões de quilômetros}$$

35. alternativa **d**

Em uma PA qualquer, a soma dos *n* primeiros termos é:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot [a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2} = \frac{n \cdot [2a_1 + (n-1)r]}{2}$$

- Na primeira PA, o primeiro termo é 16 e a razão é 2, assim, a soma S_n é:

$$S_n = \frac{n \cdot [32 + 2 \cdot (n-1)]}{2} = \frac{32n + 2n \cdot (n-1)}{2} = 16n + n^2 - n = n^2 + 15n$$

- Na segunda PA, o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{5}{2}$, assim, a soma S'_n é:

$$S'_n = \frac{n \cdot \left[1 + \frac{5}{2} \cdot (n-1)\right]}{2} = \frac{n + \frac{5n}{2} \cdot (n-1)}{2} = \frac{\frac{5n^2}{2} - \frac{3n}{2}}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{4}$$

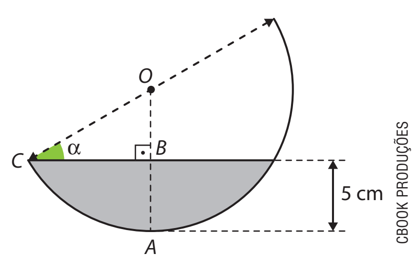
Logo, quando $S_n = S'_n$, temos: $n^2 + 15n = \frac{5n^2 - 3n}{4} \Rightarrow 4n^2 + 60n = 5n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 63n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n(n-63) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (não convém)} \\ \quad\text{ou} \\ n = 63 \end{cases}$$

Assim, as duas progressões terão somas serão iguais quando o valor dessa soma for:

$S_{63} = 63^2 + 15 \cdot 63 = 4\,914$

36. alternativa **d**



Observe, no esquema acima, que os segmentos de reta *OA* e *OC* são raios do hemisfério, logo, $OA = OC = 10$ cm. A medida *OB* é dada, em centímetros, por:

$OB + 5 = 10 \Rightarrow OB = 5$

Como o nível do líquido deve estar na horizontal, o ângulo de medida α indicado no esquema corresponde ao maior ângulo a partir do qual o líquido começará a derramar. Temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{OB}{OC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Assim, $\alpha = 30°$.

37. alternativa **b**

- Valor máximo: $3 - 5 \cdot (-1) = 8$;
- Valor mínimo: $3 - 5 \cdot 1 = -2$;
- Período: $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

38. alternativa **d**

O gráfico representa a função seno com uma ampliação vertical, com a amplitude igual a 2, e com uma compressão de seu período *p*, com $p = \pi$. Assim, a lei de formação da função é $f(x) = 2\text{sen } 2x$.

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada

Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

ISBN 978-65-5742-033-1
9 786557 420331