UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

JOSÉ BENEDITO PINTO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO APRENDIZADO DE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE FUNÇÃO PARA ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2010

JOSÉ BENEDITO PINTO

PROGRAMA STRICTO SENSU EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO APRENDIZADO DE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE FUNÇÃO PARA ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como exigência parcial à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN, para obtenção do título de mestre em Educação Matemática, sob a orientação da Profª Dra. Maria Helena Palma de Oliveira.

SÃO PAULO

2010

Pinto, José Benedito
Sequência didática no aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de licenciatura em matemática / José Benedito Pinto. -- São Paulo: [s.n.], 2010.
103f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa Strictu Sensu em Educação Matemática.
Orientador(a): Prof. Drª. Maria Helena Palma de Oliveira

1. Sequência didática 2. Taxa de variação média 3. Estudantes de licenciatura em matemática 4. Engenharia didática I. Título.

CDD 515.7

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Maria José Perón – CRB/8-2743

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter conseguido chegar ao final desse Mestrado, que é uma conquista na minha carreira de docente. Depois, à minha família, esposa e filhos que colaboraram durante todo tempo na realização desse trabalho.

Agradeço a todos os professores do Mestrado e principalmente aqueles que me apoiaram nas horas mais difíceis dessa caminhada. À minha orientadora, Professora Maria Helena Palma Oliveira, pela competência na orientação e que contribuiu na elaboração, correção e fechamento dessa dissertação.

Agradeço aos membros da banca pelo apoio e sugestões para correções.

Agradeço a UNIBAN pela oportunidade e incentivo.

Agradeço aos funcionários da Pós-graduação pela colaboração durante o curso.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Helena Palma de Oliveira (Presidente – Orientador)

Profa. Dra. Silmara Alexandra Silva Vicente (1º Membro – Titular – MACKENZIE)

Prof. Dr. Ruy Cesar Pietropaolo (2º Membro – Titular – UNIBAN)

Resumo

Este estudo objetivou estruturar, aplicar e analisar uma sequência didática de taxa de variação média para alunos da 1ª série de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada de São Paulo. O referencial teórico-metodológico apoiou-se na abordagem socioconstrutivista; na Teoria das Situações Didáticas, e, de modo substancial, na abordagem metodológica da Engenharia Didática. Os resultados do perfil socioeconômico e cultural dos alunos (14) do 1º ano do curso de Licenciatura em Matemática Campus I revelaram que 43% dos sujeitos têm idade superior a 26 anos; 71% são solteiros e 70% trabalham 40 ou mais horas semanais para composição da renda familiar; 80% concluíram o Ensino Médio em escolas públicas. Os resultados da aplicação, para os três anos do curso (121 alunos), de Teste Diagnóstico do conteúdo Funções, comprovaram que os 49 alunos do 1º ano dominavam esse conteúdo – pré-requisito para a realização das atividades da sequência didática de taxa de variação média e que, em relação às três séries, houve evolução no domínio de Função, destacando-se principalmente o domínio de questões que envolviam tarefas algorítmicas e de interpretação de gráficos. A sequência didática proposta como instrumento de mediação abrangeu 6 atividades e objetivou introduzir o conceito de taxa de variação média de uma função com o uso de tabelas, gráficos e funções polinomiais. Os resultados revelaram dificuldade com atividades que usavam tabelas: Atividades 1 (64.4% de acertos) e 2 (56.3%), e na Atividade 3 que envolvia interpretação de gráficos (37.8%). No entanto, obtiveram significativo sucesso nas atividades que envolviam a utilização da função polinomial: Atividades 4 (69.2%), 5 (88%) e 6 (100%). Evidenciou-se, portanto, a existência de uma distância significativa entre os conteúdos já dominados pelos alunos e os conteúdos de cálculo da sequência didática que envolviam interpretação gráfica. Essa distância não foi detectada pelo Teste Diagnóstico aplicado. Pode-se afirmar que a sequência didática aplicada atingiu o objetivo de introduzir o conceito de taxa de variação média de uma função com o uso de tabelas e de funções polinomiais e que é necessária a reformulação do teste diagnóstico para que possibilite a proposição de atividades de sequência didática para introdução do conceito de taxa de variação média com o uso de gráficos.

Palavras-chave: sequência didática; taxa de variação média; estudantes de licenciatura em matemática; engenharia didática.

Abstract

This study aimed to structure, apply and analyze a didactic sequence of average variation rate for first grade students of Licentiate in Mathematics of a private university in Sao Paulo, Brazil. The theoretical-methodological reference underpinned by the socio-constructivist approach; by Theory of Didactical Situations; and, in a substantial manner, by the methodological approach of Didactic Engineering. The results of socioeconomic and cultural profile of first grade students (14) of Licentiate in Mathematics showed that 43% of the subjects are over 26-year-old; 71% are single and work 40 or more hours per week to make up family income. 80% concluded High School in public schools. The results of the Diagnostic Test of Function content applied to students of the three grades (121 students) confirmed that 49 students from first grade have mastery of this content - necessary to perform the activities from the didactic sequence of average variation rate and, related to the three grades, had evolution on the command of Function, mainly the mastery of questions that involved algorithmics and graphs interpretation. The didactic sequence suggested as mediating instrument was composed of 6 activities and aimed to introduce the concept of average variation rate of a function using tables, graphs and polynomial function. The results showed some difficulty with activities using tables: Activity 1 (64.4% correct) and 2 (56.3%), and Activity 3 that involved graph interpretation (37.8%). However, they had significant success in activities that involved utilization of the polynomial function: Activity 4 (69.2%), 5 (88%) and 6 (100%). It was evidenced, therefore, the existence of an important distance between the contents the students already have the mastery of and the calculus contents of didactic sequence that involved graph interpretation. This distance have not been detected by the Diagnostic Test applied. It is possible to affirm that the didactic sequence applied achieve the objective of introducing the concept of average variation rate of a function using tables and polynomial functions and that the diagnostic test reformulation is necessary to enable the proposition of didactic sequence activities to introduce the concept of average variation rate with the use of graphs.

Keywords: didactic sequence; average variation rate; students of licentiate in mathematics; didactic engineering

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

Esta pesquisa vincula-se ao curso de Mestrado em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIBAN e à Linha de Pesquisa de Ensino e Aprendizagem e suas Inovações. A larga experiência de docência de Matemática e Física no Ensino Médio e também o significativo tempo de trabalho como docente nas mesmas disciplinas e como coordenador de ensino superior, inclusive no curso de Licenciatura em Matemática, construíram um grande interesse e preocupações com as questões que envolvem o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

O foco de interesse desta pesquisa repousa nos processos de ensino e de aprendizagem de alunos e alunas de curso de Licenciatura em Matemática. Embora o objetivo deste trabalho não seja o de discutir o processo de formação em nível superior de professores de Matemática, cabe destacar alguns aspectos relevantes em relação ao perfil do aluno que chega ao curso.

Sem dúvida, os problemas que atingem a formação em nível superior do professor de Matemática resultam de questões estruturais e conjecturais relativas à formação profissional em nível superior no Brasil, além das dificuldades características e específicas da área de formação de professores de Matemática. Avaliações institucionais como SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), realizadas pelo Governo Federal, apresentam resultados indicativos de que alunos concluintes do Ensino Médio apresentam dificuldades de operar com números reais, interpretar e construir gráficos, interpretar tabelas e resolver problemas. Após o ingresso no Ensino Superior, esses alunos que optaram por cursos que envolvem a área de exatas vão se defrontar com a disciplina de Cálculo Diferencial, em que poderão ter dificuldades no processo de aprendizagem. (BUSSE E SOARES, 2006)

Esse elemento do perfil de aluno de cursos de Licenciatura em Matemática foi analisado por Araújo e Costa (2009, p. 2) que observaram "*características problemáticas no conhecimento do professor* (aluno de licenciatura), *que provavelmente decorrem de limites da compreensão da matemática, tanto na visão da organização interna como a de relação com o mundo*". As autoras afirmam ainda que esses sinais problemáticos aparecem tanto em alunos de licenciaturas consideradas de alto nível, quanto de níveis menos conceituados.

Este trabalho tem como objetivo principal estruturar uma sequência didática de taxa de variação média para alunos da 1ª série de Licenciatura em Matemática, de uma universidade particular de São Paulo, com a finalidade de criar condições para que o aluno, inserido no contexto próprio da engenharia didática, possa aprender derivadas de funções e polinômios que são conteúdos curriculares essenciais a sua formação docente.

A importância da compreensão da taxa de variação concentra-se na necessidade de estudo das funções reais de uma variável real e, por ser elementar, podemos ensinar inclusive no Ensino Médio, o que não acontece na prática. No entanto, os professores do ensino médio trabalham derivada com seus alunos, muitas vezes sem que o pré-requisito taxa de variação média tenha sido ensinado.(BUSSE e SOARES, 2006) Ávila (1991, 2006) também defende que o conceito de derivada deve ser ensinado na 1ª serie do ensino médio paralelamente ao ensino de funções, integrando com o ensino de Física, especificamente no estudo do movimento e como conteúdo para o estudo de polinômios.

Estudo preliminar foi realizado pelo autor desta pesquisa (PINTO e OLIVEIRA, 2009), com o objetivo de apresentar resultados de uma análise diagnóstica de conteúdo de funções matemáticas, como uma das fases da construção de uma sequência didática de taxa de variação média. O teste diagnóstico foi realizado com alunos de 1º e 2º anos de curso de Licenciatura em Física de uma universidade particular da cidade de São Paulo e mostrou que somente os alunos da 2ª série do curso de Licenciatura em Física estariam capacitados para a participação na atividade, pois demonstraram conhecimento de função constante, crescente e decrescente. Outra conclusão do estudo foi a de que a sequência didática a ser proposta deveria dar ênfase significativa para o desenvolvimento do conteúdo de variação como pré-requisito para a aprendizagem de taxa de variação.

Esta pesquisa beneficia-se das contribuições teórico-metodológicas da psicologia socioconstrutivista no entendimento dos processos de ensino e de aprendizagem; da Teoria das Situações Didáticas, no entendimento dos processos didáticos que se estabelecem nos contextos de ensino apropriados ao desenvolvimento de uma sequência didática; e, de modo substancial, da abordagem metodológica da Engenharia Didática.

A psicologia socioconstrutivista privilegia o entendimento da aprendizagem como um processo essencialmente resultante da interação social entre o indivíduo que aprende e o contexto onde a aprendizagem ocorre. Nesse sentido, a relação do homem com o mundo é uma relação mediada. A mediação pode ser feita por meio de instrumentos e de signos. Quando, por exemplo, utilizamos uma faca para cortar um bolo, esta faca representa um instrumento mediador. A mediação é feita também por meio de signos. É o caso, por exemplo, do banheiro feminino e masculino: nas portas de sanitários são utilizados adesivo de cartola para simbolizar o homem e sombrinha para simbolizar a mulher. Os instrumentos e os signos responsáveis pela mediação simbólica funcionam como estímulos artificiais e, portanto, externos, com os quais o ser humano controla e regula sua conduta e constrói aprendizagens.

Nos processos de interação característicos da aprendizagem humana, é essencial a mediação entre o que aprende e o que ensina. Os instrumentos ou tecnologias de aprendizagem constituem-se em elementos que realizam a mediação entre os sujeitos do processo de ensino e aprendizagem e os conhecimentos a serem aprendidos. Sendo assim, os materiais didáticos, como a sequência didática, realizam a função de interação entre esses sujeitos.

Uma Sequência Didática é uma forma de apresentação do conteúdo e estrutura-se em torno de um conjunto de atividades devidamente esquematizadas para ministrar o conteúdo sem que tenha um produto final. É muito difícil mensurar uma sequência didática, pois sua estrutura e dimensão devem estar de acordo com o que planejamos ou ainda de acordo com as necessidades dos alunos.

A Teoria das Situações Didáticas constitui-se em um modelo teórico que discute as formas de apresentação do conteúdo matemático para o aluno e foi desenvolvido na França por Guy Brousseau. Brousseau (1986, 2008) criou a Teoria das Situações Didáticas e propõe um tratamento científico do trabalho didático, tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios. Segundo Artigue (1988), a Teoria das Situações Didáticas serve de base à metodologia da Engenharia Didática que tem a pretensão de construir uma teoria de controle entre sentido e situações. A Engenharia Didática é uma metodologia que tem por finalidade analisar as situações didáticas objeto de estudo da Didática da Matemática.

A finalidade última deste estudo é estruturar, aplicar e analisar uma sequência didática de taxa de variação média a alunos da 1ª série de Licenciatura em Matemática. Parte-se do princípio de que uma sequência didática é um instrumento de mediação no processo de ensino e aprendizagem e estrutura-se de acordo com as fases propostas pela Engenharia Didática, realizando-se em um contexto específico de interação em determinada Situação Didática.

Acredita-se que o conteúdo já dominado pelos alunos, entendido como base para a aprendizagem, pode ser significativamente ampliado com o planejamento de atividades sequenciais e progressivas no caminho do entendimento de taxa de variação média. Com esse conjunto de ações, os alunos poderão construir conhecimentos sobre taxa de variação média com o uso de tabelas, gráficos e funções polinomiais.

Entretanto, deve-se considerar que para se alcançar esse objetivo, foram necessárias várias etapas de pesquisa, já previstas e recomendadas pela Engenharia Didática, mais especificamente as que caracterizam as análises preliminares e que se encontram descritas nos capítulos e tópicos posteriores, como estudo do perfil socioeconômico e cultural dos sujeitos e Teste Diagnóstico de funções aplicado a alunos de 1º, 2º e 3º anos do curso de Licenciatura em Matemática da instituição pesquisada.

2 - DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR

O Cálculo diferencial Integral é uma disciplina tradicional no currículo da maioria dos cursos superiores como Engenharia, Matemática, Física, Química, Computação, Arquitetura, Administração, Ciências Econômicas e Licenciatura em Matemática. Barufi (1999) destaca que os cursos introdutórios de Cálculo são estudados como disciplinas do primeiro ano nos cursos de exatas, humanas e biológica, com maior ou menor profundidade, dependendo da área de concentração, sendo uma ferramenta útil presente em todas as áreas do conhecimento.

Para Barufi (1999), o conhecimento matemático constitui numa das áreas mais aptas a exercer um papel principal e interdisciplinar, compatível talvez somente com a língua materna; por isso o conhecimento matemático precisa ser compreendido e aprendido, o que torna fundamental conhecer a linguagem matemática. No entanto, na atualidade, é possível constatar que temos alunos que passam pelo curso de cálculo sem entender o significado de alguns conceitos básicos, conforme já expôs Baldino (1995).

Dall'anese (2000) faz uma retrospectiva histórica em relação ao ensino do Cálculo, mais especificamente, em relação à derivada. Recuperando a ideia de que tradicionalmente foi atribuído a Isaac Newton e a Leibniz a invenção do Cálculo Diferencial e Integral, afirma que é preciso fazer referência ao francês Augustin Louis Cauchy (1789-1848), por ter sido o que definiu derivada em termos de limite e variação. Nesse sentido, Cauchy trouxe a possibilidade de dar ao Cálculo Diferencial as características que apresenta atualmente, permitindo tratar a derivada com base na ideia de que se uma função $y = f(x)$ for contínua entre dois limites dados da variável x, então, para qualquer valor de x dentro dos limites, um aumento infinitamente pequeno da variável produzirá um aumento infinitamente pequeno da própria função.

Ainda dentro dessa retrospectiva, Dall'anese (2000, p.24) destaca Jean Le Round d'Alembert (1717-1783), para quem "o limite de uma quantidade, de uma segunda quantidade (variável) se a segunda pode se aproximar da primeira de mais perto que por qualquer quantidade dada (sem coincidir com ela)". Porém, Cauchy, posteriormente, deu maior precisão ao conceito de limite, ao afirmar que "quando valores atribuídos sucessivamente a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo finalmente a diferir deste de tão pouco quanto se queria, este último chama-se o limite de todos os outros."

Dentro dos estudos em Educação Matemática, na perspectiva do ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, o estudo da derivada tem sido escolhido para resolver problemas sobre fenômenos que contêm taxa de variação média. Pode-se encontrar esse conceito dentro da Administração, da Economia, da Física e da Química. Na Física, é possível verificar o conceito de derivada na determinação da velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma trajetória: conhecendo a função horária das posições, é possível determinar a velocidade por meio da medida da taxa de variação do espaço percorrido em relação à variação do tempo e, conhecendo a função horária das velocidades, é possível determinar a aceleração por meio da taxa de variação da velocidade em relação à variação do tempo. As aplicações de derivada são diversas e, em muitos casos, a medida de variação aparece de forma explícita.

A discussão sobre as dificuldades dos alunos para a aprendizagem do Cálculo vem sendo substancialmente estudada nas últimas décadas. Com o objetivo de sintetizar pontos fundamentais dessa discussão, apresentam-se na sequência os estudos que relacionam as dificuldades dos alunos com a falta de domínio de conteúdos do ensino básico, com os desafios enfrentados pelos ingressantes do ensino superior, com as características das práticas pedagógicas e com as características do livro didático. Todos esses pontos completam-se no entendimento da questão e não podem ser vistos de modo dissociado. Mais adiante, expõem-se essas problemáticas e algumas propostas de superação apresentadas por estudos da área.

Em seu trabalho, Barufi (1999) aponta a situação problemática da ocorrência de elevados índices de reprovação na disciplina de Cálculo do Instituto Militar de Engenharia - IME/USP nos anos de 1990 a 1995. Em sua investigação, procurou examinar, no curso de Cálculo, o conhecimento matemático trabalhado na sala de aula, já que no curso secundário, os alunos não trabalham com nenhuma noção de Cálculo e que, portanto, para a maioria dos alunos que chegam para o curso dessa disciplina, não houve o desenvolvimento do conhecimento matemático relativo ao Cálculo no ensino básico.

Diversos estudos vêm se dedicando a entender a problemática da falta de base dos alunos ingressantes no ensino superior. Trabalhos da década de 1990 já traziam elementos significativos para o entendimento dessas dificuldades. Baldino & Cabral (1997) mostraram que grande parte dos erros de cálculo de uma integral indefinida é consequência de dificuldades que os alunos apresentam nas manipulações algébricas elementares, cujo domínio deveria ter sido conseguido no ensino fundamental em um sentido mais amplo.

Gomes, Lopes e Nieto (2005) apontam que o problema inicia-se nos ensino fundamental e médio; Doening, Nácul e Doening (2004) chamam a atenção sobre o desnível entre o conhecimento que o aluno traz e o que necessita para um bom desempenho no Cálculo. Araújo e Moreira (2005) apontam como dificuldades de alunos ingressantes: falta de habilidade em interpretar a linguagem matemática, abstrair, generalizar e explorar problemas. Essas dificuldades, segundo os autores, estão mais ligadas ao significado dos conceitos do que ao domínio da técnica.

Vários trabalhos buscam o entendimento das dificuldades de aprendizagem no Cálculo por parte dos alunos ingressantes no ensino superior. Cassol (1997) examinou os significados de derivada produzidos por aluno da disciplina Cálculo I no processo de aprendizagem. Usando o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), o autor constatou cinco significados para a derivação: derivada como limite, derivada como declividade de reta tangente, derivada como aplicação de uma fórmula, derivada como velocidade e derivada como taxa de variação. As dificuldades dos alunos encontradas e apontadas por Cassol são decorrentes da falta de conhecimento necessário sobre Funções; da dificuldade de compreensão conceitual de limite e da dificuldade de articulação entre os registros de derivada.

Cassol (1997) observou, por meio de três grupos de alunos, que o resultado mais frequente é a derivada como resultado de uma operação. Nesse caso, as sequências de operações para obter a derivada não parecem indicá-la como uma variação. Para ele, o resultado mais abrangente para derivada é como taxa de variação instantânea.

Villarreal (1999), em estudo realizado com estudantes universitários de Cálculo, verificou que eles foram eficientes em tarefas algorítmicas, porém foram apresentadas complicações quando representações gráficas estavam contidas no gráfico de taxa de variação. Ainda constatou que os alunos têm o costume de decorar regras de derivação e a derivada parece ter pouca significação para eles, por exemplo, ao derivar a função das posições, encontra-se a função das velocidades e derivando a função das velocidades é encontrada a aceleração; esse processo não permite perceber a variação ocorrida. Conclui-se que, para esses estudantes, a derivada é inicialmente um processo mecânico, algorítmico de cálculo ou resultado de uma operação.

Martin-Gonzalez e Camacho (2002) apud Mometti (2007), realizaram estudo com um grupo de estudantes do 1º ano de Matemática de uma universidade, por meio de um questionário, cujo intuito era determinar as dificuldades ligadas ao desenvolvimento de tarefas não rotineiras do Cálculo. Buscou elementos para entender a reação do estudante quando tem diante de si tarefas de tipo não algorítmico; de raciocínio e de questões não rotineiras; de sistemas de representação mais confortável; de articulação de diferentes sistemas de representação relacionados às integrais impróprias; de relacionamento entre o conhecimento novo e o precedente. Os resultados levaram o autor a afirmar que há dificuldades em articular os sistemas de diferentes representações e dificuldades em conectar e relacionar esse conhecimento com conceitos precedentes.

Já Resende (2003), procurando compreender do ponto de vista epistemológico os problemas de ensino e aprendizagem do Cálculo, afirma que as dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo circunscrevem-se à supressão das ideias básicas e aos problemas construtores do Cálculo.

Cury (2003), em estudos com alunos dos cursos de Engenharia e Química, aponta como dificuldades para o cálculo: conteúdos como gráfico de funções, cálculo de limites, derivadas e integrais.

Godoy (2004) diagnosticou e analisou as dificuldades com a noção de derivada apresentadas por estudantes que haviam passado por um curso de Cálculo Diferencial e Integral. Usou, para as análises, a teoria dos Registros da Representação Semiótica de Raymond Duval. Após a aplicação de testes, concluiu que a maior dificuldade dos sujeitos estava relacionada ao uso de gráficos (registro figural), tanto em tarefas em que o gráfico era o ponto de partida para resolução, quanto em tarefas em que o gráfico era o ponto de chegada. A conversão de registro mais utilizada envolveu o registro em língua natural. O estudo constatou também a dificuldade do aluno em trabalhar com a representação simbólica (registro de representação simbólica) f' (x), especificamente com o significado da derivada como coeficiente angular. Ao discutir os resultados, Godoy retoma o pensamento de Raymond Duval: "o que bloqueia a aprendizagem dos alunos, em qualquer atividade matemática, é a incapacidade de o aluno converter a representação de um objeto em outra representação do mesmo objeto matemático." (GODOY, 2004 p. 4)

Meyer (2003) teve como objetivo investigar elementos da imagem conceitual e definição conceitual em relação ao conceito de derivada com base na interpretação geométrica. O estudo evidenciou o fato de que a literatura aponta que os alunos têm mais dificuldades em tarefas com os aspectos operatórios do cálculo do que em tarefas sobre os aspectos conceituais do cálculo. Para o autor, essa diferença é decorrente de diferentes tipos de conhecimentos matemáticos e chama a atenção para dois deles: um voltado para compreensão de conceitos, outro, para procedimentos de resolução de tarefas. É sobre esses dois aspectos entendidos como dificuldade dos alunos que Meyer apoia a sequência de seus estudos. Ao pesquisar alunos que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II, Meyer parte da suposição de que, para esses estudantes, existe uma ampla gama de representações visuais, imagens mentais, impressões e experiências relativas ao conceito de derivada e que todo esse material constitui a imagem conceitual a ser investigada. O estudo mostra que os alunos apresentam dificuldade em relação aos registros de representação do conceito da derivada, pois o sujeito da pesquisa confunde equação da reta tangente na determinação de f'(x) com a inclinação dessa reta tangente.

