George K. Francis. A Topological Picturebook. New York: Springer, 1987. XV, 194 p.

Визуальный аспект математического творчества присутствует во многих работах, хотя очень редко находит явное графическое воплощение. В большинстве математических статей и книг нет никаких рисунков. Во многих случаях их, пожалуй, и не может быть: далеко не все математические идеи связаны со зрительными образами. Но время от времени автор той или иной работы с гордостью заявляет, что ему удалось обойтись без рисунков там, где они раньше казались неотъемлемой частью изложения. Традиция таких заявлений восходит по крайней мере к Лагранжу и представлена в наше время, например, блестящими книгами Дьедонне. Любопытно сравнить книгу К. Годбийона [6], которая начинается цитатой из «Аналитической механики» Лагранжа и, подобно последней, не содержит ни одного рисунка, с книгой В. И. Арнольда [2], в которой 246 рисунков. В выборе тем этих книг можно найти много общего: от дифференцируемых многообразий до лагранжевых систем и преобразования Лежандра. Возможность изложения любой математической теории без рисунков имеет как принципиальное, так и педагогическое значение и связана с достижением максимальной строгости доказательств. Однако другой способ общения и преподавания, не избегающий рисунков, имеет свои достоинства и, несомненно, более эффективен. Подчас именно в рисунках заключается все существо дела. Как пишет У. Абикоф [1], «чтобы понять какое-либо утверждение из теории римановых поверхностей, часто бывает достаточно посмотреть на соответствующую картинку». Правда, в аналогичное утверждение в книге Дж. Гарнетта [5]: «Разобравшись в рисунках, вы разберетесь и в книге» — мне уже довольно трудно поверить.

Естественно, что больше всего поводов для обращения к рисункам дают геометрия и топология. С определенной долей риска можно было бы определить геометрию как ту часть математики, которая связана со зрительными образами (сомнения в правильности этого определения связаны с такими разделами, как некоммутативная геометрия или спектральная геометрия). Топологи и геометры постоянно используют рисунки в своей работе, обсуждениях и докладах. Часть этих рисунков попадает и в публикации. Большинство из них, как и рисунки в других разделах математики, — это чисто схематические контурные рисунки, состоящие из точек, линий и стрелок. Едва ли не больше всего распространены рисунки классических узлов и зацеплений. Дело здесь, конечно, в том, что узел вообще трудно задать иначе, как нарисовав его. Замечательный пример книги, далеко выходящей за рамки таких простейших изобразительных средств, дает учебник Д. Б. Фукса, А. Т. Фоменко и В. Л. Гутенмахера [4] с рисунками А. Т. Фоменко. Правда, наиболее яркие иллюстрации этой книги не столько объясняют конкретные математические факты, сколько «отражают атмосферу и краски специфического круга идей, составляющих содержание книжки». Большинство из них — работы художника, вдохновленные математикой, и, как таковые, они не могут служить образцом для других математиков.

Цель книги Дж. Фрэнсиса — «побудить математиков иллюстрировать их работы и помочь художникам понять абстрактные идеи, выражаемые такими иллюстрациями». Дж. Фрэнсис разработал специальную графическую технику, приводящую к математически содержательным и привлекательным эстетически иллюстрациям. Эта техника основана отчасти на элементарной теории особенностей, отчасти на классических принципах перспективы и, не в последнюю очередь, на ряде специально разработанных приемов. Отмечу только один столь же простой, сколь и эффективный, прием — окна. Это просто гомеоморфные диску дыры в поверхностях, позволяющие видеть те их части, которые при обычной графической технике либо вообще не видны, либо изображаются переплетением пунктирных линий. Чтобы убедиться в эффективности техники Фрэнсиса, достаточно сравнить, например, рисунки поверхности Боя (погружения проективной плоскости в трехмерное пространство) в книге Фрэнсиса и в знаменитой книге Гильберта и Кон-Фоссена [7]. Следует особо подчеркнуть, что средства, описанные в книге Фрэнсиса, доступны математику с минимальной склонностью и способностью к рисованию и могут быть использованы не только при подготовке иллюстраций к монографиям или статьям, но и в повседневной практике преподавания и устных докладов. В частности, особое внимание уделяется воспроизведению рисунков на доске. Использование цветного мела приводит к необычайно выразительным рисункам. Книгу украшают несколько цветных фотографий реальных рисунков, сделанных автором на доске, одна из которых помещена на обложке. Уступая цветным рисункам в красочности, рисунки обычным мелом оказываются не менее эффективными.