Alguns estudos da área, além de destacar os pontos mais relevantes das dificuldades dos alunos na aprendizagem de cálculo, apresentam alguma forma de superação delas.

Para Gomes, Lopes e Nieto (2005, pág. 7), "é certo que uma reforma deveria ser iniciada nos ensinos fundamental e médio, no entanto esse aluno está chegando ao superior e nós, professores universitários, não podemos enviá-los de volta."

Doening, Nácul e Doening (2004) apontam que a possibilidade de superar o desnível entre o que o aluno traz do Ensino Médio e o conhecimento necessário para um bom desempenho do cálculo pode ser alcançada por meio de um programa específico, que no caso de alunos do Rio Grande do Sul, configurou-se na proposta do programa Pré-cálculo. No mesmo sentido, Barbosa, Concordido e Carvalhaes (2004) apontam também a implementação de uma disciplina de pré-cálculo na UERJ.

Araújo e Moreira (2005), considerando que as dificuldades dos alunos estão mais ligadas ao significado dos conceitos do que ao domínio da técnica, sugerem a atividade extraclasse, por meio de monitoria, como um auxílio significativo.

Cassol (1997), no exame de significados de derivada produzidos por aluno da disciplina Cálculo, encontrou resultados que mostraram que os alunos compreendem melhor o conceito de derivada como taxa de variação.

Expõem-se a seguir alguns pontos básicos de estudos que abordam as dificuldades de aprendizagem do cálculo decorrentes da problemática do ensino

Para Barufi (1999), a problemática das dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem do Cálculo vem sendo estudada na área da Educação Matemática em duas perspectivas: sobre as questões específicas dos livros didáticos e sobre as questões mais específicas da prática de ensino.

Em relação às práticas de ensino, é preciso considerar que a interação entre o professor e o aluno depende de regras e convenções, as quais se revelam quando se dá a transgressão dessas regras, como se fossem cláusulas de um contrato. Segundo Brousseau (1986), o contrato didático é o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e vice-versa.

Silva (1999) menciona que a prática pedagógica mais comum no ensino da Matemática da parte do professor são aulas expositivas e elaboração de exercícios (problemas com dados suficientes para a resolução) para serem transmitidos para os alunos. O aluno tende a compreender bem ou mal a aula, mas no caso de insucesso na resolução dos exercícios, o professor deve auxiliar por meio de reforços e de questões elementares. Para ela, pode haver situações, nas quais o professor refugia-se na segurança dos algoritmos prontos. Nesse caso, é apresentada uma definição, exemplos e exercícios com base nos exemplos dados, assim os alunos memorizam regras e as reproduzem. Ao identificar sua pertinência, mostra-se o reconhecimento "das palavras-chave" contidas nos enunciados das questões. Segundo Silva (1999), essa prática docente pode gerar dificuldade para o aluno.

Silva e Igliori (1996) consideram que a prática usual no ensino do Cálculo pouco sai da apresentação de definições, propriedades, técnicas e algumas poucas aplicações, essa prática gera dificuldades de aprendizagem dos alunos e não facilita a criação de possibilidades para contornar obstáculos enfrentados pelos alunos.

Mometti (2007), ao fazer uma síntese dos pontos fundamentais relativos às dificuldades dos alunos no Cálculo apontadas nos estudos sobre a temática e que poderiam facilitar o entendimento dos altos índices de reprovação na disciplina, destaca a convergência de fatores geradores de tais dificuldades: ênfase nos procedimentos e técnicas; falta de conexão entre as diferentes representações (algébrica, geométrica, numérica); falta de conhecimentos prévios (pré-requisitos) por parte do aluno; dificuldades com o rigor dos conceitos do Cálculo.

Os estudos da área trazem propostas de superação em relação às práticas de ensino. Apresentam-se a seguir pontos significativos dessas propostas.

Barufi (1999) destaca dois traços típicos de pessoas que trabalham com Matemática: o matemático profissional que tem como objetivo a construção do conhecimento matemático e não precisa ser um competente professor de Matemática, e o professor de Matemática que está preocupado com a construção de conhecimento pelos seus alunos e não é fundamentalmente um matemático profissional. O conhecimento construído pelo matemático profissional decorre de circunstâncias com as quais ele trabalha, e por isso tem sua marca pessoal e para ser convalidado pela comunidade científica, precisa ser despersonalizado, perdendo assim as características do autor. Já o professor de Matemática realiza um trabalho contrário ao do matemático profissional, ou seja, ele tem de "recontextualizar e repersonalizar o conhecimento que seus alunos necessitam articular."

Barufi (1999) afirma que o trabalho do professor de Matemática está num degrau diferente daquele que a concepção cartesiana do conhecimento recomenda, ou seja, o professor de Matemática é um pesquisador que realiza um trabalho que está inserido num processo de investigação-reflexão-ação. Esse processo está dividido em: o questionamento que o professor de Matemática formula a respeito do conhecimento matemático que espera que seus alunos construam e a busca de situações-problemas atraentes e apropriadas para seus alunos, já que a história fornece o exemplo de construção do conhecimento a partir dos desafios enfrentados. A autora afirma que o professor não pode prescindir de uma boa visão histórica para compreender o contexto no qual o conhecimento almejado foi construído.

Se o professor pretende que o aluno construa os significados para depois compreender o conhecimento desejado, é necessário um processo de problematização, pois o professor arrisca transmitir seu próprio conhecimento, acabado e estruturado, o que poderá levar o aluno a não articular se não tiver nenhum significado para ele. (BARUFI, 1999)

Barufi (1999) ainda retoma algumas críticas feitas pelo Prof. Roberto Baldino em relação ao processo de ensino do Cálculo, como a insistente contestação em relação à manutenção do conceito de limite, num primeiro curso de Cálculo, como fundamento do Cálculo e em relação à prática de apontar como alternativa didática o Cálculo Infinitesimal (BALDINO, 1995); aponta também a crítica de Baldino (1997) em relação à circularidade na definição de irracionais como números que não são racionais e os reais como resultantes da união dos racionais com os irracionais; destaca ainda a crítica que faz o autor ao excesso de rigor na apresentação de tópicos como limites, derivadas e integrais sem a devida preocupação em relação as suas aplicações. (BALDINO & CABRAL, 1997)

Barufi (1999) enfatiza a importância de trabalhos que valorizam o conhecimento significativo na sala de aula e o estabelecimento de uma situação de poder compartilhado e sobretudo a existência do diálogo, como o de Baldino (1995). Nesse sentido, a autora valoriza também a ideia já apontada por Polya (1978) sobre a valorização do trabalho independente do aluno ou a habilitação prática que é obtida da observação e da imitação na resolução de problemas, sem que, no entanto, o aluno fique sem a ajuda necessária para que possa experimentar o progresso na aprendizagem.

Barufi (1999), refletindo sobre as práticas de ensino dos conteúdos do Cálculo, chama a atenção para a necessidade de investigar de que maneira é feita a negociação de significados nos cursos de Cálculo I, com o objetivo de criar as condições para a construção do conhecimento desejável por parte dos alunos. Nessa perspectiva, aponta algumas questões como o modo de relacionar o conhecimento matemático trazido da escola básica e a abordagem do Cálculo; a apresentação do caráter heurístico que construiu historicamente diversas formulações que permitiram chegar à atual, superando a ideia da apresentação do Cálculo como conteúdo pronto; o respeito e a explicitação do caráter interdisciplinar do

Cálculo nos diversos cursos superiores; a adequação dos conteúdos ao que ocorre em sala de aula.

Kendal (2001) apud Godoy (2004, p. 16) considera que a superação das dificuldades pelos alunos está relacionada ao uso, pelo professores, das múltiplas representações do conceito de derivada. Cada professor deve fazer uso dessa prática de acordo com a própria experiência e conhecimento; destaca a importância do diagnóstico de alunos da Licenciatura em Matemática no sentido de entender como eles conseguem articular os diversos registros semânticos no processo da aprendizagem da derivada.

Partindo do trabalho de pesquisa interventiva com alunos iniciantes de curso superior de exatas, D' Avoglio (2002) buscou investigar a implicação da introdução do conceito da derivada de uma função num ponto com base em conceitos mais próximos ao cotidiano de estudantes no processo de aprendizagem dessa noção. O autor elaborou uma sequência didática, utilizando-se do conceito de velocidade instantânea retirada da cinemática. A conclusão do autor foi a de que tal procedimento interventivo baseado no uso de conceito da cinemática trouxe vantagens na maneira de introduzir derivada no que se refere à capacidade de dar significado e compreendê-la.

Leme (2003) aponta que as dificuldades dos alunos podem ser superadas por meio de atividades, discussões ou de exercícios que possam levar o estudante a atingir o nível de reificação e a entender a ênfase dada pelos livros didáticos para as representações simbólicas do conceito de derivada.

A superação das dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo pode ser também alcançada pelo uso de tecnologias, conforme aponta Barufi (1999), ao afirmar que a utilização do computador é importante, pois é um instrumento facilitador, que abre novos horizontes, possibilitando o estabelecimento de múltiplas relações e a negociação de significados. Também Mometti (2007) foca seu estudo sobre as vantagens advindas das tecnologias da informação como a ênfase no ensino centrado na modelagem e exploração de conceitos; e na possibilidade de que as tarefas técnicas rotineiras sejam deixadas para as máquinas.

Barufi (1999) aponta a necessidade de estudos sobre a problemática das dificuldades dos alunos de ensino superior na aprendizagem do cálculo que focalizem a análise de livros didáticos. Apresentam-se, a seguir, alguns estudos e algumas perspectivas de superação dessas dificuldades. Cabe ressaltar, no entanto, que o objetivo não foi o de esgotar as informações e contribuições que estes estudos trazem, mas de delinear algumas preocupações relevantes que a área de Educação Matemática vem expressando, principalmente nas duas últimas décadas. Nesse sentido, este estudo dá destaque para três pesquisas, especificamente, cujos autores são: Barufi (1999), Dall'Anese (2000) e Godoy (2004) e aponta alguns outros trabalhos voltados para a questão.

Barufi (1999) escolheu um conjunto de livros didáticos, num total de 24, para buscar respostas na sua investigação. A autora entende que o livro adotado pelo professor para desenvolver seu trabalho indica o tratamento que será dado ao curso, pois revela crenças, preocupações e escolhas metodológicas do professor. A ideia de Barufi não era a de estabelecer um rol de melhor ou pior livro didático, mas compreender os problemas que envolvem o ensino do Cálculo nos cursos básicos das Universidades. Dall'Anese (2000) examinou oito livros didáticos considerados teóricos ou técnicos, sendo que os primeiros são especializados em conceitos matemáticos, enquanto os outros, em aplicações do conceito de derivada. Godoy (2004) selecionou 4 livros didáticos seguindo o critério dos mais adotados pelos docentes de uma Universidade, entrevistados por ele. A síntese desses trabalhos de investigação apresentada na sequência traz a discussão sobre resultados para alguns livros didáticos que apareceram nos três estudos ou em pelo menos dois deles. (FLEMING E GONÇALVES, 2006; GUIDORIZZI, 2001; LEITHOLD, 1994 E SWOKOWSKY, 1983)

Convém destacar que esses livros didáticos continuam sendo editados e adotados nos cursos de cálculo no ensino superior.

Barufi (1999, p. 58), no seu trabalho de investigação em livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral que são tomados como modelos da abordagem do conteúdo, realizada na sala de aula, busca respostas para as seguintes questões: Como é feita a "ponte" entre o conhecimento matemático desenvolvido na escola básica e aquele abordado no curso de Cálculo? Os conteúdos relativos são apresentados como algo pronto ou se dá relevância para seu caráter heurístico que possibilitou diversas formulações para finalmente se chegar aos atuais? É explicitado o caráter interdisciplinar do Cálculo? O conteúdo sofre processo de adequação em função do que ocorre na sala de aula? Os significados são negociados com o objetivo de possibilitar a construção do conhecimento desejável por parte dos alunos?

Para a autora, a escolha do livro pelo professor é importante e significativa, pois revela suas preocupações, crenças e suas alternativas metodológicas. Além disso, o livro didático é um garantia, pois contribui para que o professor não se desvie do caminho a ser percorrido, ou seja, é um referencial.

Ao examinar os livros selecionados, Barufi (1999) observa distintas abordagens dos diferentes autores e classifica os livros em dois modelos principais:

a) Constitui na exposição do Cálculo sistematizado, formal e organizado como consequência do trabalho de pensadores, filósofos e matemáticos, de muitos séculos Trata-se de uma sequência temática que é: Números Reais, Funções, Limites, Derivadas e Integrais, cujo dispositivo metodológico corresponde à ideia de fornecer uma manifestação do Cálculo.
b) Apresenta o Cálculo em construção. É diferente do primeiro modelo, pois sua sequência didática não obedece a uma estruturação lógica, mas sim ao desenvolvimento do Cálculo. É um processo de construção do conhecimento.

Na análise dos livros, Barufi (1999) utiliza critérios que têm como base pontos da teoria de Guy Brousseau. Dentro dessa perspectiva, considera, em relação aos conteúdos apresentados nos livros: a problematização; a linguagem; a visualização; a argumentação e a formalização/generalização.

Em relação ao livro Um curso de Cálculo – volume I de Guidorizzi (1985), Barufi afirma que a proposta do autor é fazer uma revelação do cálculo sistematizado que busca colocar as ideias de um ponto de vista do próprio autor. Os problemas são destinados a esclarecer a revelação dos resultados e não para desenvolver as ideias sobre o tema. Os exemplos buscam a motivação para a inserção de conceitos, para depois desenvolver um conjunto lógico de resultados devidamente articulados. Ainda, segundo a autora, Guidorizzi não emprega uma linguagem que objetiva convencer da sensatez dos argumentos na visão do aluno, pois utiliza de soluções advindas da lógica do conhecimento sistematizado.

Em relação ao livro de Guidorizzi (1985), Dall'Anese (2000) afirma que o autor cita o problema de definir reta tangente ao gráfico de uma função no ponto em que ficará determinada se for conhecida sua declividade e que utiliza os conceitos de limites para definir derivada.

Godoy (2004) afirma que Guidorizzi faz uma interpretação geométrica da reta tangente ao gráfico num ponto e relaciona o coeficiente angular para definir derivada, mas para quem está lendo, não é possível associar aos registros simbólicos o "nome" derivada. Ainda para Godoy, o livro não explicita, no registro de língua natural, função derivada, além disso, os exercícios têm como apontamento de partida o registro simbólico de derivada. Afirma que Guidorizzi enfatiza a representação simbólica de derivada, deixando em segundo plano a representação em língua natural.

Barufi (1999) analisa o livro "O Cálculo com Geometria Analítica" de Louis Leithold (LEITHOLD, 1994) e pontua que o autor buscou praticar uma linguagem acessível, por meio de um texto detalhado que apresenta uma sequência do cálculo sistematizado, bem estruturado sem, porém, respeitar a origem das ideias fundamentais. Barufi destaca que há riqueza de detalhes, com vários exemplos, com resolução pormenorizada, no entanto, faz a crítica afirmando que o texto busca persuadir o leitor a aceitar os cálculos realizados, por meio de comentários que fundamentam as conexões.

Dall'Ánese (2000), ao analisar o livro de Leithold (1994), cita o capítulo destinado ao estudo que define a declividade de reta tangente e velocidade instantânea por meio do limite e que depois insere o estudo da derivada de uma função em um ponto de seu domínio através do limite (quando este existir). Dall'Anese ainda destaca que, no capítulo seguinte, o autor explora e define taxa de variação, explicitando a noção de variação, com modelos de aplicação tanto para áreas de exatas como humanas.

Godoy (2004) aponta que Leithold (1994) faz, no início do conteúdo, uma sinopse sobre derivada, seus estudos e aplicações e afirma que o procedimento de expor já na apresentação do conteúdo os significados do conceito de derivada pode ser interessante. O autor do livro didático também começa o estudo da derivada pela interpretação geométrica e pelo conceito de reta tangente. Para ele, a derivada de uma função é calculada através do limite (também quando existir).

"Se x_1 for um determinado número no domínio de f, então f' $(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ se este limite existir".

Leithold já expõe, na introdução do capítulo específico de derivada, aspectos gerais, estudos e aplicações de derivada. Não aborda diferencial e nem limites do livro. Depois, Leithold (1994) mostra o significado da derivada como inclinação da reta tangente e coloca um exercício resolvido que determina a derivada. Também apresenta outras representações simbólicas para derivada, contando a história dessas representações e seus respectivos autores.

Godoy (2004) considera que nos exercícios propostos por Leithold, é possível detectar situações em que os registros de partida estão na língua natural, como nas assim expressas: *Determine a derivada da função (....); Ache a inclinação da reta tangente (...)*; *Encontre a equação da reta tangente (...).* Encontram-se também situações em que os registros de partida estão no registro simbólico: *Ache* f' (x) (....); Ache $\frac{d_y}{d_x}$ (....); *Encontre para as funções dadas* (....)f' $(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Godoy (2004) destaca que, no livro “Cálculo A: funções, limite, derivada e integral” de Fleming e Gonçalves (1992), na introdução do significado de taxa de variação, a autora utiliza o conceito físico do movimento retilíneo e mostra uma função do espaço em relação ao tempo e também a ideia de velocidade média, para depois definir a velocidade instantânea como a derivada do espaço em função do tempo. O autor do livro mostra uma ilustração geométrica da definição de taxa de variação, através de um gráfico, para depois apresentar exemplos de aplicação de taxa de variação em dois ramos da ciência.

Já em relação ao livro didático “O Cálculo com Geometria Analítica” de Earl Willian Swokowski (SWOKOWSKI, 1983), Barufi (1999) ressalta que no início da obra, é colocado um rol de fórmulas relativas às derivadas, integrais e conteúdos relativos ao ensino médio e conclui que o autor do livro didático deseja que os alunos encontrem aquilo que parece ser fundamental para o curso de cálculo.

Segundo Barufi (1999), o autor do livro retoma diversos tópicos fundamentais como (Revisão Pré-Cálculo) para depois inserir o conceito de limite, o que é criticado por Barufi pelo enfoque voltado para a utilização da intuição.

Sobre o capítulo específico de derivada, Barufi observa que Swokowski apresenta três exemplos que são resolvidos minuciosamente. São eles: reta tangente ao gráfico de uma função num ponto; velocidade instantânea; taxa instantânea de variação. Barufi conclui que com esses exemplos, o autor chega à expressão usual para depois colocá-la como sendo aquela que define derivada de uma função no ponto.

Godoy (2004) analisou o livro de Swokowski (1983) com o propósito de verificar como serão apresentados aos alunos os apontamentos do conceito de derivada. Na análise do capítulo 3 do livro didático, Godoy expõe os dois exemplos de aplicação de derivada, apresentados pelo autor: determinação do coeficiente angular da reta tangente num ponto do gráfico da função e definição da velocidade de um objeto em movimento retilíneo.

Godoy (2004) afirma que esse livro, assim como os outros analisados por ele, inicia o estudo da derivada, utilizando o conceito de reta tangente com a intenção de definir o coeficiente angular da reta num ponto (através da interpretação geométrica). Ele também afirma que o autor primeiro define velocidade média, velocidade instantânea, para depois introduzir o conceito de taxa de variação média e taxa de variação instantânea.

Swokowski (1983), em seu livro didático, considera que existem dois problemas de aplicação de derivada: 1 - determinar o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função. 2 - definir a velocidade de um objeto em movimento retilíneo.

Convém ainda dar espaço para o trabalho de Leme (2003) que, com base no pressuposto teórico de Anna Sfard, analisou livros didáticos, na pretensão de apontar as causas possíveis das dificuldades que os alunos apresentam na compreensão conceitual da noção da derivada. As dificuldades apontadas por Leme são: aquelas inerentes ao desenvolvimento do pensamento científico, falta de atividades, discussões ou de exercícios que possam levar o estudante a atingir o nível de reificação e a ênfase dada pelos livros didáticos para as representações simbólicas do conceito de derivada.

Dentro da perspectiva da superação das dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo, destacam-se alguns estudos que apontam as possibilidades que o trabalho com os livros didáticos pode trazer aos professores.

Barufi (1999), após analisar livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, assinala que os livros didáticos são "bons" e constituem um significativo recurso de trabalho.

Silva (2004) analisa dois livros didáticos (GUIDORIZZI, 2001 e STEWART, 2002) que apresentam conteúdo de Cálculo Integral, como conceitos de: antiderivada ou primitiva, definição de Integral, técnicas de integração e trazem várias aplicações. Utilizando na análise a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, avalia que se os livros forem bem explorados, haverá uma melhor compreensão do aluno por meio do uso das conversões, com a visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora.

A breve síntese apresentada neste tópico do presente trabalho permite constatar que as dificuldades na aprendizagem do cálculo apresentadas pelos alunos do ensino superior, principalmente pelos ingressantes, devem ser analisadas e discutidas sob uma complexidade de fatores que as determinam. Sem dúvida, resultados mais satisfatórios na aprendizagem de Matemática no ensino básico são fundamentais e remetem à urgente necessidade de melhoria da educação no país.

3 – REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

3.1 - A abordagem socioconstrutivista no entendimento do processo de ensino e aprendizagem.

Lev Vigotsky abordou o desenvolvimento cognitivo como um processo de orientação. Em vez de olhar para o final do processo de desenvolvimento, ele se debruçou sobre o processo em si e analisou a participação do sujeito nas atividades sociais. Vigotsky (1984) propôs que o desenvolvimento não precede a socialização. Ao contrário, as estruturas sociais e as relações sociais levam ao desenvolvimento das funções mentais. Afirma que não se pode estudar o comportamento humano no indivíduo isolado, mas no processo de interações entre indivíduos. O processo de interação social, para ele, é responsável por mudanças significativas no comportamento, pois viabiliza ao indivíduo a aquisição de recursos e a utilização de instrumentos desenvolvidos pela sociedade ao longo de sua história.

Para Vigotsky, o domínio da linguagem escrita representa um ponto crítico no desenvolvimento cognitivo, por se tratar de signos que instauram novas possibilidades de atividade cognitiva.

A principal contribuição de Vigotsky para o campo de estudos interculturais é a demonstração de como a cultura promove a transformação do comportamento humano.

Com relação ao estudo objetivo da consciência, Vigotsky tem como ideia a adoção de um método genético ou evolutivo como um eixo básico para o estudo das questões psicológicas. Segundo sua proposta, o estudo da gênese e do desenvolvimento dos fenômenos psicológicos pertence ao âmbito da ontogênese, da microgênese, da filogênese e da evolução sociocultural.

A cultura define por onde se pode desenvolver e dá limites e possibilidades de desenvolvimento. A microgênese mostra a singularidade de cada pessoa. Um sujeito nunca irá ser igual ao outro, com histórias iguais, pois cada um possui experiências diferentes, são fatos na vida de cada ser humano que definirão a singularidade a cada momento na vida do sujeito.

Para Vigotsky, no desenvolvimento dos processos psicológicos superiores, há uma passagem da regulação intermental para a intramental. No plano intermental, precisa-se da ajuda de outros para resolver os problemas e no intramental há um controle autônomo, uma independência do sujeito para resolver os problemas. Entre esses dois planos, apresenta-se o que Vigotsky denominou de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), como uma região dinâmica que corresponde à distância, ou ao espaço, entre o nível de resolução de uma tarefa que uma pessoa pode alcançar, atuando independentemente e o nível que pode alcançar com a ajuda de um companheiro mais competente ou experiente na tarefa. (VIGOTSKY, 1979) A ZDP - conceito proposto por Vigotsky – é o mais relevante para a área da educação. É o espaço no qual uma pessoa pode trabalhar e resolver um problema ou realizar uma tarefa de uma maneira e em um nível que não seria capaz de ter individualmente.

3.1.1 O Ensino de Matemática *c*omo ajuda e ajuste da ajuda

Trabalho desenvolvido por Onrubia (1998) mostra as possibilidades do professor na criação e intervenção na ZDP. O autor, inicialmente, retoma os conceitos fundamentais da teoria de Vigotsky, para, depois, propor critérios específicos na criação e intervenção nesse espaço de aprendizagem.

A aprendizagem deve ser um processo envolvente para o aluno que constrói, modifica, enriquece e diversifica esquemas de conhecimento já internalizados, a respeito de diferentes conteúdos a partir do significado e do sentido que pode atribuir a esses conteúdos e ao próprio fato de aprendê-los.

Cabe salientar que o uso da palavra esquema neste estudo não está restrito às condições que um determinado estágio de desenvolvimento biológico poderia proporcionar, como propõe a teoria de Jean Piaget, que estipula estágios cognitivos endógenos e uniformes. Segundo Coll (1998, p.63), um esquema de conhecimento é definido como "a representação que uma pessoa possui em um determinado momento de sua história sobre uma parcela da realidade." Essa definição permite inferir uma série de consequências para o entendimento dos conhecimentos prévios dos alunos:

Os alunos comportam uma quantidade variável de esquemas de conhecimento, ou seja, não possuem um conhecimento geral. Os esquemas variam de acordo com informações que os alunos vão recebendo e também com suas experiências diretas. Exemplo de um esquema de conhecimento: um aluno da 1ª série do ensino fundamental I tem o esquema de conhecimento sobre as árvores, com as seguintes características: são vivas; têm galhos, tronco, folhas (partes); estão juntas num parque (conceito); são mais altas que ele e são verdes (fatos); servem para fazer fogo (procedimento).

As representações que integram os esquemas são muito variadas. Muitas vezes adquiridas no meio familiar ou de relacionamento com colegas.

Os esquemas de conhecimento podem apresentar validades diferentes, pois nem sempre estão adequados à realidade, pois para o aluno citado acima, poderia apresentar explicações errôneas como, por exemplo, que as árvores só crescem quando são regadas.

A abordagem socioconstrutivista entende que os alunos encaram a aprendizagem de um novo conteúdo como uma série de conhecimentos já internalizados e que definem o nível de desenvolvimento real, que estão arranjados e estruturados em diversos esquemas de conhecimento. Os alunos podem apresentar grandes diferenças entre eles em relação ao número de esquemas de conhecimento que detêm.

Na perspectiva de Vigotsky, o estágio de desenvolvimento de um sujeito é dado pela sua capacidade de resolver de modo independente uma tarefa, bem como pela possibilidade de construir aprendizados com essa base e com ajuda de alguém mais competente na tarefa. Nesse sentido, a capacidade já construída de resolver um problema possibilita inferir que o sujeito internalizou esquema(s) suficiente(s) para resolução do problema proposto. Nessa perspectiva, o ensino seria uma ajuda ao processo de aprendizagem. (ONRUBIA, 1998) Sem essa ajuda, é pouco provável que o aluno tenha um aprendizado, e talvez não consiga aprender da maneira mais significativa os conhecimentos para o seu desenvolvimento pessoal e à sua capacidade de compreensão da realidade e de atuação nela, que a escola tem a responsabilidade social de transmitir. No entanto, o ensino não pode substituir a atividade mental construtiva do aluno nem ocupar seu lugar. (COLL, 1986, 1990)

A concepção socioconstrutivista coloca em primeiro plano a interação com outras pessoas como essencial no processo de ensino e aprendizagem, bem como a interação com os artefatos (tecnologias) que constituem sua cultura. A condição básica para que a ajuda educacional seja eficaz e possa realmente atuar como tal é, portanto, a de que essa ajuda se ajuste à situação e às características que, a cada momento, a atividade mental construtiva do aluno apresenta. (ONRUBIA, 1998)

São características da ajuda:

1) Os esquemas de conhecimento dos alunos, segundo a concepção proposta anteriormente, devem estar relacionados ao conteúdo de aprendizado. Devem-se tomar como ponto de partida os significados e os sentidos de que os alunos disponham em relação a esse conteúdo.

2) Provocar desafios para o questionamento dos significados e sentidos, promovendo sua modificação pelo aluno, assegurando assim que essa modificação ocorra na direção desejada (aproximando a compreensão e a atuação do aluno das intenções educativas).

A atividade a ser realizada deve constituir-se como um desafio abordável; o que dependerá do ponto de partida do aluno e daquilo que o processo de aprendizagem possa trazer. Também depende da qualidade e da quantidade de apoios e instrumentos de ajuda que ele receber.

Nessa perspectiva de Vigotsky, instrumentos e recursos didáticos de apoio utilizados pelo professor devem ajudar o aluno a ir além do que seria capaz sozinho (incrementar a capacidade de compreensão e a atuação autônoma).

Para mudar esquemas de conhecimento que permitam atuar de modo independente, o aluno necessita de ajuda de uma pessoa mais competente na tarefa, o que consolida o processo de ajuda.

Onrubia (1998), retomando o conceito de ZDP, detalha-o como a distância ou região entre o nível de resolução de uma tarefa que uma pessoa pode alcançar atuando independentemente e o nível que pode alcançar com a ajuda de uma pessoa mais competente ou experiente nessa tarefa. (VIGOTSKY, 1979) É o espaço no qual uma pessoa pode trabalhar e resolver um problema ou realizar uma tarefa de uma maneira e em um nível que não seria capaz de realizar individualmente. ZDP é o espaço onde, graças aos suportes e à ajuda dos outros, pode desencadear-se o processo de construção, modificação, enriquecimento e diversificação dos esquemas de conhecimento definidos pela aprendizagem escolar. É justamente nesse espaço que ocorre a ajuda do professor; quer diretamente, na relação face a face, quer indiretamente, por meio de ofertas de ajuda possíveis nas interações com instrumentos ou tecnologias de aprendizagem.

A ZDP não é um lugar ou um espaço fixo e estático, mas um espaço dinâmico em constante processo de mudança. Nele o professor atua apoiando e interagindo, para que os alunos possam ir modificando, nessa atividade conjunta, seus esquemas de conhecimento, seus significados e os sentidos que atribuem para o conhecimento. Esse processo cria possibilidades de atuação autônoma e de uso independente desses esquemas perante novas situações e tarefas cada vez mais complexas.

É muito importante decidir o momento em que a ajuda sólida pode ser mais ajustada em cada caso ou de analisar se a intervenção específica foi ou não ajustada.

O ajuste de um determinado processo de ajuda depende do momento em que estamos (inicial ou final da aprendizagem de um conteúdo). É menos provável que o aluno precise de ajuda do mesmo tipo e grau na primeira vez que depara com um determinado conceito.

3.2 - As Situações Didáticas no Ensino e Aprendizagem de Matemática

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Brousseau (1986), conforme explicitado anteriormente, expressa-se como um modelo teórico que discute as formas de apresentação do conteúdo matemático para o aluno. Para o autor, quando houver uma intenção do professor que possibilita ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo, haverá uma situação didática. Toda situação didática é regida por um determinado tipo de contrato didático, em outras palavras, por um conjunto de obrigações implícitas e explícitas. Para Brousseau (1986, p.8):

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos.

Brousseau acredita que a forma didática como um conteúdo é apresentado influencia fortemente o significado que o aluno constrói sobre esse conteúdo. A teoria de Brousseau apresenta-se como uma contraposição à concepção didática clássica e representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula que envolve professor, aluno e conhecimento matemático. (FREITAS, 2008) Para o autor, existirá uma situação didática sempre que se caracterizar uma intenção do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo.

O ensino de Matemática acontece, na maioria das vezes, como decorrência das relações entre o sistema educacional e o aluno, atreladas à transmissão de um determinado conhecimento. Dessa maneira, interpreta-se a relação didática como uma comunicação de informações. (BROUSSEAU, 2008) No entanto, a atividade do professor não pode restringir-se à mera comunicação de um conhecimento. Segundo Freitas (2008), cabe ao professor a devolução de um "bom problema", entendendo a devolução como transferência de responsabilidade, em que o professor instiga o aluno a aceitar o desafio de resolução do problema; ao assumir o problema como seu, o aluno dá início ao processo de aprendizagem. O trabalho desafiador do professor ocorre "para que o aluno aprenda em pouco tempo noções que demorariam muito para serem construídas." (FREITAS, 2008, p. 83)

Na progressão da aprendizagem, há interferências de algumas variáveis, entre elas há aquelas sobre as quais o professor não tem algum controle e outras que são razoavelmente controláveis pela ação didática. As variáveis de que o professor não tem controle direto são denominadas de situação adidática. Para Brousseau, a situação adidática é representada pelo esforço independente do aluno em certos momentos de aprendizagem, sem qualquer controle direto do professor. Sempre que for possível que o professor expresse uma intenção de orientação de um aluno para a aprendizagem de um determinado conteúdo, fica caracterizada uma situação didática. Assim, toda situação adidática é um tipo de situação didática.

A aprendizagem por adaptação é analisada por Brousseau. Nela o aluno depara com a necessidade de adequar a sua cognição a um determinado problema envolvido numa situação didática. Contrapondo a essa aprendizagem, a aprendizagem formal procura sobrepor a memorização, a técnica e os processos de automatismo à compreensão verdadeira das ideias matemáticas. Há uma redução do ensino ao aspecto formal da Matemática.

A natureza específica do trabalho com a resolução de problemas evidencia a caracterização de uma situação didática. Parte do trabalho de educação matemática, a apresentação do saber sempre envolverá algum tipo de problema, pois ocorrem dificuldades específicas ao trabalho didático na relação entre os problemas e o saber.

Na situação adidática, o aluno deve ser sempre estimulado a se esforçar para superar sua capacidade com seu próprio esforço. Isto é muito importante para uma evolução de aprendizagem mais autêntica.

É necessário possibilitar ao aluno o máximo de independência para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos de resolução do problema, por meio de suas elaborações e conceitos. O professor deverá encontrar um equilíbrio na quantidade de informações que devem ser passadas ao aluno. Deve também buscar finalidade didática e apresentar para seus alunos a fim de tornar possível a aquisição de conhecimentos matemáticos desejáveis.

Tipologia das situações adidáticas

Brousseau (1998) desenvolveu uma tipologia de situações didáticas analisando as principais atividades específicas da aprendizagem da matemática.

- Situação adidática de ação

O aluno não apresenta, na solução de um problema, argumentos teóricos para a explicação de sua elaboração. O professor escolhe alguns dados para que o aluno tenha condições de agir e buscar solução de um determinado problema. Há um predomínio do aspecto experimental do conhecimento.

- Situação adidática de formulação

Neste caso, o aluno já utiliza modelos ou esquemas teóricos explícitos de forma bem elaborada em sua solução de problema. O aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema. Não há intenção de julgamento sobre a validade.

- Situação adidática de validação

Nessa situação, o aluno já utiliza mecanismos de prova e o saber é utilizado com essa finalidade. O processo de validação caracteriza-se como uma atividade que tem como objetivo assegurar a validade de uma dada proposição matemática, podendo constituir na produção de uma explicação teórica.

- Situações de institucionalização

Nas situações de institucionalização, ocorre uma intervenção direta do professor, visando estabelecer o caráter do objeto e a universalidade do conhecimento, bem como a correção de possíveis equívocos (conceitos errados, demonstrações incorretas...) que possam ter ocorrido nas fases anteriores.

Segundo Freitas (2008), o foco sobre a teoria das situações didáticas deve privilegiar os procedimentos metodológicos. Nesse caso, o professor não fornece, ele mesmo, a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração da cognição. Assim o aluno pode desenvolver novos conhecimentos com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio. A metodologia de Sócrates pode ser trabalhada no campo da prática pedagógica do ensino da Matemática. Sócrates fazia uso de um método que se funda na condução de diversas questões, dirigidas a seus discípulos, de forma que eles pudessem exercitar um autêntico diálogo de aprendizagem que os conduzisse a um processo de apropriação do conhecimento.

3.3 - A Engenharia Didática como Recurso Metodológico na Pesquisa no Ensino e Aprendizagem de Matemática

A Engenharia Didática tem por finalidade analisar e propor situações didáticas no âmbito dos estudos da Didática da Matemática. A *engenharia didática,* em prática desde a década de 1980, é assim descrita por Artigue (1988, 283):

> [....] este termo foi "cunhado" para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta.

Ainda segundo Artigue (1988, p. 285), a engenharia didática deve ser entendida "como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. Nesse sentido, propõe a engenharia didática como metodologia de pesquisa.

Duady (1987) apud Machado (2008, p. 237) aponta dois tipos de objetivos de pesquisa que se beneficiam da engenharia didática: as "que visam um estudo de processos de aprendizagem de um certo conceito e aquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de um domínio preciso." Existem outras metodologias de pesquisa em didática. Por exemplo, a etnográfica que não admite a análise *a priori*, embora concorde com a engenharia didática que insere o pesquisador na investigação e difere na validação, que é externa, pois utiliza métodos comparativos para validar seus resultados.

Artigue (1988) afirma que a engenharia didática apropria-se dos conceitos da teoria das situações didáticas proposta por Brousseau (2008) na pretensão de controlar as situações didáticas do processo. Brousseau (1986) desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático, tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios. Essa teoria contrapõe-se à forma didática clássica, na qual se apresentam conteúdos sistematizados, incluindo a forma axiomática.

O professor prepara uma situação didática com o objetivo de provocar no aluno adaptações desejadas por meio de uma escolha cuidadosa de problemas, de maneira que o aluno possa aceitá-los, agir, falar, refletir, evoluir por si próprio. (FREITAS, 2008) O professor propõe um problema para que o aluno busque soluções por iniciativa própria, como participante ativo da própria aprendizagem. Nesse caso, o professor adia a emissão de conhecimentos e possíveis correções até que o aluno cheque a uma regra e valide-a. Como foi exposto anteriormente, essa é, para Brousseau (2008), uma situação *adidática* que pode apresentar-se como situação de ação, de formulação, de validação ou de institucionalização, conforme análise feita por Brousseau (1986) das principais atividades específicas da aprendizagem da Matemática. A análise *a priori* vai dizer se uma situação pode ser vivida como adidática.

A presente pesquisa beneficia-se da engenharia didática, pois objetiva o estudo de processos de aprendizagem de taxa de variação média de alunos de licenciatura em matemática.

É importante frisar que a engenharia didática não repousa sobre seus objetivos, mas em suas características de funcionamento metodológicos. Machado (2008) aponta quatro fases da metodologia: 1ª) análises preliminares; 2ª) concepção e análise *a priori* das situações didáticas; 3ª) experimentações; 4ª) análise *a posteriori* e validação.

As análises preliminares, realizadas por meio de considerações sobre o quadro teórico didático e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos, devem considerar os seguintes estudos (MACHADO, 2008): epistemológico, dos conteúdos contemplados pelo ensino; do ensino atual e de seus efeitos; das dificuldades e dos obstáculos que determinam a evolução dos alunos; dos entraves que situam a efetiva realização didática. Assim, as análises preliminares fundamentam a concepção da engenharia didática. Essa fundamentação é retomada e aprofundada durante a realização do trabalho. A análise preliminar permite formular hipóteses cognitivas e didáticas e vai fundamentar a construção da engenharia didática.

A análise diagnóstica, configurada neste estudo por meio do teste diagnóstico, insere-se como estudo das dificuldades e dos obstáculos que determinam a evolução dos alunos. As análises preliminares podem incluir análise epistemológica do conteúdo visado – para caracterizar o conceito em sua gênese histórica, seu lugar atual na diversidade dos problemas onde ele intervém como ferramenta adaptada; localizar outros conceitos que interagem com ele e contribuem para lhe dar significado; estudo do conceito na qualidade de objeto de estudo; estudo do ponto de vista geralmente adotado no ensino e também de sua evolução ao longo das mudanças de programa; levantamento de condutas dos alunos, tendo em vista o ensino habitual (erros, procedimentos, concepções).

A análise *a priori* representa o momento em que o pesquisador, tomando como orientação as análises preliminares, procede à delimitação de variáveis pertinentes ao sistema que permitirão a atuação do pesquisador. Essas variáveis são chamadas de comando (ARTIGUE, 1988) que podem ser macrodidáticas ou globais, concernentes à organização global da engenharia; microdidáticas ou locais, concernentes à organização local da engenharia, em sessão ou fase.

O objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas realizadas permitem controlar os comportamentos do aluno e o sentido desses comportamentos. De acordo com Bittar (1999), a análise *a priori* possibilita uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação adidática que se quis criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação.

Deve-se realizar um levantamento prévio (teste diagnóstico*)* do grau de conhecimento dos alunos para os quais será aplicada a sequência para que se possa, com base nesses dados, preparar uma série de atividades bem diversificadas.

Os elementos de uma análise a *priori* de uma sequência didática são as atividades a serem propostas aos alunos; exposição e a comprovação das escolhas; aplicação dos problemas propostos acompanhados das análises de cada uma das atividades na previsão dos comportamentos dos alunos, sempre considerando que, com base nos saberes e conhecimentos anteriores, o aluno pode dar uma resposta que não era a resposta esperada, mas que devemos considerar válida e considerar como uma situação de aprendizagem.

Conforme esclarece Machado (2008), a análise a *priori,* própria da engenharia didática, centrada nas características de uma situação adidática, tem dois momentos, um de descrição e outro de previsão e deve ter como passos a descrição de cada escolha feita na estruturação da atividade; a análise do desafio que a situação provoca no aluno e que decorre das possibilidades de ação, escolha, de decisão, de controle e de validação que ocorrerão durante a experimentação; e a previsão dos comportamentos possíveis, mostrando que a análise realizada possibilitará controlar o sentido desses comportamentos e ainda poderá assegurar que os comportamentos ocorridos são resultados do processo que se desenvolveu com o conhecimento propiciado pela aprendizagem.

A experimentação é a fase da realização da engenharia didática com certa população de alunos e ocorre quando se dá o contato entre professor/pesquisador e os alunos objetos da investigação.

A análise *a posteriori* e a validação representam fase final e estão amparadas pelos dados obtidos na experimentação e nas observações realizadas em cada sessão de ensino. (MACHADO, 2008)

A engenharia didática estrutura-se no registro dos estudos feitos sobre um caso em questão e pela sua validação. Essa validação interna dos estudos surge como uma confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori.*

A sequência didática concretiza os passos da engenharia didática, pois é um conjunto de aulas devidamente esquematizadas para desenvolver um conteúdo. A teoria construtivista coloca o princípio do envolvimento do aluno na construção do conhecimento via interações com um meio; mostra que é possível que uma sequência bem organizada possa construir ferramentas necessárias para aquisição do conhecimento. Com base nos saberes e conhecimentos anteriores, o aluno pode dar uma resposta que não era a resposta esperada, mas que deve ser considerada válida e como uma situação de aprendizagem.

É muito difícil mensurar uma sequência didática, pois pode variar de alguns dias, semanas ou até meses de trabalho, de acordo com o que é planejado ou de acordo com as necessidades dos alunos. O processo de preparação, aplicação e avaliação de uma sequência didática obedece às fases metodológicas da engenharia didática: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentações; análise *a posteriori* e validação.

4 - MÉTODO

O objetivo geral do estudo é estruturar, aplicar, analisar e discutir uma sequência didática de taxa de variação média para alunos da 1ª série de Licenciatura em Matemática.

Esse objetivo fez desdobrar alguns objetivos específicos vinculados às análises preliminares:

1. Aplicar, analisar e discutir o perfil socioeconômico e cultural de alunos de 1º série do curso de Licenciatura em Matemática.
2. Analisar e discutir o teste diagnóstico de função aplicado a alunos da 1ª, 2ª e 3ª séries do curso de Licenciatura em Matemática em relação à possibilidade de aplicação da sequência didática de taxa de variação média e em função da evolução do desempenho dos alunos no teste durante o curso de Licenciatura Matemática.

Participaram da pesquisa alunos de 1ª, 2ª e 3ª séries de graduação de curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular de São Paulo. O critério de inclusão na amostra foi estar regularmente matriculado no curso. Não há critérios de exclusão. Os participantes foram convidados a tomar parte e os voluntários leram e assinaram e guardaram uma via do TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo A) antes de iniciarem sua participação. O risco da pesquisa pode ser considerado mínimo e restringiu-se a um desconforto no momento de responder aos instrumentos

4.1 – Instrumentos de Coleta

Os instrumentos de pesquisa seguem a orientação metodológica da Engenharia Didática já descrita em capítulo específico. Nesse sentido, o projeto compõe-se de três instrumentos de coleta: um questionário de perfil socioeconômico e cultural (Apêndice A); um Teste Diagnóstico de conhecimentos matemáticos de funções (Apêndice B) e de uma Sequência Didática (Apêndice C) que se concretiza em atividades com problemas matemáticos, cujos conteúdos são relativos à taxa de variação média. Os instrumentos estão sendo aplicados sequencialmente na ordem exposta. Todos os instrumentos foram apresentados à Comissão de Ética da Universidade (Anexo B). A pesquisa foi aprovada pela comissão.

O questionário de perfil do aluno pretende conhecer o aluno que frequenta o curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição particular de nível superior. Por via desse instrumento, é possível obter uma caracterização do estudante, tais como valores individuais e perspectivas profissionais e os motivos que o levaram escolher o curso. O questionário é composto de 23 questões assim distribuídas: 5 questões referentes a dados pessoais; 6 questões sobre escolaridade de nível médio; 1 questão sobre domínio de língua estrangeira; 3 questões sobre participação em processo seletivo; 3 questões relativas à escolha da universidade/curso; 4 questões relativas à renda familiar; 1 questão sobre ter acesso ou não à Internet.; 1 questão sobre deslocamento da sua residência ou trabalho para a escola.