Основной темой книги и ее рисунков, как видно из названия, является топология. Более точно, это топология малых размерностей, в первую очередь размерностей 2 и 3. Причины этого понятны. Поскольку рисунки с необходимостью двумерны и поскольку мы привыкли к двумерным изображениям трехмерных образов, именно в этих размерностях можно ожидать точного отображения математических явлений, большего, чем чисто схематическое описание. С другой стороны, именно эти размерности наряду с размерностью 4 вызывают сейчас наибольший интерес у топологов. (Сенсационные результаты последних лет о четырехмерных гладких многообразиях, по-видимому, следует рассматривать как прикладной анализ. Пока здесь едва ли найдется работа художнику). Рост интереса к двумерной и трехмерной топологии связан с появлением примерно десять лет назад, не столько работ, многие из которых и сейчас не опубликованы, сколько идей У. Терстона. Эти идеи позволили установить связи трехмерной топологии с рядом других разделов математики — теорией клейновых групп, теорией пространств Тайхмюллера, теорией представлений. При этом они глубоко геометричны и дают прекрасную возможность для содержательных и красивых иллюстраций. Две из работ Терстона ([12], [13]) и его книга [14], которую все еще с нетерпением ожидают топологи, иллюстрированы Фрэнсисом. С идеями Терстона связана и цитированная выше книга У. Абикофа [1], также иллюстрированная Фрэнсисом (в сущности здесь речь идет о двумерной топологии).

Дж. Фрэнсис иллюстрировал и другие работы, в том числе, конечно, и свои собственные. Так что к моменту появления этой книги его художественное мастерство было уже известно многим математикам.

Основным содержанием книги являются рисунки. В отличие от других иллюстрированных математических сочинений в книге Фрэнсиса не рисунки поясняют текст, а текст комментирует и объясняет рисунки. При этом вместе с объяснением рисунок может служить доказательством нетривиального результата — например, возможности вывернуть сферу наизнанку. В первых трех главах книги автор излагает главным образом на примерах основные принципы его техники. Сжатое и четкое изложение этих идей можно найти в его более ранней работе [3]. Остальные пять глав посвящены пяти, как их называет автор, «историям в картинках». Их темы таковы: геометрия невозможных фигур; трехмерные тени четырехмерных объектов; выворачивание сферы наизнанку; группы, связанные с поверхностями; узел «восьмерка». Я остановлюсь чуть подробнее на последних трех главах.

Тридцать лет назад С. Смейл доказал, что включение стандартной (двумерной) сферы в трехмерное евклидово пространство можно продеформировать в антиподальное отображение, оставаясь в классе погружений (т. е. гладких отображений с невырожденным дифференциалом; самопересечения, естественно, допускаются). Иначе говоря, сферу можно (гладко) вывернуть наизнанку. Деформация, построенная Смейлом, составлена из огромного числа элементарных деформаций и плохо поддается визуализации. Это стимулировало ряд попыток найти наглядное доказательство этой теоремы, первая из которых принадлежит А. Шапиро. Широко известны рисунки Э. Филипса [11], воспроизводившиеся даже в «Технике — молодежи». Выворачивание сферы наизнанку послужило также темой компьютерного мультфильма Н. Макса [9]. В книге Фрэнсиса содержится удивительно простой и элегантный способ вывернуть сферу наизнанку, основанный на идеях автора и слепого тополога Б. Морэна. Несколько картинок, демонстрирующих возможность выворачивания, умещаются на одной странице и требуют лишь страницы пояснений. В действительности в книге изображены несколько разных способов выворачивания, среди которых есть бесконечные серии различных. Обсуждаются и первоначальные идеи А. Шапиро. В целом эта глава представляет собой наиболее яркое во всей книге соединение математического и изобразительного искусств.