O outro instrumento das análises preliminares é o Teste Diagnóstico, composto por 10 questões que abordam os seguintes itens: Funções (interpretações; identificação; classificação; cálculos; construção de gráficos) (Apêndice B).

O coordenador do curso autorizou a pesquisa, assinando os Termo de Responsabilidade da Instituição (Anexo C) e o Termo de Responsabilidade do Coordenador (Anexo D)

A sequência didática foi aplicada, no mês de agosto de 2010, apenas para os alunos da 1ª série, porque eles poderiam beneficiar-se mais da aprendizagem propiciada pela sequência, em virtude do programa da disciplina Fundamentos de Cálculo prever o conteúdo de derivada para o 2º semestre dessa série.

Aos alunos do 1º ano foi aplicado o questionário do perfil socioeconômico cultural, no mês de junho de 2010. O Teste Diagnóstico foi aplicado, entre os meses de maio a outubro de 2010, para os alunos das três séries do curso e envolveu três campi, aqui denominados campus I, II e III.

Escolhemos a 1ª série do curso de Licenciatura em Matemática para aplicação da sequência didática, pois de acordo com o plano da disciplina Fundamentos de Cálculo, os alunos têm uma rápida revisão de representação de funções que já teriam visto no Ensino Médio, em seguida, o estudo dos limites para finalizar com o estudo das derivadas.

Descrição do questionário de perfil

Esse questionário é composto de 23 questões assim distribuídas:

- Questões referentes a dados pessoais

6 questões sobre escolaridade de nível médio.

1 questão sobre domínio de língua estrangeira.

3 questões sobre participação em processo seletivo.

3 questões relativas a escolha da universidade/curso.

4 questões relativas a renda familiar.

1 questão se possui acesso a Internet.

1 questão sobre deslocamento.

Descrição do teste diagnóstico

O teste diagnóstico é composto de dez questões descritas abaixo:

- ✓ A primeira questão solicita uma associação da função com o respectivo gráfico.
- ✓ A segunda questão também solicita uma associação de função com o respectivo nome.
- ✓ A terceira questão que solicita as coordenadas de intersecção da reta com os eixos cartesianos e o cálculo do coeficiente angular da reta.
- ✓ A quarta questão solicita o tipo e a respectiva função.
- ✓ Na quinta questão, foi solicitado para o aluno classificar três gráficos como função crescente ou decrescente, sendo que um deles representa uma função constante.
- ✓ A sexta questão solicita que o aluno calcule a variação para dois valores distintos.
- ✓ Na sétima questão o aluno deverá construir a função par depois calcular o solicitado.
- ✓ Nas questões oito, nove e dez solicita a construção de gráficos: uma reta, uma parábola e uma exponencial.

Descrição da Sequência Didática

Descrevemos a seguir, em linhas gerais, as atividades da Sequência Didática da Taxa de Variação Média que será aplicada aos alunos referidos.

1ª Atividade

Composta por nove questões, em que apresenta uma tabela que descreve a posição de um móvel em função do tempo e é solicitado aos alunos para calcular intervalos de variação do tempo e intervalos de variação posição do móvel. É solicitada também uma análise do crescimento ou decrescimento da posição do móvel.

2ª Atividade

Composta de oito questões, em que retomamos os cálculos de variação, e posteriormente os alunos deverão calcular o quociente entre a variação da posição e a variação do tempo e depois interpretar o significado desses quocientes. Nas questões de número 1 e 8, os alunos deverão relacionar o quociente da razão entre a variação da posição e a variação do tempo com uma grandeza da Física.

3ª Atividade

Nessa atividade, composta de sete questões, diferente das duas primeiras em que: dada uma tabela de valores, apresentamos um gráfico que relaciona a posição de um móvel em função do tempo. É solicitado novamente o conceito de função crescente e decrescente, cálculo de variação e taxa de variação média.

4ª Atividade

Nessa atividade composta de seis questões, não apresentamos tabela e nem gráfico, mas uma função onde a posição varia com o tempo. Aqui também solicitamos o cálculo da variação do tempo e do espaço e o cálculo da razão da variação do espaço e a variação do tempo e os alunos deverão relacionar essa razão a uma grandeza física.

5ª Atividade

Saímos da cinemática e apresentamos a variação da potência em função da intensidade da corrente elétrica para o aluno perceber que o estudo é válido para outras situações. Essa atividade é composta de cinco questões em que solicitamos o cálculo da taxa de variação média com a redução dos intervalos de corrente.

6ª Atividade

Para terminar, apresentamos uma Atividade genérica de uma função matemática com oito questões em que o aluno deverá esboçar o gráfico e novamente calcular variações e a taxa de variação média.

4.2 - Procedimentos de Coleta

Foi solicitada a autorização para a instituição (Anexos B e C) para que a pesquisa possa ser realizada por meio de anuência do coordenador do curso.

Foi solicitado ao coordenador do curso que um professor da turma acompanhasse o pesquisador na coleta de dados. Os instrumentos foram aplicados de forma coletiva em sala de aula e o tempo médio foi de uma hora, com exceção das atividades da sequência didática que exigiram 3 aulas de 50 minutos.

Todos os instrumentos são do tipo lápis e papel e, no caso da resolução da sequência didática, o aluno foi informado da necessidade de calculadora que foi fornecida pelo pesquisador.

A coleta de dados foi realizada entre os meses de maio a agosto de 2010, após a aprovação do projeto em todas as instâncias da instituição, principalmente no Comitê de Ética.

As análises dos dados obtidos na coleta de dados de campo, por meio dos instrumentos previstos: questionário de perfil socioeconômico, teste diagnóstico e aplicação da sequência didática seguiram as fases propostas pela engenharia didática, conforme exposição feita em capítulo específico.

5 - ANÁLISES PRELIMINARES.

5.1 - Perfil dos Sujeitos

Resultados do questionário socioeconômico.

Participantes do questionário socioeconômico: 14 alunos - Campus I

Dos alunos da 1ª série do curso de licenciatura em Matemática do Campus I, 57% são do sexo masculino e 43 % do sexo feminino. A idade de ingresso na universidade apresenta um destaque para idades superiores a 26 anos (43%); do total dos ingressantes, 71% são solteiros e 29% são casados. A grande maioria nasceu na cidade de São Paulo (70%) e também residem em São Paulo (86%).

Desses alunos, 64% concluíram ensino médio antes do ano de 2003, 64% no período matutino, 36% no período noturno e 71% dos alunos concluíram o ensino médio regular (escola pública estadual - 79%; escola particular - 14 % e escola pública federal - 7%) e praticamente sem reprovação nenhuma, apenas 7%.

Dos ingressantes, 71% não frequentaram cursinho e 29% frequentaram apenas 1 semestre, levaram em média de 1 a 3 anos após a conclusão do ensino médio para ingressar no ensino superior. Ainda, 43% participaram de outros processos seletivos, enquanto 50% participaram apenas do processo seletivo dessa instituição.

O percentual de escolha dessa instituição de ensino como 1ª opção foi de 50% e como 2ª opção foi de 21%. O motivo pela escolha do curso como sendo de realização pessoal foi de 71% e estão totalmente decididos 79 %.

São alunos que exercem atividade remunerada e trabalham 40 horas semanais ou mais (57%) compondo uma renda familiar entre dois a dez salários mínimos (100%).

71 % possuem computador em casa com acesso à Internet.

Participantes do questionário socioeconômico: 14 alunos - Campus II

Dos alunos da 1ª série do curso de licenciatura em Matemática do Campus II, 64 % são do sexo masculino e 36 % do sexo feminino. A idade de ingresso na universidade apresenta um destaque para idades superiores a 29 anos (36%); do total de ingressantes, 79% são solteiros e 21% são casados ou separados. A maioria dos alunos são oriundos da região Norte/Nordeste (43%) e na época da coleta de dados, 50% residiam em Osasco.

Desses alunos, 64% concluíram ensino médio antes do ano de 2003; 57 % no período noturno, 29% no período matutino e 14% no período vespertino e 79% dos alunos concluíram o ensino médio regular: escola pública estadual (64%), escola particular (14%) e escola pública federal (7%) e com um índice de reprovação em alguma série de 20 %.

Dos ingressantes, 93% não frequentaram cursinho e 7% frequentaram apenas 1 semestre, levaram em média de 5 a 10 anos após a conclusão do ensino médio para ingressar no ensino superior. Ainda, 29% participaram de outros processos seletivos, enquanto 71% participaram apenas do processo seletivo dessa instituição.

O percentual de escolha dessa instituição de ensino como 1ª opção foi de 57% e como 2ª opção foi de 29%. O motivo pela escolha do curso como sendo de realização pessoal foi de 57% e 86% afirmaram estar totalmente decididos quanto à escolha feita.

São alunos que exercem atividade remunerada e trabalham 40 horas semanais ou mais (71%), compondo uma renda familiar entre dois a dez salários mínimos (86%).

Do contingente pesquisado, 79 possuem computador em casa com acesso à internet.

5.2 - Teste Diagnóstico

Este tópico do trabalho traz inicialmente os objetivos do Teste Diagnóstico que aparece na íntegra no Apêndice B. Em seguida são apresentados os resultados para cada questão do teste, discriminados por série e por campus. Cabe lembrar que o Teste Diagnóstico foi aplicado nas três séries do curso de Licenciatura em Matemática. Para finalizar, faz-se uma discussão das questões do teste que estão mais diretamente ligadas aos conteúdos necessários para o trabalho dos sujeitos com a sequência didática a ser aplicada.

Domínio de funções matemáticas por alunos de Licenciatura em Matemática

O objetivo geral do teste diagnóstico aplicado foi o de buscar atingir o máximo possível os assuntos relacionados a funções de 1º e 2º graus, como: função crescente, decrescente e constante; gráficos das funções; interpretação e resolução de problemas envolvendo função. Esses assuntos são imprescindíveis para aplicações no conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que faz parte da matriz curricular de vários cursos superiores. Podemos citar como exemplo o conteúdo de cinemática da Física que exige o conhecimento de taxa de variação.

O teste diagnóstico buscou verificar se o aluno:

- Consegue associar as funções com os respectivos gráficos.
- Consegue distinguir função de 1º e 2º graus.
- Sabe determinar a declividade ou coeficiente angular da reta.
- Sabe representar o gráfico de uma função a partir da equação.
- Tem noção de função crescente, decrescente e constante.
- Sabe calcular intervalos de variação.

Aplicação do Teste diagnóstico

O teste diagnóstico foi aplicado para as turmas de 1ª, 2ª e 3ª séries do curso de Licenciatura em Matemática de três campi da instituição, denominadas aqui de Campus I e Campus II.

Também foi aplicado o mesmo teste diagnóstico para os alunos da 3ª série do curso de Licenciatura em Matemática da mesma instituição em outro campus, denominado aqui como Campus III.

Segundo os professores aplicadores do teste, houve empenho dos alunos na resolução das questões. Os aplicadores não interferiram no processo e informaram que alguns alunos utilizaram calculadora para realização do teste.

Expõem-se a seguir as análises e os resultados obtidos pelos alunos.

5.2.1 - Análise dos resultados do Teste Diagnóstico por série e por campus

O teste diagnóstico foi aplicado para 23 alunos do campus I e 26 alunos do campus II.

1ª série - Campi I e II

Questão 1

A primeira questão solicitava uma associação da função com o respectivo gráfico e a maioria (acima de 70%) dos alunos acertou duas das associações solicitadas (*c* e *d*). Os acertos do item *a* ficaram abaixo dos 50% (Tabelas 1 e 2). Apenas um aluno do Campus II (3,8% do total) deixou em branco os itens *b*,*c* e *d*.

Tabela 01 - Associação da função com o respectivo gráfico – 1ª série – Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	8	34,8	15	65,2	0	0
B	8	34,8	15	65,2	0	0
C	18	78,3	5	21,7	0	0
D	18	78,3	5	21,7	0	0

Tabela 02 - Associação da função com o respectivo gráfico – 1ª série – Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	12	46,2	14	53,8	0	0
B	16	61,5	9	34,6	1	3,8
C	18	69,3	7	26,9	1	3,8
D	23	88,5	1	3,8	1	3,8

A segunda questão, conforme Tabelas 3 e 4, também solicitava uma associação de função, nesse caso, associação com o respectivo nome. Essa foi a questão que mostrou maior número de acertos: igual ou acima dos 70% no campus I e superior a 90% no campus II. Poucos alunos deixaram as questões em branco.

Questão 2

Tabela 03 - Associação do nome da função com a respectiva função polinomial – 1ª série Campus I.

	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	18	78,3	2	8,7	3	13
B	16	69,6	5	21,7	2	8,7
C	20	87	3	13	0	0
D	18	78,3	4	17,4	1	4,3

Tabela 04 - Associação do nome da função com a respectiva função polinomial – 1ª série Campus II.

	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	26	100	0	0	0	0
B	24	92,3	2	7,7	0	0
C	25	96,1	1	3,8	0	0
D	24	92,3	2	7,7	0	0

Questão 3

A terceira questão do teste envolvia cálculos em que era solicitado o coeficiente angular da reta que faz parte do conteúdo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Para os itens *a* e *b* houve acertos em torno de 70%. No entanto, é preciso destacar o índice elevado de resposta em branco (Tabelas 5 e 6) principalmente em relação ao item *c* (em torno de 50%).

Tabela 05 - Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos e coeficiente angular da reta – 1ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	16	69,6	0	0	7	30,4
B	16	69,6	0	0	7	30,4
C	1	4,3	11	47,8	11	47,8

Tabela 06 - Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos e coeficiente angular da reta – 1ª série Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	18	69,2	3	11,5	5	19,2
B	19	73,1	2	7,7	5	19,2
C	4	15,4	9	34,6	13	50

Questão 4

A quarta questão solicitava a expressão geradora da função e o tipo de função e aconteceu um equilíbrio entre acertos, erros e respostas em branco na 1ª série do Campus II (Tabela 8). Já no Campus I, houve aproximadamente 50% de respostas em branco (Tabela 7). Os resultados também mostraram que os alunos confundem função constante com função afim.

Tabela 07 - Determinação da expressão da função e o seu tipo – 1ª série Campus I.

I	II	CERTO	%	ERRADO		EM BRANCO	%
4	Exp	6	26,1	4	17,4	13	56,5
	tipo	9	39,1	4	17,4	10	43,4

Tabela 08 - Determinação da expressão da função e o seu tipo – 1ª série Campus II.

I	II	CERTO	%	ERRADO		EM BRANCO	%
4	Exp	8	30,8	8	30,8	10	38,4
	tipo	6	23,1	11	42,3	9	34,6

Questão 5

Na quinta questão, segundo as orientações explícitas no enunciado, o aluno deveria classificar três gráficos como sendo função crescente ou função decrescente. As Tabelas 9 e 10 mostram que houve um número de acertos acima de 50% no Campus I nos itens *a* e *b*, com destaque para o Campus II, que obteve 84,6% de acertos nesses itens. No entanto, a resposta correta para o item *c* era função constante, ou seja, não era crescente e nem decrescente. Nesse caso, é possível afirmar que as orientações da questão podem ter induzido o aluno ao erro, pois verificou-se cerca de 70% de erros ou de respostas em branco nos dois campi para esse item.

Tabela 09 - Classificação de funções: crescente, decrescente e constante. 1ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	12	52,2	11	47,8	0	0
B	13	56,5	10	43,4	0	0
C	7	30,4	12	52,2	4	17,4

Tabela 10 - Classificação de funções: crescente, decrescente e constante. 1ª série Campus II

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO
A	22	84,6	4	15,4	0
B	22	84,6	4	15,4	0
C	5	19,2	14	53,8	7

Questão 6

Na sexta questão, uma das mais importantes, pois está diretamente relacionada com a sequência didática a ser aplicada nesta pesquisa, verificou-se (Tabela 11) um número baixo de acertos, principalmente no Campus I (4,3%). A grande maioria dos alunos dos dois Campi (Tabelas 11 e 12) errou e ou deixou em branco: a soma desses percentuais ultrapassa os 90% . A análise das respostas mostrou que os alunos chegavam a calcular os valores dos intervalos, mas não calculavam o principal que era solicitado, ou seja, a variação.

Tabela 11 - Cálculo da variação do valor de uma função para dois valores distintos – 1ª série Campus I

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	1	4,3	19	82,6	3	13
B	1	4,3	19	82,6	3	13
C	1	4,3	19	82,6	3	13
D	1	4,3	19	82,6	3	13

Tabela 12 - Cálculo da variação do valor de uma função para dois valores distintos – 1ª série Campus II

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	4	15,4	10	38,5	12	46,1
B	3	11,5	10	38,5	13	50
C	2	7,7	11	42,3	13	50
D	0	0	13	50	13	50

Questão 7

Na sétima questão, esperava-se que os alunos fossem capazes de fazer a construção de uma função para depois calcular os itens *a* e *b*. O que ocorreu na prática foi que eles chegaram às respostas desses itens sem precisar montar a função respectiva.

Cabe destaque para o item *c* da questão 7, que solicitava a diferença de consumo, termo que estava claramente explícito no enunciado, mas que os alunos interpretaram como gastos e assim calcularam erroneamente a diferença dos gastos, confundindo o termo consumo em Kwh com o termo gastos em R$ (Tabelas 13 e 14, 82,6% e 57,7%), respectivamente. Nesse caso, os erros constatados foram resultantes da dificuldade de leitura dos alunos, o que pode ser explicado pela prática cotidiana de se usarem os termos consumo e gastos como sinônimos.

Tabela 13 - Cálculo de consumo e valor consumido através de uma função – 1ª série – Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	21	91,3	1	4,3	1	4,3
B	21	91,3	1	4,3	1	4,3
C	3	13	19	82,6	1	4,3
D	20	86,9	1	4,3	2	8,7

Tabela 14 - Cálculo de consumo e valor consumido através de uma função – 1ª série – Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	16	61,5	3	11,5	7	26,9
B	16	61,5	3	11,5	7	26,9
C	4	15,4	15	57,7	7	26,9
D	15	57,7	5	19,2	6	23,1

Questões 8, 9 e 10

Nas questões 8, 9 e 10 (Tabelas 15 e 16), que pediam a construção de gráficos de funções, foi possível verificar um número razoável de construções corretas da reta e da parábola, praticamente 50%, o que não aconteceu para o gráfico da exponencial (questão 10), pois apenas 21, 7% e 23,1%, respectivamente, acertaram a questão.

Tabela 15 - Construções de funções: Afim, quadrática e exponencial – 1ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
Que. 8	11	47,8	8	34,8	4	17,4
Que. 9	11	47,8	9	39,1	3	13
Que10	5	21,7	12	52,2	6	26,1

Tabela 16 - Construções de funções: Afim, quadrática e exponencial – 1ª série Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
Que. 8	15	57,7	6	23,1	5	19,2
Que. 9	12	46,1	9	34,6	5	19,2
Que10	6	23,1	13	50	7	26,9

2ª Séries - Campus I e II

O mesmo teste diagnóstico foi aplicado para 20 alunos do campus I e 33 alunos do campus de II, da 2ª série do curso de Licenciatura em Matemática da mesma instituição.

Questão 1

A primeira questão solicitava uma associação da função com o respectivo gráfico e a maioria dos alunos acertou as quatro associações, conforme expõem as Tabelas 17 e 18, sendo que o campus II apresentou um número maior de acertos (Tabela 18). No total, apenas 3 deixaram a questão em branco.

Tabela 17 - Associação da função com o respectivo gráfico –2ª série – Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	11	55	8	40	1	5
B	13	65	6	30	1	5
C	15	75	4	20	1	5
D	17	85	2	10	1	5

Tabela 18 - Associação da função com o respectivo gráfico –2ª série – Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	27	81,8	6	18,2	0	0
B	27	81,8	4	12,1	2	6,1
C	26	78,8	5	15,1	2	6,1
D	28	84,8	3	9,1	2	6,1

Questão 2

Segunda questão solicitava a associação da função com o respectivo nome. Essa foi a questão que apresentou o maior número de acertos 95% ou mais (Tabelas 19 e 20), sendo que apenas 1 aluno do campus I deixou em branco.

Tabela 19 - Associação da função com o respectivo nome – 2ª série – Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	19	95	0		0	1
B	19	95	0		0	1
C	19	95	0		0	1
D	19	95	0		0	1

Tabela 20 - Associação da função com o respectivo gráfico – 2ª série – Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	32	97	1	3	0	0
B	32	97	1	3	0	0
C	33	100	0	0	0	0
D	32	97	1	3	0	0

Questão 3

A terceira questão, nos itens *a* e *b*, envolvia cálculos para a determinação da coordenada do ponto solicitado, sendo que o item *c* solicitava o coeficiente angular da reta. As Tabelas 21 e 22 mostram que os itens *a* e *b* tiveram excelentes resultados, praticamente acima de 80% de acertos, mas em relação ao item *c,* a maioria dos alunos errou ou deixou em branco. Essa dificuldade em relação ao item *c* será objeto de discussão específica mais adiante.

Tabela 21 - Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos e coeficiente angular da reta – 2ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	18	90	0	0	2	10
B	17	85	1	5	2	10
C	2	10	10	50	8	40

Tabela 22 - Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos e coeficiente angular da reta – 2ª série Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	29	87,9	2	6	2	6
B	26	78,8	5	15,1	2	6
C	10	30,3	12	36,4	11	33,3

Questão 4

A quarta questão solicitava a expressão e o tipo de função. As tabelas 23 e 24 mostram que somente 40% dos alunos do Campus I e 30% do Campus II acertaram a expressão. No que se refere ao tipo de função, houve resultado discrepante entre os dois Campi, no Campus I somente 30% acertaram, enquanto no Campus II os acertos foram de 63,6%. Destaca-se que para os dois *campi* deve ser desenvolvido o mesmo conteúdo programático já previsto em planejamento de ensino da instituição.

Tabela 23 - Determinação da expressão da função e o seu tipo – 2ª série Campus I.

I	II	CERTO	%	ERRADO		EM BRANCO	%
4	Exp	8	40	4	20	8	40
	tipo	6	30	7	35	7	35

Tabela 24 - Determinação da expressão da função e o seu tipo – 2ª série Campus II

I	II	CERTO	%	ERRADO		EM BRANCO	%
4	Exp	10	30,3	0	0	23	69,7
	tipo	21	63,6	1	3	11	33,3

Questão 5

Na quinta questão, foi solicitada para o aluno a classificação de três gráficos como função crescente ou decrescente. As Tabelas 25 e 26 revelam que para os itens *a* e *b*, os acertos foram maior que 80%. Conforme explicado nos resultados da 1ª série, o terceiro gráfico, item *c*, era de função constante, ou seja, não era crescente e nem decrescente, o que poderia induzir o aluno ao erro e, mesmo assim, o resultado mostra acertos acima de 65%. Isso pode revelar uma postura mais crítica do aluno do 2º ano que consegue perceber e apresentar sua resposta, mesmo que o enunciado não tenha explicitado a função constante como possibilidade de resposta.

Tabela 25 - Classificação de funções: crescente, decrescente e constante. 2ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	16	80	4	20	0	0
B	16	80	4	20	0	0
C	13	65	6	30	1	5

Tabela 26 - Classificação de funções: crescente, decrescente e constante. 2ª série Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	32	97	0	0	1	3
B	32	97	0	0	1	3
C	23	69,7	8	24,2	2	6

Questão 6

A sexta questão, considerada de grande importância para este estudo, pois está diretamente relacionada à sequência didática aplicada, também como nas primeiras séries, foi alvo de grande número de respostas com erros ou em branco (Tabelas 27 e 28), e novamente os alunos chegavam a calcular os valores dos intervalos, mas não calculavam a variação.

Tabela 27 - Cálculo da variação do valor de uma função para dois valores distintos – 2ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	9	45	9	45	2	10
B	9	45	9	45	2	10
C	8	40	10	50	2	10
D	7	35	11	55	2	10

Tabela 28 - Cálculo da variação do valor de uma função para dois valores distintos – 2ª série Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	11	33,3	21	63,6	1	3
B	9	27,3	23	69,7	1	3
C	11	33,3	21	63,6	1	3
D	10	30,3	22	66,7	1	3

Questão 7

Na sétima questão, esperava-se dos alunos a construção de uma função para depois calcular os itens *a* e *b*. As Tabelas 29 e 30 mostram que, como já ocorreu nas 1ªs séries, os alunos chegaram às respostas corretas dos itens *a*, *b* e *d* sem precisar montar a função respectiva. Destaca-se novamente o item *c* que solicitava a diferença de consumo e os alunos calcularam a diferença dos gastos, cometendo o mesmo tipo de erro já apontado para as turmas da 1ª série.

Tabela 29 - Cálculo de consumo e valor do consumo através de uma função – 2ª série – Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	16	80	3	15	1	5
B	16	80	3	15	1	5
C	2	10	17	85	1	5
D	15	75	3	15	2	10

Tabela 30 - Cálculo de consumo e valor do consumo através de uma função – 2ª série – Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	24	72,7	3	9,1	6	18,2
B	25	75,7	2	6	6	18,2
C	4	12,1	23	69,7	6	18,2
D	24	72,7	3	9,1	6	18,2

Questões 8, 9 e 10

Para as questões 8, 9 e 10, que pediam a construção de gráficos das funções afim, quadrática e exponencial, é possível verificar (Tabelas 31 e 32) que os alunos do Campus I obtiveram acertos superiores a 50%, no entanto, para Campus II, o percentual não passou dos 42,4%.

Tabela 31 - Construções de funções: Afim, quadrática e exponencial – 2ª série Campus I.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
Quest 8	11	55	9	45	0	0
Quest 9	10	50	9	45	1	5
Quest 10	12	60	7	35	1	5

Tabela 32 - Construções de funções: Afim, quadrática e exponencial – 2ª série Campus II.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
Quest 8	14	42,4	12	36,4	7	21,2
Quest 9	14	42,4	11	33,3	8	24,2
Quest 10	8	24,2	10	30,3	15	45,4

A comparação com os resultados obtidos pelos alunos do 1º ano para as questões 8, 9 e 10 mostra que a turma da 2ª série do Campus II teve resultados inferiores ao campus I. Mais especificamente em relação à questão 10, o resultado mostrou índice muito próximo aos obtidos pelos alunos da 1ª série. Fica evidente, para essa turma, a necessidade de reforço na construção de gráficos. Outra possível explicação pode ser o fato de que os alunos não se empenharam em responder a 10ª questão, por ser a última atividade.

3ª série do campus II

Questão 1

Para a primeira questão que solicitava uma associação da função com o respectivo gráfico, os resultados (Tabela 33) demonstraram altos índices de acertos, apenas dois alunos erraram o item *a*, um aluno errou o item *b* e também um aluno errou o item *c*. Nenhum item foi deixado em branco.

Tabela 33 - Associação da função com o respectivo gráfico – 3ª série – Campus III.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	17	89,5	2	10,5	0	0
B	18	94,7	1	5,3	0	0
C	18	94,7	1	5,3	0	0
D	19	100	0	0	0	0

Questão 2

A segunda questão, que solicitava uma associação de função com o respectivo nome, teve como resultado (Tabela 34) de 100% de acertos.

Tabela 34 - Associação da função com o respectivo gráfico – 3ª série – Campus III

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	19	100	0	0	0	0
B	19	100	0	0	0	0
C	19	100	0	0	0	0
D	19	100	0	0	0	0

Questão 3

A terceira questão obteve acertos superiores a 80% (Tabela 35) para os itens *a* e *b*, o que demonstra domínio dos alunos para a determinação dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos; no entanto, para a determinação do coeficiente angular da reta, item *c*, apenas 21% dos alunos lograram acertar. Observa-se, para esse item da questão 3, a mesma dificuldade já apontada para as turmas de primeiras séries (4,3% e 15,4%, respectivamente, Campus I e II) e segundas séries (10% e 30,3% respectivamente, Campus I e II) do curso de Licenciatura em Matemática. Chama inclusive a atenção o fato de que os alunos da 2ª série, campus II, acertaram mais do que os alunos da 3ªsérie.

Tabela 35 - Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos cartesianos e coeficiente angular da reta – 3ª série Campus III.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	17	89,5	0	0	2	10,5
B	16.	84,2	1	5,3	2	10,5
C	4	21	12	63,2	3	15,8

Questão 4

A quarta questão solicitava a expressão geradora da função e o tipo de função e praticamente metade dos alunos (52,6%) acertou a expressão e 47,4 % acertaram o tipo de função (Tabela 36). Embora esses resultados sejam melhores do que os obtidos pelos alunos da 2ª série, ainda são preocupantes, principalmente se considerarmos que os dados foram coletados no 2º semestre do ano. Além disso, foi possível notar que também os alunos da 3ª série confundem função constante com função afim.

Tabela 36 - Determinação da expressão da função e o seu tipo – 3ª série Campus III

I	II	CERTO	%	ERRADO		EM BRANCO	%
4	Exp	10	52,6	2	10,5	7	36,8
	tipo	9	47,4	1	5,3	9	47,4

Questão 5

A questão solicitava que o aluno classificasse três gráficos como função crescente ou decrescente. Novamente, conforme Tabela 37, verificamos 100% de acertos nos itens a e b e no item c que era de função constante, ou seja, não era crescente e nem decrescente, o que poderia induzir o aluno ao erro. Mesmo assim, podemos verificar que 84,2% dos alunos acertaram esse item. Os resultados permitem inferir que não obstante o enunciado não apresentar como opção de resposta função constante, o aluno posicionou-se de modo mais crítico apontando o que sabia como correto.

Tabela 37 - Classificação de funções: crescente, decrescente e constante - 3ª série Campus III

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	19	100	0	0	0	0
B	19	100	0	0	0	0
C	16	84,2	0	0	3	15,8

Questão 6

A sexta questão, considerada para este trabalho como muito importante por estar diretamente relacionada à sequência didática deste estudo, trouxe como resultado um percentual de acertos relativamente baixo (inferiores a 50%). Esses resultados não eram esperados, pois são alunos de 3ª série. É possível notar novamente (Tabela 38) que os alunos chegavam a calcular os valores dos intervalos, como o fizeram os alunos da 2ª série, mas não calculavam o que era solicitado, ou seja, a variação.

Tabela 38 - Cálculo da variação do valor de uma função para dois valores distintos – 3ª série Campus III.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	8	42,1	11	57,9	0	0
B	8	42,1	11	57,9	0	0
C	8	42,1	11	57,9	0	0
D	9	47,4	10	52,6	0	0

Questão 7

Na sétima questão, esperava-se dos alunos a construção de uma função para depois calcular os itens *a* e *b*. O que ocorreu de fato foi que eles chegaram às respostas dos itens *a* e *b* sem precisar montar a função respectiva, apenas 2 alunos montaram a função. Novamente, o item c (Tabela 39) apresentou baixo índice de acertos (15,8%), pois os alunos não se ativeram ao que estava explícito no enunciado e confundiram-se ao fazer o cálculo da diferença dos gastos, confundindo o termo consumo (Kwh) com gastos (R$).

Tabela 39 - Cálculo de consumo e valor consumido através de uma função – 3ª série – Campus III.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
A	17	89,5	2	10,5	0	0
B	18	94,7	1	5,3	0	0
C	3	15,8	16	84,2	0	0
D	18	94,7	1	5,3	0	0

Questões 8, 9 e 10

Nas questões 8, 9 e 10 que pediam a construção de gráficos de funções, é possível verificar (Tabela 40) um percentual de praticamente 70% de construções corretas da reta e da parábola, questões 8 e 9 respectivamente. No caso dessa série, não é possível avaliar os resultados para a questão 10, pois houve um erro no processo de aplicação, que acabou não deixando espaço no papel para o gráfico na resposta, o que pode ter levado ao alto índice de respostas em branco (68,4%).

Tabela 40 - Construções de funções: Afim, quadrática e exponencial – 3ª série Campus III.

I	CERTO	%	ERRADO	%	EM BRANCO	%
Quest 8	15	78,9	2	10,5	2	10,5
Quest 9	13	68,4	4	21	2	10,5
Quest 10	4	21	2	10,5	13	68,4

Cabe destacar que as mesmas atividades do Teste Diagnóstico foram apresentadas para os alunos da 1ª e 2ª séries do curso de Licenciatura em Física da mesma universidade no ano de 2009. Comparando a aplicação do teste para os alunos da licenciatura em Física (Pinto e Oliveira, 2009) e ainda comparando o mesmo teste aplicado para os alunos das 1ª, 2ª e 3ª séries de Licenciatura em Matemática, a análise dos resultados permite considerar que os alunos da 1ª série terão condições e se beneficiarão da participação nas atividades da sequência didática, pois foi elaborada uma sequência de maneira que os alunos vão tomando conhecimento gradualmente em decorrência das atividades propostas.

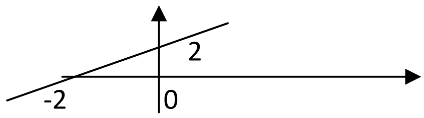
5.2.2 - Discussão dos resultados do Teste Diagnóstico

Expõem-se a seguir alguns pontos de discussão dos resultados obtidos pelos alunos no Teste Diagnóstico especificamente em relação às questões 3, 4, 5, 6 e 7, consideradas mais diretamente ligadas aos requisitos para o desenvolvimento da aprendizagem na sequência didática aplicada. Buscou-se também estabelecer um diálogo com trabalhos científicos que abordam as questões relativas aos conteúdos das atividades do teste e que foram abordados no capítulo 2.

Questão 3

Com base no gráfico abaixo, determine:

a) Corte no eixo x.
b) Corte no eixo y.
c) Coeficiente angular da reta.

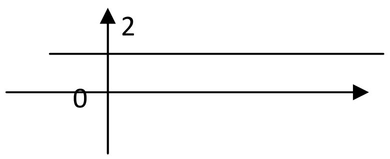


O estudo dos gráficos é importante, pois é parte integrante do conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, disciplina que compõe a maioria das matrizes curriculares dos cursos superiores de exatas e algumas das áreas de biológicas e humanas. Em nosso estudo assume uma importância maior na aplicação da sequência, para verificar se o aluno consegue determinar as coordenadas localizadas nos eixos cartesianos, ou seja, leitura do gráfico apresentado. Na atividade 4 da sequência, apresentamos questões que, para serem resolvidas, os alunos devem retirar os valores do gráfico apresentado e assim chegar aos resultados. No caso do item *c,* é importante o sinal do coeficiente angular que neste caso determina se a função é crescente ou decrescente. O objetivo dessa questão é verificar se o aluno consegue identificar as coordenadas para determinação da equação geral da reta, para depois calcular o coeficiente angular da reta solicitado. O aluno poderá também obter o coeficiente angular através da tangente. Verificou-se, como esperado, que os alunos da 2ª e 3ª séries apresentaram um desempenho melhor que as 1ªs séries para determinação das coordenadas de intersecção nos eixos. No item *c*, predominaram as respostas erradas ou em branco nas três séries. Dois alunos da 3ª série calcularam o coeficiente angular através da equação geral da reta (: $y - y_0 = m\,(x - x_0) \rightarrow m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$), o que demonstra que eles tinham certo conhecimento sobre o conteúdo.

A possível explicação para as dificuldades encontradas pelos alunos, na resolução dessa questão, pode estar na interpretação e nas representações gráficas. Essas dificuldades também foram apontadas por Villareal (1999), que constatou que os estudantes de sua pesquisa foram eficientes em tarefas algorítmicas, porém tiveram dificuldades quando representações gráficas estavam contidas no gráfico.

Questão 4

Com base no gráfico abaixo, escreva a expressão que relaciona x com y. Que tipo de função representa?



Nessa questão, o aluno deveria encontrar a expressão da função com base no gráfico e concluir que se trata de uma função constante. Embora em nossa sequência não conste nenhuma atividade com função constante, foi colocada essa questão no teste diagnóstico para detectar se o aluno conseguiria identificar uma função constante, para diferenciar das demais. Verificou-se que, considerando as três séries estudadas, na determinação da função houve um equilíbrio entre acertos, erros e respostas em branco, sendo que a 1ª série do Campus I deixou em branco 56,5 % (Tabela 7). Mesmo na 3ª série que era esperado um número maior de acertos, isso não ocorreu, pois apenas a metade dos alunos acertou a questão. A resolução errada ou as respostas em branco podem ser resultantes de obstáculo que esses alunos enfrentam ao estudar determinado conceito.

Bachelard (1996) introduziu a noção de obstáculo epistemológico em 1938. Ao analisar as condições psicológicas relacionadas ao progresso da ciência afirmou que "é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos." Mais especificamente no que se refere à Matemática, Brousseau (1983) estabelece relação entre obstáculo epistemológico e a resistência de um saber mal adaptado; considerando-o como uma possibilidade para a interpretação de alguns erros recorrentes nas resoluções de problemas por parte dos alunos.

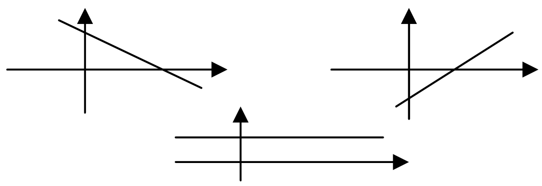
Segundo Oliveira (2006, p. 27),

> Obstáculos epistemológicos podem ser utilizados para analisar a gênese histórica e a evolução do aluno com relação a um conhecimento. Alguns obstáculos desta natureza, que tiveram um papel importante na gênese do conceito de função ainda podem ser encontrados entre os estudantes, pois são interessantes ao saber.

Na consideração das dificuldades dos alunos no Teste Diagnóstico, mais especificamente nas questões 4 e 5 que envolviam conhecimento de função constante, é possível estabelecer relação com o que afirma Oliveira (2006, p. 27). “O obstáculo da razão e proporção está implícito nas funções e gráficos que aparecem nos livros, pois à medida que a variável independente *x* sofre acréscimos, a variável dependente cresce ou decresce proporcionalmente (direta ou inversamente).” Nesse sentido, segundo Oliveira (2006), o entendimento dos obstáculos epistemológicos é de grande valor, pois auxilia os professores a perceberem os erros cometidos pelos alunos e a proposição de possíveis correções.

Questão 5

Classifique como função crescente e função decrescente:



É importante o aluno distinguir função crescente, decrescente e constante, pois existem questões nas atividades da sequência que exigem a capacidade de identificação de funções em crescentes ou decrescentes para chegar aos resultados necessários. Nesse caso, sem o domínio do conceito, o aluno não chegará à conclusão.

Nessa questão 5, o aluno deveria classificar os gráficos apresentados como decrescente, crescente ou constante e perceber, criticamente embora não estivesse no enunciado, para um dos itens (*c*), a resposta correta era função constante. Foi possível verificar um número elevado de acertos nos dois primeiros gráficos (acima de 80%) em quase todas as séries, sendo que a única que ficou fora desse percentual foi a 1ª série do Campus I (52,2%). No caso do item *c*, com exceção das 2ªs que conseguiram um percentual acima de 65% de acertos, as demais séries ficaram com um percentual abaixo de 30%. Novamente podemos verificar as dificuldades que os alunos encontram numa interpretação gráfica, como destaca Villarreal (1999).

Mais especificamente, em relação à função constante, e ainda dentro da perspectiva dos obstáculos epistemológicos, Oliveira (2006, pág. 28 apud Schwars, 1995) aponta as dificuldades dos alunos para reconhecer uma função que tem o tipo f(x) = c e que a letra *c* representa um número real, como função constante.

Questão 6

Com base na função y = 5x + 10, calcule:

a) a variação de y para os valores de x =5 e x =6.
b) a variação de y para os valores de x =15 e x =16.
c) a variação de y para os valores de x =20 e x =22.
d) a variação de y para os valores de x =30 e x =35.

A resolução dessa questão é fundamental, pois solicita a variação de *y* para uma variação de *x* já explicitado no enunciado. Essa questão está diretamente ligada com a sequência didática que em todas as atividades exige o cálculo de variação.

Nessa questão, o aluno deveria calcular os valores da função para depois calcular a variação solicitada que é uma tarefa puramente algorítmica. Verificou-se que em uma das 1ªs séries e na 3ª série, praticamente 90% dos alunos erraram ou deixaram a questão em branco. Já as 2ªs séries apresentaram uma porcentagem de acertos de 45%.

Esses resultados vão ao encontro do estudo de Meyer (2003) que, após analisar diversas pesquisas sobre a área temática, afirma que diversos trabalhos apontam para o fato de que os alunos conseguem resolver tarefas de caráter operatório, mas fracassam com tarefas que exigem domínio de aspectos conceituais do cálculo.

Questão 7

O consumo de energia elétrica é medida em Kwh (quilo watt-hora). Na conta do consumo mensal, é acrescentada uma taxa fixa (impostos) de R$ 3,00. Sabendo que um Kwh custa R$ 0,15, calcular:

a. o valor da conta para um consumo de 50 Kwh.

b. o valor da conta para um consumo de 100 Kwh.
c. a diferença dos consumos do itens a e b.
d. quantos Kwh foram consumidos se o valor final da conta foi de: R$ 18,00.

Nessa questão, o aluno poderia primeiro montar a função para depois efetuar os cálculos solicitados. Essa questão tem relação com a sequência, pois solicita cálculos que envolvem variações, tanto de consumo quanto de gastos. Esse modelo de questão que pede primeiro que se monte a função e depois que se efetuem os cálculos é encontrada no livro de cálculo de Diva Marília Flemming. (FLEMING, 2004)

No item *c,* verificamos que os alunos confundiram valor consumido (R$) e consumo propriamente dito (Kwh), o que não era esperado por essa interpretação ambígua, pois é comum inclusive nas contas de luz, o consumo ser expresso em Kwh e o termo valor sempre relacionado a dinheiro. Por esse motivo é que gerou um percentual baixo de acertos, ou seja, entre 10% e 15% . Os itens *a, b* e *d* podem ser destacados na 3ª série, onde foram acertados por mais de 90% dos alunos.

As questões do teste diagnóstico são para verificar se o aluno tem domínio do conteúdo Funções, que é parte integrante dos conteúdos curriculares do ensino fundamental até o final do seu curso superior.

Escolhemos essas questões do teste diagnóstico para discussão, pois estão ligadas diretamente ou indiretamente com sequência didática aplicada. Após a aplicação do teste nas três séries, verificou-se que para uma nova utilização do mesmo teste, seria necessário melhorar o enunciado de algumas questões, por exemplo, a sétima; aumentar o número de questões desse teste, principalmente daquelas que envolvem variações e das que envolvem interpretação gráfica. O trabalho de intervenção realizado ajudou a superar algumas dificuldades, na medida em que as explicações dadas em sala de aula complementaram as atividades com o conteúdo de Fundamentos de Cálculo que vinha sido trabalhado pela professora responsável. Mesmo assim, a intervenção realizada em apenas uma aula antes da aplicação da sequência não foi suficiente para solucionar as dúvidas apresentadas pelos alunos.

De qualquer modo, os resultados obtidos pelos alunos da 1ª série do curso de Licenciatura em Matemática permitem considerar que eles têm condições de se beneficiar, em termos de aprendizagem, das atividades previstas na Sequência Didática de Taxa de Variação Média. No entanto, a aplicação do teste diagnóstico para esses alunos mostrou dificuldades nas interpretações e construções de alguns gráficos, nas realizações de cálculos que envolviam variações para dois valores distintos é até mesmo na verificação para detectar se uma função é crescente ou decrescente.

Para que os alunos pudessem se beneficiar mais do trabalho com a Sequência Didática proposta por este estudo, foi realizada uma intervenção em sala de aula, ou seja, foi programado um encontro dedicado à resolução de exercícios, tanto do teste diagnóstico já aplicado, quanto outros selecionados para atender às necessidades dos alunos. O objetivo era discutir e explicar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos no teste diagnóstico e que se constituíam em fundamentos para a aprendizagem do conteúdo previsto na sequência didática. No início do encontro, foi entregue a cada aluno o material em papel contendo os exercícios da intervenção. Relatório dessa intervenção encontra-se no Apêndice D. O trabalho de intervenção realizado ajudou a superar algumas dificuldades, na medida em que as explicações dadas em sala de aula complementaram as atividades com o conteúdo de Fundamentos de Cálculo que vinha sido trabalhado pela professora responsável. Mesmo assim, a intervenção realizada em apenas uma aula antes da aplicação da sequência não foi suficiente para solucionar as dúvidas apresentadas pelos alunos.

6 - SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE FUNÇÃO

A Sequência Didática foi elaborada com base nos pressupostos do conceito da Zona de Desenvolvimento (ZDP) de Vigotsky (1979). Nesse sentido, é entendida como um instrumento mediador entre os conhecimentos já internalizados pelos alunos e o potencial nível de conhecimento a ser atingido gradativamente por intermédio da resolução das atividades propostas. Outra base é a Teoria das Situações Didáticas desenvolvidas por Brousseau (1986), que orientou os procedimentos próprios da Situação Adidática e ainda pela fundamentação teórico-metodológica da Engenharia Didática. (ARTIGUE, 1988) Esses pressupostos estão explicitados no capitulo 3.

A sequência foi elaborada com seis atividades, que representam três modalidades diferentes de trabalho com o cálculo da taxa de variação média: tabela, gráfico e função. Para cada atividade é apresentada uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori* para que haja um confronto dessas análises na apresentação dos resultados nesse momento. Apresenta-se cada atividade da sequência na íntegra e posteriormente sua análise *a priori*.

Conforme exposto em capítulo específico, a análise a *priori* apresenta duas fases: uma descritiva que analisa o desafio que a situação provoca no sujeito participante e as ações, escolhas e decisões que a realização da atividade vai exigir dele; outra de previsão de comportamentos possíveis como elemento de controle que tem a função de assegurar que os comportamentos ocorridos são resultados da aprendizagem prevista para a atividade.

6.1 – Análise a priori das Atividades da Sequência Didática

Atividade 1

A tabela indica a posição que um móvel ocupa em função do tempo.