Следующая глава посвящена поверхностям, рассматриваемым как самостоятельные объекты, а не как подмногообразия евклидова пространства. Основные моменты здесь — это фундаментальные группы, косы Артина, скручивания Дена—Ликориша и другие автогомеоморфизмы. Отмечу, что такие понятия, как группы кос или скручивания Дена, понемногу начинают проникать в аппарат математической физики. Завершается глава обсуждением периодического диффеоморфизма тора порядка 6. Даже специалистам он обычно известен только в виде 2×2-матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ шестого порядка, и возможность нарисовать этот диффеоморфизм невольно вызывает удивление.

Последняя глава посвящена узлу «восьмерка». Его появление мотивируется той важной (иллюстративной) ролью, которую он играет в еще неопубликованной книге У. Терстона [14]. Замечательное свойство узла «восьмерка» состоит в том, что это (один из простейших) расслоенный узел. Иначе говоря, трехмерную сферу можно заполнить семейством поверхностей, параметризованным окружностью, которые пересекаются только по этому узлу и имеют его своим общим краем. Л. Нойвирт однажды заметил, что, на его взгляд, удивительно, что такие узлы вообще бывают. Основная цель главы, блестяще достигнутая, — изобразить такое семейство поверхностей.

Постскриптум посвящен комьютерной графике. Эта тема лежит несколько в стороне от основного содержания книги. Цветные фотографии иллюстрируют потенциал этого подхода, однако (скорее всего, только пока) мел и карандаш остаются гораздо более удобным в обращении средством. Читатель, интересующийся математическими возможностями компьютерной графики, должен обязательно посмотреть [8] и [10].

Наглядное изображение абстрактных идей привлекает в последнее время как математиков, так и представителей других наук. Все же книга Фрэнсиса не похожа ни на какую другую. В своей области Фрэнсис — первооткрыватель. Эта книга заинтересует математиков разных специальностей, но больше всего пользы и удовольствия она принесет, конечно, топологам. Хочется надеяться, что с ее помощью они научатся иллюстрировать свои работы хотя бы и не так хорошо, как автор, но все же более выразительно, чем сейчас. Наконец, надо сказать, что чтение книги не предполагает никаких систематических познаний в топологии. Пространственное воображение и известная математическая культура, конечно, необходимы.

Литература

[1] **Abikoff W.** The real analytic theory of Teichmüller space // Lecture Notes Math. N 820. Berlin: Springer, 1980. (Рус. пер.: Абикоф У. Вещественно аналитическая теория пространства Тайхмюллера. М.: Мир, 1985.)

[2] **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.

[3] **Francis G. K.** Drawing surfaces and their deformations: the tobacco pouch eversion of the sphere // Math. Modelling. 1980. Vol. 1. P. 273—281.

[4] **Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.** Томотопическая топология. М.: Изд-во МГУ, 1969. 460 с.

[5] **Garnett J.** Bounded analytic functions. New York: Acad. Press, 1981. (Рус. пер.: Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.).

[6] **Golbillon C.** Géométrie différentielle et mécanique analytique. Paris: Hermann, 1969. (Рус. пер.: Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.).

[7] **Hilbert D., Cohn-Vossen S.** Anschaulich geometrie. Berlin, 1932. (Рус. пер.: Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. 344 с.).

[8] **Hoffman D.** The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces: Math. Intelligencer. 1987. Vol. 9, N 3. P. 8—21.

[9] **Max N.** Turning a sphere inside out. Chicago: International Film Bureau, 1977.

[10] **Peitgen H.-O., Richter P. H.** The beauty of fractals. Berlin: Springer, 1986. XII. 199 p.

[11] **Phillips A.** Turning a surface inside out // Scientific American. 1966. Vol. 214. P. 112—120.

[12] **Thurston W.** Three dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry // Bul. AMS. 1982. Vol. 6, N 3. P. 357—381.

[13] **Thurston W.** Hyperbolic atructures on 3-manifolds, I: Deformation of acylindrical manifolds // An. of Math. 1986. Vol. 124, N 2. P. 203—246.

[14] **Thurston W.** The geometry and topology of three-manifolds. Princeton Preprint. 1977.

Н. В. Иванов