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Posição (Km)	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210

Responda às questões a seguir com base na tabela:

1) Se Δt é a variação do tempo, qual é o Δt entre 1h e 2h? E entre 6h e 7h?
2) Se ΔS é a variação da posição, qual o ΔS entre 10 e 40 e entre 360 e 490?
3) A posição está variando linearmente com o tempo?

4) Calcule o $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ entre 1 h e 2h e depois entre 6h e 7h. O que você conclui?
5) A posição do móvel cresce mais nas primeiras 5 horas ou nas 5 horas posteriores?
6) Qual foi a variação média da posição em função do tempo no intervalo de 0 a 11h?
7) A posição do móvel sempre aumentou?
8) O acréscimo da posição do móvel, hora a hora, sempre aumentou?

Análise a priori da Atividade 1

Na primeira atividade da sequência didática, foi apresentada uma tabela que descreve a posição de um móvel em função do tempo decorrido. Essa atividade está direcionada para o aprendizado do cálculo de intervalos, para análise do crescimento ou decrescimento de grandezas relacionadas uma com a outra, cálculo de razões que direcionarão os alunos para a compreensão da taxa de média da função apresentada.

Nessa atividade, foram apresentadas nove questões. Esperava-se que os alunos interpretassem os dados da tabela apresentada e calculassem as variações das grandezas com intervalos diferentes. Em seguida, o aluno deveria calcular a razão entre essas grandezas e apresentar uma conclusão a respeito dessas diferentes variações.

Na questão 1, é solicitado o cálculo da variação de dois intervalos de tempo, para verificar se o aluno compreende e calcula essas variações, ou seja, $\Delta t= 2-1= 1$ e $\Delta t= 7 -6 =1$.

A questão 2 solicita o cálculo da variação da posição. Nesse caso, o aluno deveria efetuar a diferença dos valores das posições apresentadas. Novamente era esperado que os alunos apresentassem as diferenças, ou seja, $\Delta S= 40-10=30$ e $\Delta S=490-360=130$.

A questão 3 é decorrente dos resultados obtidos nas questões 1 e 2 e exige do aluno a interpretação das diferenças dos intervalos calculados em cada uma delas e posteriormente da comparação dos resultados da questão 2 e formular a resposta da questão três.

A questão 4 refere-se ao cálculo de razão entre a variação da posição e a variação do tempo, variações já calculadas anteriormente. Para efetuar esse cálculo, o aluno deveria pegar os resultados já efetuados na questão de número dois e calcular a divisão pelos resultados também já efetuados na questão número um, ou seja $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{30}{1}=30$ e $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{130}{1}=130$. Posteriormente, o aluno deveria apresentar sua conclusão para os dois resultados obtidos nessa questão.

A questão 5 é muito importante para a nossa sequência, pois o aluno deveria verificar em que intervalo dos dois apresentados, o crescimento é maior. Em atividade posterior, o aluno faria uso do conhecimento proporcionado por essa atividade para o cálculo da taxa média de variação. Foi esperado que o aluno respondesse que é no segundo intervalo, apenas analisando os dados apresentado na tabela ou ainda que respondesse calculando a variação entre 0 e 5 horas e depois entre 6 e 11 horas e comparasse os resultados obtidos, ou seja entre 0 e 5 (250-0=250) e entre 6 e 11 (1210-250=960), concluindo que cresce mais nas 5 horas posteriores. A maioria deverá realizar a tarefa com facilidade.

Destaque também para a questão 6, para a qual o aluno deveria apresentar conhecimentos sobre variação média, que o ajudarão na resolução das questões das próximas atividades. Foi esperado que o aluno calculasse a variação média, usando apenas os valores extremos da tabela apresentada.

Na questão 7, o aluno deveria verificar se a posição do móvel sempre aumentou e foi esperado que ele verificasse os valores apresentados e concluísse que é uma função crescente, ou seja, em nenhum intervalo de tempo a posição diminui.

Na questão 8, o aluno deveria verificar se o acréscimo da posição também aumentou de hora em hora. O aluno deveria realizar alguns cálculos para chegar a uma conclusão, tais como: entre 0 e 1 hora o acréscimo da posição foi de (10-0=10), depois entre 1 e 2 horas foi de (40 -10 = 30) e assim por diante.

Atividade 2

A tabela indica a posição de um móvel em função do tempo.

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Posição (Km)	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210

Responda às questões abaixo com base na tabela.

Vamos chamar de **S** a posição do móvel, de **t** o instante em que o móvel encontra-se na posição S, de **ΔS** a variação da posição, e **Δt** o intervalo de tempo em que ocorreu a variação da posição.

1) No intervalo de tempo de t= 1h a t= 6h, determine o **Δt.**
2) Determine o **ΔS,** para o intervalo de tempo de t= 1h a t= 6h.

3) Qual é o valor da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, no intervalo de tempo de t= 1h a t= 6h?

4) Qual a unidade de medida da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$?

5) Calcular a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, entre 0 e 5 h e entre 5 h e 10 h.

6) Qual o significado dos sinais encontrados nas razões acima (questão 5)?

7) Você consegue relacionar com alguma grandeza física a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$?

8) Podemos chamar a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ como a taxa de variação média da posição S no intervalo de tempo **Δt**. Nesse caso, podemos chamar a taxa de variação média como velocidade média?

Análise a priori da Atividade 2

Na segunda atividade da sequência didática, foi apresentada a mesma tabela da primeira atividade, sendo que foram acrescentados os símbolos matemáticos para auxílio na resolução das questões dessa atividade. Essa atividade está direcionada novamente para o aprendizado do cálculo de intervalos e cálculo de razões que direcionarão os alunos para a compreensão de uma função.

Nas questões 1 e 2, novamente solicitamos os cálculos de intervalos de tempo e de espaço. Esperava-se que os alunos calculassem sem dificuldade, pois já tinha sido solicitado esse tipo de cálculo nas questões um e dois da atividade 1. Era esperado que os alunos já realizassem esses cálculos utilizando os símbolos Δt para variação do tempo e ΔS para variação do espaço, indicando assim $\Delta t=6-1=5h$ e $\Delta S=360-10= 350$ Km.

Na questão 3, foi solicitado o cálculo da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ assim como foi solicitado na questão número quatro da atividade 1, portanto novamente esperava-se que o cálculo ($\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{350}{5}= 70$ Km/h) fosse feito sem dificuldades.

Na questão 4, utilizando o raciocínio de razão, era esperado que o aluno apresentasse a unidade de medida da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, ou seja: Km/h, pois as unidades de medidas da posição e do tempo são apresentadas na tabela.

A questão 5 solicita novamente o cálculo de razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ de dois intervalos de tempos maiores, para que o aluno fizesse uma análise de sinais dessas razões na questão número seis. Os alunos deveriam realizar os cálculos: $\frac{250-0}{5-0}$=50 e $\frac{100-250}{5}$=150.

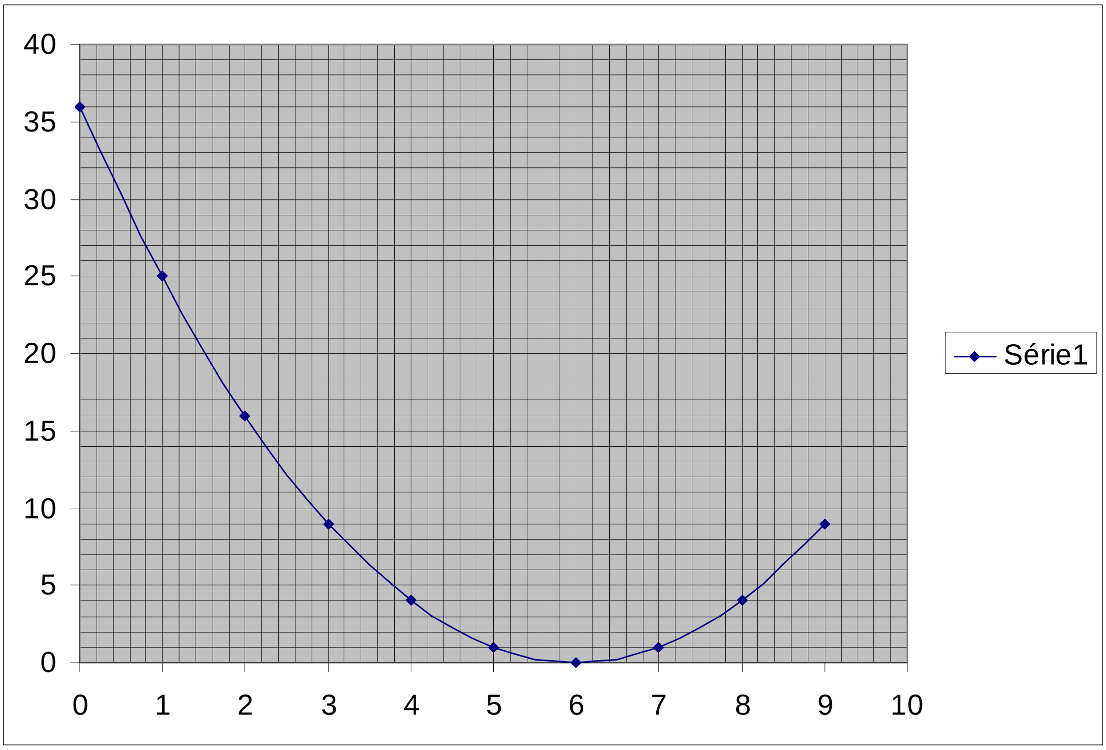
Questão 6, como os sinais das duas razões calculadas na questão 5 são positivos, era esperado que os alunos concluíssem que se trata de uma função crescente.

Na questão 7, solicitamos uma relação entre a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ com uma grandeza física (velocidade média) que é um tema estudado no ensino médio. Era esperado que o aluno retirasse as grandezas Km (espaço) e hora (tempo) da tabela apresentada no enunciado e concluísse que estão relacionadas com velocidade média.

Na questão 8, os alunos deveriam concluir que razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ é a taxa de variação média do móvel no intervalo de tempo Δt.

Atividade 3

O gráfico a seguir mostra a posição “S” de um móvel e o tempo “t” decorrido.



1) Esse gráfico que mostra a posição do móvel “S” é uma função do tempo “t”, ou seja, S=f(t)? Comente o tipo de relação.
2) Em qual intervalo de tempo a função é crescente? E decrescente?
3) Qual a variação da posição entre t= 1 seg e t= 6 seg? Por que o sinal é negativo?
4) Qual a taxa de variação média do espaço no intervalo de tempo t=1s e t=6s?
5) Qual a posição do móvel no instante 6 seg? Qual o significado ?
6) Qual a variação da posição entre t= 7 seg e t= 8 seg? Por que o sinal é positivo?
7) Determine a taxa de variação média da posição no intervalo de 7 a 8 seg.

Análise a priori da Atividade 3

Na atividade 3, foi apresentado um gráfico do espaço em função do tempo do movimento de um móvel que consta das atividades 1 e 2, só que na forma de tabela, por isso era esperado que os alunos conseguissem relacionar as atividades 1 e 2 com a atividade 3. Essa atividade está direcionada para interpretação gráfica de funções crescente e decrescente e os respectivos cálculos da taxa de variação. Explicita-se abaixo cada uma das questões da Atividade 3.

Na questão 1, os alunos deveriam verificar que o espaço varia de acordo com a variação do tempo e por se tratar de uma função quadrática, que é tema estudado no ensino médio, era esperado que os alunos respondessem que se trata de uma função do 2º grau (quadrática).

Na questão 2, os alunos deveriam citar os intervalos de tempo em que a função é crescente e os intervalos de tempo em que a função é decrescente. Esperava-se que as respostas fossem encontradas com facilidade pelos alunos, pois se exige apenas uma simples interpretação gráfica.

Na terceira questão, solicita-se o cálculo da variação da posição entre dois instantes. Nesse caso, o aluno deveria primeiramente determinar as posições para posteriormente calcular a variação. Acredita-se que a maioria realize os cálculos sem dificuldades, pois já realizaram cálculos similares nas atividades anteriores.

Na questão 4, solicita-se o cálculo da taxa de variação média para um determinado intervalo de tempo. Como essa questão está ligada diretamente com a questão anterior, esperava-se que o aluno se recordasse do cálculo feito e resolvesse a questão sem dificuldade.

Na questão 5, solicita-se a posição do móvel num determinado instante. É uma questão simples de interpretação gráfica, na qual o aluno deveria fazer uma leitura direta do gráfico apresentado. Esperava-se que ele relacionasse a posição zero encontrada com a origem das posições.

Na questão 6, novamente é solicitado o cálculo da variação entre dois instantes. Era esperado que o aluno calculasse sem dificuldade, pois ele retiraria os valores das posições que estão relacionados com os instantes 7 e 8 segundos diretamente do gráfico apresentado. Ao buscar essas informações e realizar o cálculo, o aluno tem condições de chegar à conclusão de que o sinal dessa variação é positivo, e que a função é crescente nesse intervalo.

Por último, na questão 7, solicita-se o cálculo da taxa de variação média no mesmo intervalo de tempo da questão anterior. O aluno deveria realizar o cálculo sem dificuldades, pois os valores já foram obtidos na questão 6 e ele deveria buscá-los e depois apenas calcular o quociente entre esses valores.

Atividade 4

A posição S de um móvel varia em função do tempo segundo a função $S = 36 - 12.t + t^2$ (unidades do Sistema Internacional).

Determinar a taxa de variação média da posição, ou seja, a velocidade média quando S variar no intervalo:

1) t = 1s a t = 2s.
2) t= 1s a t= 1,01 s.
3) t= 1s a t= 1,001 s.
4) t= 1s a t= 1,0001 s.
5) Para você, qual é a taxa de variação no instante t = 1s? Explique sua resposta.
6) Qual é a velocidade no instante t = 1s?

Análise a priori da Atividade 4

Na atividade 4, foi apresentada uma função horária do espaço em função do tempo do Movimento Uniformemente Variado da Física com o objetivo de calcular a taxa de variação média; a sequência interna das questões foi reduzindo cada vez mais o intervalo de tempo no intuito de chegar a um valor próximo da velocidade instantânea. O objetivo principal dessa atividade é mostrar que o estudo da taxa de variação média levará o aluno a compreender o significado de velocidade instantânea.

Com o auxílio de uma calculadora, esperava-se que o aluno calculasse a taxa de variação média para os intervalos de tempo apresentados nas questões 1, 2, 3 e 4. A realização desses cálculos permitiria que o aluno percebesse que o valor da taxa de variação está se aproximando cada vez mais do valor da velocidade no instante 1 segundo, o que já possibilita conjecturar a resposta para a questão 5.

A questão 5 solicita o valor da taxa de variação média no instante 1 segundo. Conforme explicitado acima, o aluno deveria relacionar essa questão com as anteriores e poderia chegar à conclusão de que a taxa de variação é a velocidade instantânea quando o intervalo de tempo Δt tender a zero.

Na questão 6, solicita-se o cálculo da velocidade no instante 1 segundo. Esperava-se que o aluno, após realização das questões de 1 a 5, relacionasse o resultado obtido na questão 5.

Atividade 5

A potência elétrica P fornecida a um condutor, em Watts (W), em função da intensidade da corrente elétrica i, em Ampères (A), é dada por $P(i) = 3i^2 + 2i$. Determinar:

1) a potência elétrica fornecida ao condutor quando a intensidade da corrente for 2A.
2) a taxa de variação média da potência elétrica fornecida ao condutor quando i variar de i = 2A a i = 2,1 A.
3) a taxa de variação média da potência elétrica fornecida ao condutor quando i variar de i = 2A a i = 2,01 A.
4) a taxa de variação média da potência elétrica fornecida ao condutor quando i variar de i = 2A a i = 2,001 A.
5) a taxa de variação da potência elétrica no instante em que i = 2A.

Análise a priori da Atividade 5

Essa atividade é semelhante à atividade 4, apenas mantém o foco sobre a taxa de variação média, mas agora explora-se uma nova função, em que a potência varia com a intensidade da corrente elétrica. O objetivo principal dessa atividade é mostrar para o aluno que o estudo da taxa de variação média é importante também para compreensão de outros temas da Física e não somente para a cinemática.

È esperado que essa atividade seja realizada com auxílio de calculadora e que os alunos não apresentem maiores dificuldades, pois a atividade traz questões muito semelhantes às solicitadas na atividade 5, inclusive na progressão do nível de dificuldade entre a primeira e quinta questões.

Atividade 6

Seja a função f(x) = $x^2 + 1$.

1) Esboce o gráfico de f(x).
2) Determine a variação da função no intervalo de x = 2 a x = 3.
3) Determine a taxa de variação média da função no intervalo de x = 2 a x = 3.
4) Trace a reta que passa pelos pontos de abscissas x =2 e x = 3.
5) Calcule a taxa de variação média da função no intervalo x = 2 e x = 2,1.
6) Calcule a taxa de variação média da função no intervalo x = 2 e x = 2,01.
7) Calcule a taxa de variação média da função no intervalo x = 2 e x = 2,0001.
8) Qual é a taxa de variação da função no ponto x = 2?

Análise a priori da Atividade 6

Atividade 6 encerra a sequência didática de taxa de variação média, cujo objetivo é mostrar que se pode utilizar a taxa de variação média não somente na Matemática, mas na Física, na Química, ou em outras áreas. A atividade apresenta uma função genérica, na qual f(x) varia de acordo com o valor de x. Como nas atividades 5 e 6, há necessidade do auxílio da calculadora. A sequência das questões dessa atividade segue a mesma progressão de raciocínio das atividades 4 e 5. Considerando o exposto, esperava-se que os alunos não tivessem dificuldade para a realização.

6.2 - Análise *a posteriori* das atividades da Sequência Didática

Na experimentação tradicional, é hábito recorrer-se à avaliação externa de grupos experimentais e grupos de controle para verificar a validade de um estudo. Na Engenharia Didática, "a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori." (ARTIGUE, 1996, p. 197) O confronto das análises, *a priori* e *a posteriori* busca investigar o que foi considerado nas hipóteses e o que a experimentação mostrou de distorções e que pode alterar a validade do processo.

Atividade 1

Tabela 41 - Acertos, erros e questões em branco

Questão	Acertos	%	Erros	%	Em branco	%
1ª $\Delta t1$	12	80	3	20	0	0
$\Delta t2$	12	80	3	20	0	0
2ª $\Delta S1$	13	86,7	2	13,3	0	0
$\Delta S2$	13	86,7	2	13,3	0	0
3ª	4	26,7	9	60	2	13,3
4ª entre 1 e 2h	8	53,3	5	33,3	2	13,3
Entre 6 e 7h	8	53,3	5	33,3	2	13,3
conclusão	1	6,7	3	20	11	73,3
5ª	13	86,7	1	6,7	1	6,7
6ª	6	40	5	33,3	4	26,7
7ª	14	93,3	0	0	1	6,7
8ª	12	80	1	6,7	2	13,3
TOTAIS	116	64.4	39	21.7	25	13.9

1ª Questão

A primeira questão solicitava o cálculo de dois intervalos de tempo distintos e o esperado era que os alunos chegassem aos resultados sem maiores dificuldades. De fato, apenas três duplas das quinze que realizaram essa atividade erraram e cometeram o mesmo erro, fazendo confusão entre variação do tempo e variação da posição, embora estivesse bem explícito na questão que era variação do tempo. Como previsto na análise *a priori*, os alunos chegaram ao resultado sem dificuldade.

2ª Questão

Na segunda questão, solicitava-se o cálculo da variação da posição para dois intervalos distintos e apenas duas duplas erraram, sendo que uma dupla apresentou a seguinte resposta: "a variação entre 10 e 40 é 3 horas" e a variação entre 360 e 490 foi " a variação entre 6 e 7 é igual a 12 horas e 60 seg." A outra dupla calculou a variação do tempo Δt ao invés da variação da posição ΔS. Também previsto na análise *a priori* que os alunos não apresentariam dificuldades para chegar ao resultado.

3ª Questão

A questão solicitava se a posição estava variando linearmente com o tempo e apenas quatro duplas responderam corretamente, ou seja, **não.** Uma dessas quatro duplas que acertaram a resposta justificou que se tratava de uma função quadrática. Duas duplas deixaram em branco e nove duplas erraram a resposta. Os alunos tiveram dificuldades para interpretar a questão ou não sabiam responder o que era linear. Como foi previsto, os alunos não compararam os resultados obtidos nas questões 1 e 2 para verificar de que não se tratava de uma variação linear.

4ª Questão

A quarta questão solicitava os cálculos das razões entre ΔS e Δt para os valores já encontrados na primeira e segunda questão, ou seja, nos intervalos de tempo entre 1h e 2h e depois entre 6h e 7h e também solicitava uma conclusão dos resultados encontrados. Sete duplas responderam corretamente efetuando os cálculos, sendo que apenas uma dupla acertou a conclusão, cinco duplas erraram totalmente, duas duplas deixaram totalmente em branco. É possível verificar a dificuldade que os alunos encontram quando é necessário fazer uma interpretação dos cálculos realizados.

5ª Questão

A quinta questão solicitava a análise do crescimento da posição em dois intervalos de tempo distintos. Treze duplas responderam corretamente, uma dupla errou e uma deixou em branco. Era uma questão de fácil resposta, pois bastava o aluno analisar os valores apresentados na tabela para responder sem efetuar nenhum cálculo. Como previsto na análise *a priori,* a maioria, ou seja, 13 duplas responderam corretamente.

6ª Questão

A sexta questão solicitava a variação média da posição no intervalo de 0 a 11 h (extremos da tabela). Seis duplas apresentaram os cálculos corretamente, cinco duplas erraram e quatro duplas deixaram a questão em branco. Das nove duplas que erraram ou deixaram em branco, é possível verificar que esses alunos não sabiam interpretar o significado de média.

7ª Questão

A sétima questão solicitava apenas uma análise da tabela para saber se a posição do móvel sempre aumentou, ou seja, crescente. Era a resposta mais fácil dessa atividade, tanto é que apenas uma dupla deixou a questão em branco e as demais responderam corretamente.

Questão 8

Essa questão também solicitava uma análise da tabela para verificar se o acréscimo de hora em hora sempre aumentava. Uma dupla errou e duas duplas deixaram em branco. Destaque para a resposta de uma dupla: "Sim, não se repetiu e nem reduziu em nenhum instante" demonstra que a dupla interpretou os dados da tabela corretamente.

Atividade 2

Tabela 42 - Acertos, erros e questões em branco .

Questão	Acertos	%	Erros	%	Em branco	%
1ª Δt	13	86,7	0	0	2	13,3
2ª ΔS	13	86,7	0	0	2	13,3
3ª	10	66,7	2	13,3	3	20
4ª	9	60	1	6,7	5	33,3
5ª 0 a 5	8	53,3	2	13,3	5	33,3
5 a 10	6	40	2	13,3	7	46,7
6ª	1	6,7	8	53,3	6	40
7ª	6	40	1	6,7	8	53,3
8ª	10	66,7	1	6,7	4	26,7
TOTAIS	76	56.3	17	12.6	42	31.1

Na atividade 2, foi apresentada a mesma tabela da atividade 1.

1ª Questão

Foram dados dois instantes t= 1h e t= 6h e era solicitado para calcular a variação do tempo, ou seja, o Δt. Como a questão envolvia um simples cálculo de subtração, era esperado que alunos resolvessem sem dificuldades como previsto na análise *a priori*, mas duas deixaram em branco e treze acertaram o resultado.

2ª Questão

Na segunda questão, foi solicitado o cálculo da variação da posição, ou seja, o ΔS para o intervalo de tempo da questão anterior e que se pode considerar também como um cálculo simples de subtração de dois valores. As mesmas duplas que deixaram em branco a 1ª questão também deixaram em branco essa questão e as demais acertaram, não apresentando dificuldades na resolução.

3ª Questão

Na terceira questão, era solicitado o valor da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Como os valores já foram calculados nas questões 1 e 2, era esperado que as duplas calculassem com certa facilidade, pois bastava tomar o resultado da questão 2 e dividir pelo resultado encontrado na questão 1; no entanto, três duplas deixaram em branco e duas duplas erraram, sendo que uma das duplas apresentou o resultado dividindo S/t, ou seja, 10/1 =10 e 360/6=60 e depois subtraiu 10-60=50. A outra dupla que errou também realizou apenas os cálculos: S/t, ou seja, 10/1 =10 e 360/6=60.

4ª Questão

A quarta questão solicitava a unidade de medida da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ que era facilmente retirada da tabela que apresentava a posição em Km e o tempo em hora. Nove duplas acertaram, 5 deixaram em branco e uma dupla errou, colocando um resultado totalmente inesperado $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$.

5ª Questão

Na quinta questão, era solicitado o cálculo da razão em dois intervalos de tempo distintos. No primeiro intervalo de tempo, oito duplas acertaram, cinco duplas deixaram em branco e 2 duplas erraram, não apresentando nenhum cálculo. No segundo intervalo, das oito duplas que acertaram o primeiro intervalo, uma deixou em branco e outra errou o cálculo, apresentando o cálculo de 1000/10= 100, não considerando os intervalos solicitados.

6ª Questão

Na sexta questão, solicitava-se apenas uma interpretação dos sinais encontrados nas razões já calculadas na questão cinco e surpreendentemente nenhuma dupla apresentou o resultado corretamente, pois bastava responder que se tratava de uma função crescente, pois nos dois cálculos os alunos deveriam encontrar resultados positivos.

7ª Questão

A sétima questão solicitava para relacionar a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ com alguma grandeza da Física, ou seja, velocidade. Seis duplas conseguiram relacionar, oito duplas deixaram em branco e uma dupla errou, colocando a seguinte resposta: "relaciona metros por segundos (m/s)", e acredita-se que os alunos soubessem o que é velocidade, mas não citaram a grandeza.

8ª Questão

Na oitava questão, aparece pela primeira vez o termo taxa de variação média. Foi solicitada uma comparação da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, chamada taxa de variação média com velocidade média termo utilizado na Física. Dez duplas conseguiram relacionar velocidade média com a taxa de variação média, quatro duplas deixaram em branco e apenas uma dupla respondeu que não.

Atividade 3

Tabela 43 - Acertos, erros e questões em branco – Atividade 3.

Atividade 3

Questão	Acertos	%	Erros	%	Em branco	%
1ª gráfico	3	20	2	13,3	10	66,7
comentário	5	33,3	0	0	10	66,7
2ª crescente	4	26,7	9	60	2	13,3
decrescente	6	40	7	46,7	2	13,3
3ª ΔS	6	40	5	33,3	4	26,7
Justificativa (-)	4	26,7	7	46,7	4	26,7
4ª	7	46,7	6	40	2	13,3
5ª S(6)	7	46,7	4	26,7	4	26,7
justificativa	4	26,7	4	26,7	7	46,7
6ª ΔS	7	46,7	4	26,7	4	26,7
Justificativa (+)	8	53,3	3	20	4	26,7
7ª	7	46,7	5	33,3	3	33,3
TOTAIS	68	37.8	56	31.1	56	31.1

Na atividade três, foi apresentado um gráfico da posição em função do tempo, diferente das duas primeiras atividades que apresentavam no enunciado tabelas que também mostravam a variação da posição em função do tempo.

1ª Questão

Solicitava para o aluno comentar que tipo de relação existe entre a posição “S” e o tempo “t”. Era esperado que eles respondessem que se tratava de uma função quadrática, ou seja, uma função do 2º grau, pois o gráfico apresentado é uma parábola que faz parte do conhecimento desses alunos, conforme verificado no teste diagnóstico. Das quinze duplas participantes dessa atividade, apenas três duplas apresentaram uma resposta satisfatória: Uma dupla respondeu como uma interpretação da física “no intervalo de 0 a 6 segundos, existe uma queda na velocidade e após 6 segundos um aumento.” A segunda dupla apresentou a resposta: “É uma função quadrática”. A outra dupla que apresentou uma resposta também considerada correta escreveu que se tratava de uma função do 2 º grau, mas errou escrevendo “S = f(t)= $-t^2$

+ 36”. Dez duplas deixaram a questão em branco, o que caracteriza a dificuldade de escrever dos alunos dos cursos de Exatas. Duas duplas erraram a resposta.

2ª Questão

O gráfico apresentado nessa atividade apresenta um intervalo de tempo onde a função é crescente e outro intervalo de tempo onde ela é decrescente. Quatro duplas acertaram os dois intervalos; duas duplas acertaram o intervalo onde a função é crescente, mas erraram onde é decrescente e as demais deixaram em branco ou erraram. Destaque para o erro de cinco duplas que confundiram espaço e tempo, colocando decrescente no intervalo de 36 (medida de posição) e 6 (medida de tempo).

3ª Questão

Essa questão solicitava a variação da posição entre o intervalo de tempo de 1 a 6 segundos e a justificativa do sinal negativo. Seis duplas calcularam corretamente a variação da posição nesse intervalo de tempo, mas dessas seis duplas, apenas três acertaram a justificativa. Cinco duplas deixaram a justificativa em branco, cinco duplas erraram e uma dupla respondeu que não sabia.

4ª Questão

Nessa questão era solicitado o cálculo da taxa de variação média no intervalo de 1 a 6 segundos. Metade das duplas acertou, ou seja, sete duplas responderam corretamente. Cinco duplas erraram e duas deixaram a resposta em branco.

5ª Questão

A quinta questão pedia a posição do móvel no instante 6 segundos e o significado dessa posição (quando o móvel passa pela origem do referencial para e inverte o sentido do movimento). Sete duplas acertaram a posição no instante 6 segundos, quatro duplas erraram e quatro deixaram em branco. Apenas quatro duplas acertaram o significado dessa posição, sendo que duas duplas citaram que o móvel estava parado e uma dupla escreveu que “é o ponto de transição da função decrescente para crescente”.

6ª Questão

Na sexta questão, solicitava-se a variação da posição entre os instantes 7 e 8 segundos e a justificativa do sinal positivo. Sete duplas acertaram o cálculo da variação da posição sendo que dessas sete duplas, cinco acertaram a justificativa.

7ª Questão

Solicitava o cálculo da taxa de variação média no intervalo de tempo de 7 a 8 segundos. Sete duplas acertaram, cinco duplas erraram e três duplas deixaram em branco.
O fracasso da grande maioria dos alunos para as questões dessa atividade pode estar relacionado à dificuldade de trabalhar o cálculo por meio de interpretação gráfica. Essa dificuldade já havia sido constatada nos resultados do teste diagnóstico.

Atividade 4

Tabela 44 - Acertos, erros e questões em branco – Atividade 4.

Atividade 4

Questão	Acertos	%	Erros	%	Em branco	%
1ª	12	92,3	1	7,7	0	0
2ª	11	84,6	2	15,4	0	0
3ª	11	84,6	2	15,4	0	0
4ª	11	84,6	2	15,4	0	0
5ª	5	38,5	5	38,5	3	23
6ª	4	30,8	6	46,1	3	23
TOTAIS	54	69.2	18	23.1	6	7.7

Na atividade 4, foi apresentada uma função da variação do espaço em função do tempo do movimento uniformemente variado da física. Foi solicitado o cálculo da taxa de variação média nas quatro primeiras questões, sendo que a cada questão o intervalo de tempo aproximava cada vez mais de 1. Nessas quatro questões, as duplas participantes não apresentaram dificuldades para a realização dos cálculos, pois foi permitido o uso da calculadora; mesmo assim, duas duplas efetuaram erroneamente os cálculos solicitados.

Na questão 5, solicitava-se a taxa de variação no instante 1 segundo, e das 11 duplas que acertaram, as quatro primeiras deveriam responder corretamente, mas apenas 5 duplas acertaram.

Na sexta questão, pedia-se a velocidade no instante 1 segundo, que seria a interpretação final da atividade, ou seja, um xeque-mate, mas apenas quatro duplas responderam corretamente.

Nessa atividade que trabalha a função polinomial, os alunos não apresentaram as dificuldades verificadas na atividade de interpretação de gráfico. Pelo contrário, obtiveram expressivo sucesso. Pode-se levantar como hipótese que os alunos perceberam com clareza, logo na 1ª questão da atividade 4, o mecanismo de resolução.

Atividade 5

Tabela 45 - Acertos, erros e questões em branco.
Atividade 5

Questão	Acertos	%	Erros	%	Em branco	%
1ª	10	100	0	0	0	0
2ª	9	90	1	10	0	0
3ª	9	90	1	10	0	0
4ª	9	90	1	10	0	0
5ª	7	70	1	10	2	20
TOTAIS	44	88	4	8	2	4

Na atividade 5, que constava de apenas 5 questões também foi solicitado o cálculo da taxa de variação média nas quatro primeiras questões, sendo que a cada questão o intervalo de tempo aproximava cada vez mais de 2. Nessas quatro questões, as duplas participantes não apresentaram dificuldades para a realização dos cálculos, pois novamente usaram calculadoras, sendo que uma dupla efetuou erroneamente os cálculos solicitados.

Pode-se explicar o sucesso dessa atividade pela semelhança que tem com a atividade 4, sendo que naquela, solicitava-se a variação da posição em relação ao tempo, enquanto a atividade 5 solicitava a variação da potência elétrica em relação à corrente elétrica.

Atividade 6

Tabela 46 - Acertos, erros e questões em branco – Atividade 6.

Questão	Acertos	%	Erros	%	Em branco	%
1ª	7	100	0	0	0	0
2ª	7	100	0	0	0	0
3ª	7	100	0	0	0	0
4ª	7	100	0	0	0	0
5ª	7	100	0	0	0	0
TOTAIS	35	100	0	0	0	0

Da última atividade, apenas sete duplas participaram, mostrando assim um grande desinteresse por parte dos demais alunos com o compromisso de uma aprendizagem significativa, pois as atividades não iriam trazer nenhum benefício de nota e infelizmente quando colocamos alguma atividade ou exercícios para eles resolverem, o primeiro questionamento era se iria valer nota. Além disso, é preciso considerar que a realização dessa atividade pelos alunos ocorreu após o intervalo para a 2ª etapa das aulas naquele dia letivo. Esse também pode ter sido um fator relevante.

Por outro lado, duas duplas participantes demonstraram grande interesse na realização das atividades. Essas duplas destacaram-se pelo número de acertos em todas as atividades anteriores. Foi muito gratificante a participação dessas sete duplas que realizaram a atividade 6, pois conseguiram completar com êxito a resolução dos exercícios. Essas duplas puderam construir ao longo das atividades da sequência o conceito de taxa de variação média.

A síntese dos resultados gerais, em termos de acertos obtidos, mostra que os alunos tiveram alguma dificuldade com atividades que usavam tabelas: Atividade 1 (64.4%) e 2 (56.3%), e que tiveram muita dificuldade na atividade que envolvia interpretação de gráficos: Atividade 3 (37.8%)); no entanto, obtiveram significativo sucesso nas atividades que envolviam a utilização da função polinomial: Atividades 4 (69.2%), Atividade 5 (88%) e Atividade 6 (100%). Evidenciou-se, portanto, a existência de uma distância significativa entre os conteúdos já dominados pelos alunos e os conteúdos de cálculo da sequência didática que envolviam interpretação gráfica. Essa distância não foi detectada pelo Teste Diagnóstico aplicado.

6.3 - Discussão dos resultados da Sequência Didática

Uma discussão mais pormenorizada dos resultados obtidos na aplicação da Sequência Didática foi realizada com base no desempenho de 7 duplas das 15 que participaram das atividades. A escolha dessas 7 duplas é decorrente do fato de que foram essas as que realizaram todas as seis atividades da sequência. Esse critério foi considerado relevante, porque permite uma completa análise da sequência proposta.

Atividade 1

Considerando especificamente os resultados obtidos pelas duplas selecionadas, destaca-se que apenas três duplas conseguiram identificar que não se tratava de uma variação linear (questão 3), pois perceberam que o valor da variação entre 10 Km e 40 km era diferente do valor entre 360 Km e 490 km, embora a variação do tempo para os dois casos fosse de 1 hora. Foi possível notar também a dificuldade do aluno em comparar e interpretar os resultados obtidos quando resolvem determinado problema, como na questão 4 que pede para ele tirar uma conclusão dos resultados obtidos. Duas duplas deixaram em branco, ou seja, não chegaram a nenhuma conclusão dos resultados obtidos e 2 duplas erraram o resultado. Para o aluno, é mais importante chegar ao resultado, o que faz buscar soluções mais operatórias do que interpretativas. Meyer (2003), com base em literatura específica, aponta que os alunos obtêm mais sucesso em tarefas com os aspectos operatórios do cálculo do que com tarefas sobre os aspectos conceituais do cálculo.

Atividade 2

Uma dupla (6) deixou em branco seis questões dessa atividade.

Em se tratando do cálculo de razões, é possível constatar as dificuldades encontradas por três duplas que não conseguiram responder as questões de 3, 4 e 5, pois não conseguiram interpretar o símbolo Δ (variação). Embora as questões 4 e 7 estejam relacionadas, pois sabendo que a unidade de medida era Km/h então não seria difícil concluir que a grandeza física era a velocidade. Podemos citar aqui algumas respostas da questão 7 de algumas duplas: “Sim”; “metros por segundo”. Mais da metade dos alunos (53,3 %) deixou a questão sete em branco. Godoy (2004), em estudo sobre registro de representação simbólica, já observava as dificuldades dos alunos em trabalhar com esse tipo de problema.

Atividade 3

Nessa atividade, as questões estavam baseadas num gráfico do espaço em função tempo (função do 2º grau) e, logo na primeira questão, seis duplas das sete escolhidas não conseguiram comentar o tipo de relação entre as grandezas. Nessa atividade, é possível notar as dificuldades que os alunos tiveram para retirar os valores que as questões de 3 a 7 do gráfico apresentavam. Notamos também dificuldades em identificar se o trecho da função era crescente (de 6 s em diante) ou decrescente (de 0 a 6 s). Estudos com alunos ingressantes na disciplina de cálculo podem auxiliar no entendimento desses resultados. Villarreal (1999) constatou complicações quando representações gráficas estavam contidas no gráfico de taxa de variação. Também Cury (2003) aponta as dificuldades da disciplina de cálculo em conteúdos como gráfico de funções, cálculo de limites, derivadas e integrais. Godoy (2004) diagnosticou e analisou, com base na teoria dos Registros da Representação de Raymond Durval, e concluiu que a maior dificuldade dos alunos estava relacionada ao uso de gráficos (registro figural).

Atividade 4

Na atividade 4, foi apresentada a forma algébrica da variação do espaço em função do tempo e foi solicitado nas questões de 1 a 4 para determinar a taxa de variação média da posição para dois instantes dados, sendo que o intervalo entre os dois instantes estava tendendo a zero e as sete duplas acertaram os resultados. Foi solicitado, na questão 5, a taxa de variação no instante 1, para o qual estava tendendo o valor e a sua explicação, e quatro duplas responderam adequadamente (38,5%); duas duplas deixaram em branco e uma dupla errou, colocando – 9 m/s. O mesmo tipo de dificuldade parece ter sido encontrada pelos alunos na questão 6 (30,8% de acertos), que pedia a velocidade no instante t= 1s e portanto exigia o mesmo tipo de raciocínio. Cassol (1997), em sua pesquisa, encontrou resultados que mostraram que os alunos compreendem melhor o conceito de derivada como taxa de variação.

As dificuldades dos alunos encontradas e apontadas por Cassol são decorrentes da falta de conhecimento necessário sobre Funções.

Atividade 5

Na atividade 5, que é semelhante à atividade 4, foi apresentada uma relação entre a potência elétrica fornecida a um condutor em função da corrente elétrica para mostrar aos alunos que existem outras aplicações de funções. Nessa atividade, obtivemos um resultado surpreendente das duplas selecionadas, ou seja, apenas duas duplas deixaram 1 questão em branco (questão 5). Todos acertaram as demais questões, pois já sabiam o que calcular.

Atividade 6

Na atividade 6, apresentamos uma função genérica $f(x) = x^2 + 1$, para fazermos um fechamento das atividades, com o intuito de mostrar aos alunos a importância dos estudos da taxa de variação média, generalizando apenas na última atividade. Godoy (2004), em seu trabalho com alunos que já passaram por um curso de Cálculo, compara questões similares aplicadas nos testes realizados por ele e conclui que os alunos puderam, mais facilmente, interpretar o significado de derivada como taxa de variação instantânea, o que pode justificar o sucesso das resoluções das questões das atividades 5 e 6 de nosso trabalho.

7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da sequência didática proposta foi o de introduzir o conceito de taxa de variação média de uma função com o uso de tabelas, gráficos e funções polinomiais. As 6 atividades da sequência foram elaboradas em conformidade com o objetivo da sequência. Foram constituídas de questões familiares mais próximas do cotidiano para que os alunos envolvidos tivessem maior possibilidade de construir o conhecimento. As questões envolveram situações-problema em variados contextos.

Em síntese, os resultados decorrentes das resoluções das atividades da sequência didática de taxa de variação média indicam três pontos para destaque. (1) Para as atividades que envolviam o domínio do cálculo com a utilização de Tabela, os alunos demonstraram dificuldades no entendimento de função linear; na interpretação dos cálculos realizados; na interpretação o significado da variação média; na realização do cálculo de razões; na interpretação de sinais existentes nas razões realizadas. Mesmo com essas dificuldades, os alunos tiveram, em média, 64,4% de acertos para a primeira atividade e 56,3% de acertos para a segunda atividade. (2) Para as atividades que envolviam o domínio do cálculo com a utilização de gráfico, os alunos demonstraram dificuldades na interpretação gráfica da parábola, função de 2º grau (já solicitada no Teste Diagnóstico); na identificação das funções crescente e decrescente (também abordada no Teste Diagnóstico, e que não apresentou essa dificuldade); no cálculo da variação da posição entre o intervalo de tempo; no cálculo da posição de um móvel no instante determinado. Destaca-se que as atividades de interpretação gráfica foram as que mais evidenciaram as dificuldades de cálculo dos alunos. (3) Para as atividades que envolviam o domínio do cálculo com a utilização da função polinomial, os alunos demonstraram maior competência nas resoluções. No entanto, na Atividade 4, que envolvia problema da Física, ainda foram constatadas dificuldades para calcular a variação no instante 1 e a velocidade no instante 1. Nas atividades 5 e 6, os alunos não apresentaram dificuldades na utilização da função polinomial.

Considerando que os alunos tiveram muita dificuldade na resolução da atividade 3 que envolvia gráfico e tiveram sucesso na quase totalidade das questões das atividades 4, 5 e 6 que envolviam funções polinomiais, poder-se-ia conjecturar que as atividades com gráfico deveriam ter sido colocadas no final da sequência em respeito à ideia de caminhar do mais fácil para o mais difícil. No entanto, essa possibilidade deve ser descartada, porque a sequência não poderia antecipar as atividades que buscavam desenvolver a percepção de que a redução cada vez maior do intervalo de variação permite chegar a um valor muito próximo da velocidade instantânea ou da potência instantânea ou ainda de outra grandeza da Matemática, como foi trabalhado nas atividades 4, 5 e 6.

A abordagem socioconstrutivista no entendimento dos processos de aprendizagem evidencia a importância dos instrumentos utilizados no ensino como possibilidade de mediação na construção de novos conhecimentos. A sequência didática, presente nesse estudo, insere-se nessa concepção, pois é elaborada com base em conhecimentos já dominados pelo aluno e estruturada em torno de questões que permitem a construção gradativa do conhecimento, transformando-se em instrumento mediador, que tem como finalidade ajudar o aluno a ir além do que seria capaz sozinho em um processo que incrementa sua capacidade de compreensão e de atuação autônoma. Esse foi o parâmetro que norteou a elaboração de todas as questões da sequência.

Os resultados mostraram que, na atividade 3, grande parte dos alunos não avançou na construção do conhecimento de taxa de variação média por meio de problemas que envolviam gráficos. Ressalta-se que esse tipo de dificuldade foi significativamente apontada na revisão da literatura. Os resultados do Teste Diagnóstico para a turma da 1ª série do curso de Licenciatura em Matemática nas questões (1 a 5) que envolviam gráficos não mostraram que os alunos teriam tanta dificuldade como a constatada na aplicação da sequência. De qualquer modo, ficou evidente a existência de uma distância muito grande entre os conteúdos já dominados pelos alunos e os conteúdos de cálculos explorados na resolução da atividade 3 da Sequência Didática.

Ao considerarmos o objetivo geral do estudo de estruturar, aplicar, analisar e discutir uma sequência didática de taxa de variação média para alunos da 1ª série de Licenciatura em Matemática, baseado na hipótese de que a aprendizagem poderia ser significativamente ampliada em relação ao conhecimento de cálculo já dominado pelo aluno – e que foi avaliado pelo Teste Diagnóstico – por meio do planejamento de atividades sequenciais e progressivas para o entendimento de taxa de variação média e de que, com esse conjunto de ações, os alunos poderiam construir conhecimentos sobre taxa de variação média com o uso de tabelas, gráficos e funções polinomiais, é possível afirmar que o objetivo foi parcialmente atingido, pois os alunos demonstraram domínio do conceito de taxa de variação média de uma função com o uso de tabelas e de funções polinomiais. Com isso, puderam constatar que o valor da taxa indica o comportamento de uma função em um determinado intervalo.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, V. J. ; COSTA, N. M. L.. **Investigações sobre processos de formação de professores que ensinam matemática:** análise de dissertações em educação matemática da última década. Disponível em: <http://www.uniban.br/pesquisa/iniciacao_cientifica/.../investigacoes_decada.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2011.

ARAÚJO, R.; MOREIRA, L.F.N. Monitoria da Disciplina de Cálculo**.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 33, 2005, Campina Grande. ***Anais***... Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. recherches em didactique dês mathématiques**.** v.9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, J. (Dir) **Didática das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 193-217.

BACHELARD, G.**A. formação do espírito científico:** contribuições para a psicanálise do conhecimento**.** Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALDINO, R.R.; CABRAL, T.C.B. **Os quatro discursos de Lacan e a Educação Matemática. Quadrante** , Lisboa, v. 6, n. 2, p. 1-24, 1997.

BALDINO, R.R. Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro? **Temas e Debates**, Blumenau, v. 6, p. 5-21, 1995.

BARBOSA, A.C.C.; CONCORDIDO, C. F. R.; CARVALHAES, C.G. Uma proposta de Pré-Cálculo com ensino colaborativo**.** In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA , 2004, Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: UERJ, 2004. CD-ROM.

BARUFI, M.C.B. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999.184f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo , São Paulo, 1999.

BITAR, M. A noção de vetor no ensino secundário francês: um exemplo de metodologia de pesquisa em didática da matemática. In: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 22, Caxambu. **Anais...**Caxambu, 1999.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique dês mathématiques. **Recherches en didactique dês mathématiques.** v.7, n. 2, p.33-116, 1986 .

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas.** São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistémologiques et les problemas em mathématiques**.** ***Rechercher en Didactique dês Mathematiques***, v.4, n.2, p. 165-198, 1983.

BUSSE, R.S.; SOARES, F.S. ***O c*álculo diferencial e integral e o ensino médio,** 2006. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/.../PO02944174789T.doc> Acesso em: 22 maio 2010.

CASSOL, A. **Produção de significados para a Derivada**. 1997. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

COLL, C. et al. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Ática, 1998.

CURY, H.N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia**.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31, 2003, Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: IME, 2003b. CD-ROM.

D´AVOGLIO, A.R. D**erivada de uma Função num Ponto:** uma forma significativa de introduzir o conceito. 2002. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

D'AMBROSIO, U. A Matemática nas escolas. **Educação Matemática em Revista**, n.11, p. 29-33, 2002.

DALL'ANESE, C. **Conceito de Derivada:** Uma proposta para seu ensino e aprendizagem. 2000. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

DOERING, C.I.; NÁCUL, L.B.C.; DOERING, L. R. O programa Pró-Cálculo da UFRGS. In: CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 201-223.

FLEMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação e integração. 3. ed. São Paulo: Makron, 1992. 464 p.

FLEMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006. 464 p.

FREITAS, J.L.M., Teoria das situações didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemátic*a:*** uma nova introdução. São Paulo: Educ, 2008. p.77-111.

GODOY, L.F.S.. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem**. 2004. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

GOMES, G.H.; LOPES, C.M.C.; NIETO, S. S. Cálculo zero: uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 33, 2005, Campina Grande. ***Anais...***. Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** 5. ed. São Paulo: LTC, 2001. v.1, 636 p.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 684 p.

LEME, J C.M. **Aspectos Processuais e Estruturais da Noção de Derivada**. 2003. 89 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) . Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MACHADO, S.D.A. Engenharia didática**.** In: ____. **Educação matemática:** uma nova introdução. São Paulo: Educ, 2008. p.233-247.

MATIN-GONZALEZ, A.S.; CAMACHO, M. **The Improper Integral. An Exploratory Study With First- Year University Student** In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2 , Creta, 2002.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente:** Imagem Conceitual e Definição Conceitual 2003. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MOMETTI, A.L. Reflexão sobre a prática: argumentos e metáforas no discurso de um grupo de professores de cálculo. 2007. 273 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

OLIVEIRA, F.C. **Dificuldades na construção de gráficos de funções**. 2006. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e da Terra) - Programa de Pós-Graduação de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

ONRUBIA, J. et al. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Ática, 1998.

PINTO, J.B.; OLIVEIRA, M.H.P. de **Sequência Didática para o Aprendizado de Taxa de Variação Média de uma Função para Alunos de Licenciatura em Matemática.** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2009 São Paulo. **Anais...** São Paulo: UNIBAN, 2009. Resumo p. 43.TC 69.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REZENDE, W.M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**.2003. 450 f . Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SILVA, B.A. Contrato Didático. In: Machado, S.D.A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo. EDUC, 1999.

SILVA, B.A.; IGLIORI, S.B.C. Um estudo exploratório sobre o conceito de derivada. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 1996.

SWOKOWSKI, E.W. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: Mc Graw – Hill, 1983. 618 p.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de estudantes universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

VIGOTSKY L.S. **Pensamento e Linguagem.** Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

01. Sexo:

(1) Masculino

(2) Feminino

02. Idade que ingressou na universidade:

(1) 17 anos	(4) 20 a 22 anos	(7) 30
(2) 18 anos	(5) 23 a 25 anos	
(3) 19 anos	(6) 26 a 29 anos	

03. Estado civil

(1) Solteiro(a)	(4) Separado(a) judicialmente
(2) Casado(a)	(5) Divorciado(a)
(3) Viúvo(a)	(6) Outro

04. Onde você nasceu?

05. Onde você reside atualmente?

06. Em que ano você concluiu o curso médio (ou equivalente)?

(1) 2008	(3) 2006	(5) 2004
(2) 2007	(4) 2005	(6) 2003 ou antes

07. Em que turno você fez, integralmente, o Ensino Médio?

(1) Matutino

(2) Vespertino

(3) Noturno

08. Qual o curso de Ensino Médio que você concluiu?

Obs.: Caso tenha concluído mais de um curso, assinale apenas aquele que considera mais importante.

(1) ensino médio regular

(2) ensino médio – magistério

(3) ensino médio técnico-profissionalizante.

(4) supletivo

(5) outro

09. Em que tipo de estabelecimento de ensino você cursou, integralmente, o Ensino Médio?

(1) em escola pública federal

(2) em escola pública estadual (5) outros

(3) em escola pública municipal

(4) em escola particular

(5) outros

10. Você teve reprovação no Ensino Médio?

(1) não (3) sim, duas vezes

(2) sim, uma vez (4) sim, mais de duas vezes

11. Em relação ao domínio de língua estrangeira:

(1) não domino nenhuma língua estrangeira

(2) não domino mas, leio (3) falo (4) escrevo

12. Você frequentou "Cursinho" ?

(1) não

(2) sim, menos de 1 semestre

(3) sim, durante 1 semestre

(4) sim, mais de 1 ano

(5) sim, integrado ao ensino médio

13. Quanto tempo levou para ingressar em um curso superior, após a conclusão do Ensino Médio?

(1) menos de um ano

(2) entre um e três anos

(3) entre cinco e dez anos

(4) mais de dez anos

14. Você participou de outros vestibulares?

(1) sim

(2) não

15. Das instituições em que você prestou vestibular, como se situa a Uniban?

(1) como primeira opção de escolha

(2) segunda opção de escolha

(3) terceira opção de escolha

(4) quarta opção de escolha

(5) última opção de escolha

16. Qual o motivo principal da escolha do curso para o qual você se inscreveu?

(1) realização pessoal (5) resultados de testes vocacionais

(2) prestígio social da profissão (6) possibilidade no mercado de trabalho

(3) influência da família e/ou amigos (7) contribuição para a sociedade

(4) baixa concorrência no vestibular

17. Como você se posiciona em relação à escolha?

(1) absolutamente decidido

(2) com alguma dúvida

(3) indeciso

18. Você exerce alguma atividade remunerada?

(1) não

(2) sim, mas é trabalho eventual

(3) sim, até 20 horas semanais

(4) sim, de 20 a 30 horas semanais

(5) sim, mais de 40 horas semanais

19. Qual é a renda mensal de sua família?

(1) de um a dois salários mínimos

(2) de dois a cinco salários mínimos

(3) de cinco a dez salários mínimos

(4) de dez a vinte salários mínimos

(5) de vinte a quarenta salários mínimos

(6) mais de quarenta salários mínimos

20. Qual o meio de transporte que você mais utiliza?

(1) ônibus

(2) carona

(3) carro próprio ou da família

(4) metro

(5) outro

21. Quantas pessoas, inclusive você, vivem da renda mensal da família?

(1) uma

(2) duas

(3) três

(4) quatro a seis

(5) mais de seis

22. Qual a sua participação na vida econômica de sua família?

(1) não trabalho e sou sustentado por minha família ou por outras pessoas

(2) trabalho, mas recebo ajuda financeira de minha família ou de outras pessoas

(3) trabalho e sou responsável apenas por meu próprio sustento

(4) trabalho, sou responsável por meu próprio sustento e, parcialmente, pelo da família

(5) trabalho e sou o principal responsável pelo sustento da família

23. Você tem computador em casa e acesso à Internet?

(1) não tenho computador

(2) sim, tenho um computador com acesso à Internet

(3) sim, tenho um computador sem acesso à Internet

(4) sim, tenho mais que um computador com acesso à Internet

(5) sim, tenho mais que um computador sem acesso à Internet

APÊNDICE B - Teste diagnóstico

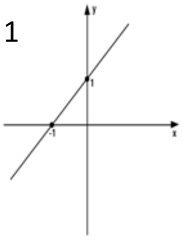
1) Associar funções com os respectivos gráficos

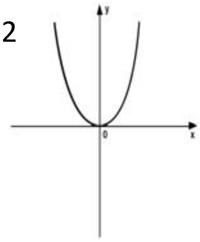
a) $y = x + 1$

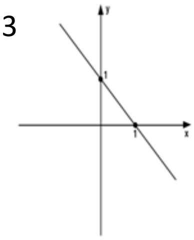
b) $y = -x + 1$

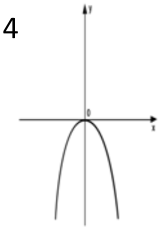
c) $y = x^2$

d) $y = -x^2$

1 

2 

3 

4 

2) Classificar as funções abaixo como:

a) linear

b) quadrática

c) logarítmica

d) exponencial

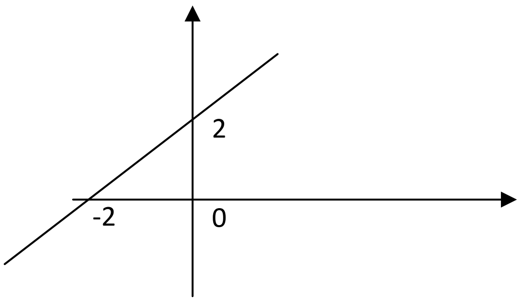
I) $y = x^2 + 5.x + 6$ II) $y = x + 1$ III) $y = 2^{x}$ IV) $y = \log_{2} x$

3) Com base no gráfico abaixo determine:

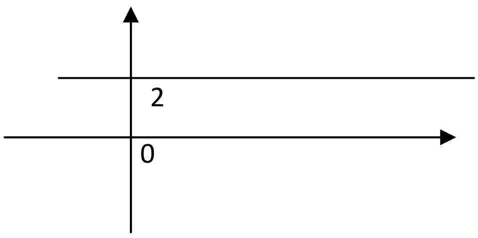
a) As coordenadas onde a curva intercepta o eixo x;

b) As coordenadas onde a curva intercepta o eixo y;

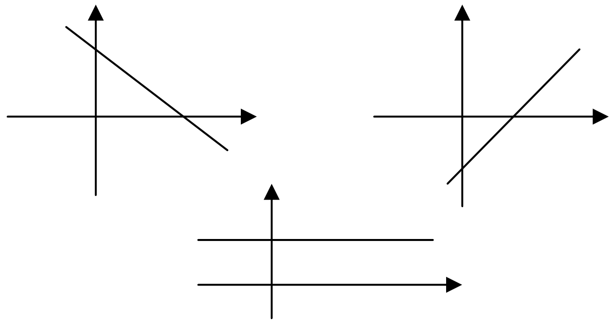
c) Coeficiente angular da reta.



4) Com base no gráfico abaixo, escreva a expressão que relaciona x com y. Que tipo de função representa?



5) Classifique como função crescente e função decrescente:



6) Com base na função y= 5x + 10,calcule:

   a) variação de y para os valores de x=5 e x=6
   b) a variação de y para os valores de x=15 e x=16
   c) a variação de y para os valores de x=20 e x=22
   d) a variação de y para os valores de x=30 e x=35

7) O consumo de energia elétrica é medida em Kwh (quilo watt-hora). Na conta do consumo mensal é acrescentada uma taxa fixa(impostos) de R$ 3,00. Sabendo que um Kwh custa R$ 0,15, calcular:

   a) o valor da conta para um consumo de 50 Kwh
   b) o valor da conta para um consumo de 100 Kwh
   c) a diferença dos consumos do itens a e b
   d) quantos Kwh foram consumidos se o valor final da conta foi de: R$ 18,00?

8) Construir o gráfico cartesiano de y em função de x da função: y= 2.x + 2

9) Construir o gráfico cartesiano de y em função de x da função: y= x^2 + 4

10) Construir o gráfico cartesiano de y em função de x da função: $y = 2^{x}$

APÊNDICE C – Sequência Didática de Taxa de Variação Média

Atividade 1

A tabela indica a posição que um móvel em função do tempo.

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Posição (Km)	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210

Responda às questões a seguir com base na tabela:

9) Se Δt é a variação do tempo, qual é o Δt entre 1h e 2h? E entre 6h e 7h?
10) Se ΔS é a variação da posição, qual o ΔS entre 10 e 40 e entre 360 e 490 ?
11) A posição está variando linearmente com o tempo?
12) Calcule o $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ entre 1 h e 2h e depois entre 6 h e 7h. O que você conclui?
13) A posição do móvel cresce mais nas primeiras 5 horas ou nas 5 horas posteriores?
14) Qual foi a variação média da posição em função do tempo no intervalo de 0 a 11h?
15) A posição do móvel sempre aumentou?
16) O acréscimo da posição do móvel, hora a hora, sempre aumentou?

Atividade 2

A tabela indica a posição de um móvel em função do tempo.

Tempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Posição (Km)	0	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000	1210

Responda às questões abaixo com base na tabela.

Vamos chamar de **S** a posição do móvel, de **t** o instante em que o móvel encontra-se na posição S, de **ΔS** a variação da posição, e **Δt** o intervalo de tempo em que ocorreu a variação da posição.

9) No intervalo de tempo de t= 1h a t= 6h, determine o **Δt.**
10) Determine o **ΔS,** para o intervalo de tempo de t= 1h a t= 6h.

11) Qual é o valor da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, no intervalo de tempo de t= 1h a t= 6h?

12) Qual a unidade de medida da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$?

13) Calcular a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, entre 0 e 5 h e entre 5 h e 10 h.

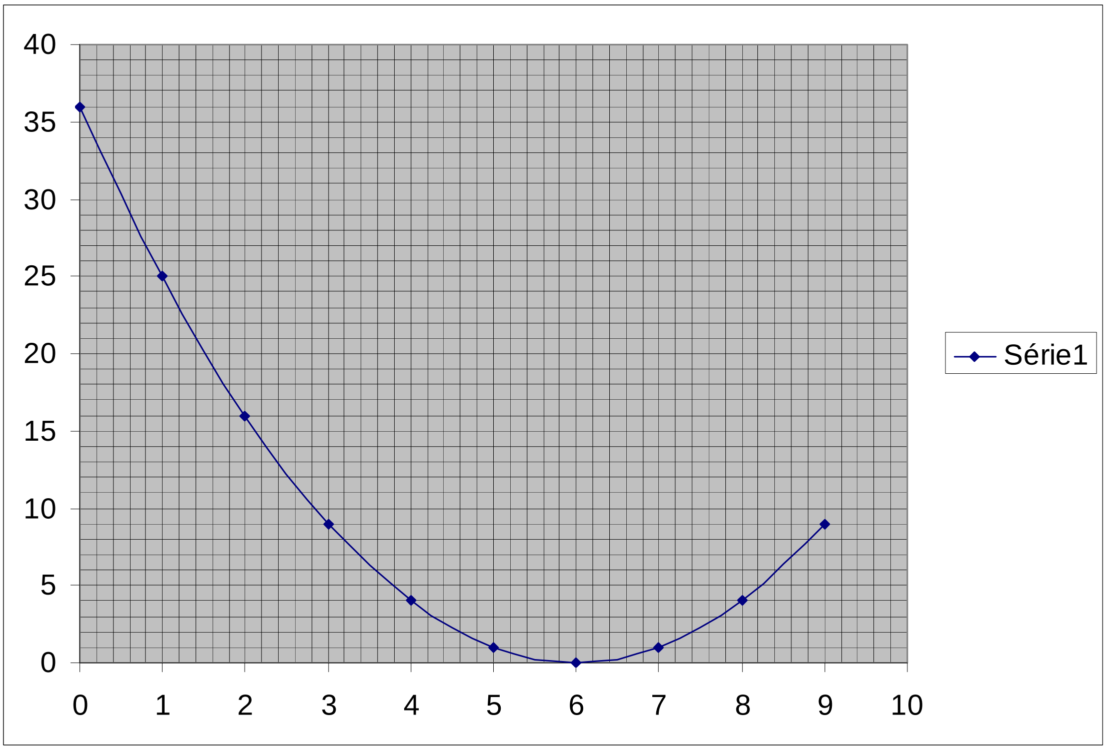
14) Qual o significado dos sinais encontrados nas razões acima (questão 5).

15) Você consegue relacionar com alguma grandeza física a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$?

16) Podemos chamar a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ como a taxa de variação média da posição S no intervalo de tempo **Δt**. Nesse caso, podemos chamar a taxa de variação média como velocidade média?

Atividade 3

O gráfico, a seguir, mostra a posição "S" de um móvel e o tempo "t" decorrido.



8) Esse gráfico que mostra a posição do móvel "S" é uma função do tempo "t", ou seja, S=f(t)? Comente o tipo de relação.

9) Qual o intervalo de tempo que a função é crescente? E decrescente?

10) Qual a variação da posição entre t= 1 seg. e t= 6 seg.? Por que o sinal é negativo?
11) Qual a taxa de variação média do espaço no intervalo de tempo t=1s e t=6s.
12) Qual a posição do móvel no instante 6 seg.? Qual o significado?
13) Qual a variação da posição entre t= 7 seg. e t= 8 seg.? Por que o sinal é positivo?
14) Determine a taxa de variação média da posição no intervalo de 7 a 8 seg.

Atividade 4

A posição S de um móvel varia em função do tempo segundo a função $S = 36 - 12.t + t^2$ (unidades do Sistema Internacional).

Determinar a taxa de variação média da posição, ou seja, a velocidade média quando S variar no intervalo:

1) t = 1s a t = 2s.
2) t= 1s a t= 1,01 s.
3) t= 1s a t= 1,001 s.
4) t= 1s a t= 1,0001 s.
5) Para você, qual é a taxa de variação no instante t = 1s? Explique sua resposta.Qual é a velocidade no instante t = 1s?

Atividade 5

A potência elétrica P fornecida a um condutor, em Watts (W), em função da intensidade da corrente elétrica i, em Ampères (A), é dada por $P(i) = 3i^2 + 2i$. Determinar:

6) a potência elétrica fornecida ao condutor quando a intensidade da corrente for 2A.
7) a taxa de variação média da potência elétrica fornecida ao condutor quando i variar de i = 2A a i = 2,1 A;
8) a taxa de variação média da potência elétrica fornecida ao condutor quando i variar de i = 2A a i = 2,01 A;
9) a taxa de variação média da potência elétrica fornecida ao condutor quando i variar de i = 2A a i = 2,001 A.
10) a taxa de variação da potência elétrica no instante em que i = 2A.

Atividade 6

Seja a função f(x) = $x^2 + 1$.

11) Esboce o gráfico de f(x).
12) Determine a variação da função no intervalo de x = 2 a x = 3.
13) Determine a taxa de variação média da função no intervalo de x = 2 a x = 3.
14) Trace a reta que passa pelos pontos de abscissas x =2 e x = 3.
15) Calcule a taxa de variação média da função no intervalo x = 2 e x = 2,1.
16) Calcule a taxa de variação média da função no intervalo x = 2 e x = 2,01.

ANEXO A

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____, com ___ anos de idade, portador(a) do RG ________________________, residente na ____, com número de telefone___________________________ e e-mail ______________________________, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário da pesquisa supra citada, sob a responsabilidade do pesquisador José Benedito Pinto e de Maria Helena Palma de Oliveira (orientadora) do curso de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

1) O objetivo da pesquisa é desenvolver e aplicar uma sequência didática de taxa de variação média de uma função para alunos de 2º ano de curso de Licenciatura em Matemática.
2) A realização desta pesquisa é fundamental para os progressos na Educação Matemática no Brasil, para que ações possam ser implementadas para a melhoria do ensino na área.
3) O estudo limita-se às respostas ao questionário e à resolução de atividades matemáticas propostas.
4) Assim que for terminada a pesquisa, terei acesso aos resultados globais do estudo.
5) Estou livre para interromper, a qualquer momento, minha participação nesta pesquisa.
6) Minha participação nesta pesquisa é voluntária e não remunerada.
7) Meus dados pessoais serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo a publicação na literatura científica especializada e apresentação dos resultados em eventos nacionais e internacionais.
8) Poderei entrar em contato com os pesquisadores sempre que julgar necessário. Com José Benedito Pinto, no telefone 3618-9020 e pelo email jpinto@uniban.br, com a Profa.Dra. Maria Helena Palma de Oliveira, pelo email moliveira@uniban.br.
9) Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a minha participação na referida pesquisa.
10) Este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com os pesquisadores responsáveis.

São Paulo, ______de ____________________ de 2010.

____

assinatura do(a) participante

____

José Benedito Pinto

____

Profa.Dra.Maria Helena Palma de Oliveira

ANEXO B – Parecer da Comissão de Ética

UNIBAN BRASIL

Universidade Bandeirante de São Paulo
Comissão de Ética em Pesquisa com Seres Humanos

Protocolo de entrada: 071/10

PARECER FINAL

O projeto intitulado **"SEQUENCIA DIDÁTICA PARA O APRENDIZADO DE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA DE FUNÇÃO PARA ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"** de responsabilidade do (a) aluno (a) **JOSÉ BENEDITO PINTO**, matriculado (a) no curso de Pós-Graduação **MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação do (a) Prof. (a) **MARIA HELENA PALMA DE OLIVEIRA**, foi analisado pela Comissão de Ética, desta Instituição, na reunião de 02 de março de 2010, sendo considerado APROVADO.

Prof. Dr. Edson Luis de Almeida Teles
Presidente da Comissão de Ética

UNIBAN BRASIL – UNIDADE MARTE – AV. BRAZ LEME, 3.029 CEP: 02022-011

ANEXO C - Termo de responsabilidade da instituição

Eu, ________________________________, presidente do Instituto de Educação da Universidade _____________, autorizo a realização da pesquisa **Sequência didática para o aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de Licenciatura em Matemática, sob a responsabilidade de José Benedito Pinto, aluno do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIBAN, orientado pela Profa. Dra. Maria Helena Palma de Oliveira**, nos cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, tornando-me corresponsável pela pesquisa.

____

Assinatura do presidente

ANEXO D - Termo de responsabilidade do coordenador

Eu, ________________________________, coordenador do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade ______________________________, autorizo a realização da pesquisa **Sequência didática para o aprendizado de taxa de variação média de função para alunos de Licenciatura em Matemática, sob a responsabilidade de José Benedito Pinto, aluno do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIBAN, orientado pela Profa. Dra. Maria Helena Palma de Oliveira**, nos cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, tornando-me co-responsável pela pesquisa.

____

Assinatura do coordenador