Доклады Академии наук СССР
1982. Том 265, № 3

8

2 УДК 513.836 **МАТЕМАТИКА**

5

Н.В. ИВАНОВ, В.Г. ТУРАЕВ

КАНОНИЧЕСКИЙ КОЦИКЛ ДЛЯ КЛАССА ЭЙЛЕРА ПЛОСКОГО ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 17 XII 1981)

Под плоским (вещественным векторным) расслоением мы будем понимать векторное расслоение, структурная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ (n – размерность слоя) которого редуцирована к $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})^\delta$ – той же группе, снабженной дискретной топологией. Векторное расслоение над гладким многообразием изоморфно плоскому тогда и только тогда, когда оно обладает связностью с нулевой кривизной (см., например, [1]). Вещественные классы Понтрягина плоского расслоения равны 0 (см. [1]), однако, как показал Милнор [2], вещественный класс Эйлера, т.е. образ целочисленного класса Эйлера в когомологиях с вещественными коэффициентами, ориентированного плоского расслоения может быть отличен от нуля. Все же вещественный класс Эйлера ориентированного плоского расслоения не произволен: Милнор [2] показал, что в случае двумерного расслоения над ориентируемой замкнутой поверхностью рода g его значение на фундаментальном классе поверхности по абсолютной величине не превосходит $g - 1$, а Сулливан [4] обобщил эту оценку на многомерную ситуацию; оценка Сулливана была уточнена Смилли (J. Smillie).

Авторам удалось построить канонический коцикл, представляющий вещественный класс Эйлера плоского расслоения. Это построение и является предметом настоящей заметки.

Основную роль в построении играет функция

$$E\colon \underbrace{\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) \times \ldots \times \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})}_{n\ \text{раз}} \to \mathbf{R},$$

которую мы сейчас определим. Обозначим через D^n шар единичного объема в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат. Для $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$ обозначим через $u(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ объем множества $D^n \cap \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0\}$, умноженный на -1 в том случае, когда $v_1, v_2, \ldots, v_n$ задают в $\mathbf{R}^n$ ориентацию, противоположную стандартной. Для $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ положим

$$(1) \qquad E(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \int\limits_{D^n \times D^n \times \ldots \times D^n} \int \ldots \int u(f_1(v_1), f_2(v_2), \ldots, f_n(v_n))\, dv_1 dv_2 \ldots dv_n.$$

Нам будет полезно также другое выражение для функции E. Именно, определим функцию $t\colon (\mathbf{R}^n)^{n+1} \to \mathbf{R}$ по следующему правилу: $t(v_0, v_1, \ldots, v_n) = 1$, если выпуклая оболочка точек $v_0, v_1, \ldots, v_n$ содержит 0 и векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ задают в $\mathbf{R}^n$ стандартную ориентацию (в частности, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно-независимы); $t(v_0, v_1, \ldots, v_n) = -1$, если выпуклая оболочка точек $v_0, v_1, \ldots, v_n$ содержит 0 и векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ задают в $\mathbf{R}^n$ ориентацию, противоположную стандартной; $t(v_0, v_1, \ldots, v_n) = 0$ в оставшихся случаях. Ясно, что

$$(2) \qquad E(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \iint\limits_{D^n \times \ldots \times D^n} \ldots \int t(v_0, f_1(v_1), f_2(v_2), \ldots, f_n(v_n))\, dv_0 dv_1 \ldots dv_n.$$

Элементарные свойства функции E суммированы в следующей теореме.

Теорема 1. (i) $|E(f_1, f_2, \dots, f_n)| \leqslant 2^{-n}$ *для любых* $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$;

(ii) *функция* E *меняет знак при перестановке двух аргументов, в частности,* $E(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$, *если* $f_i = f_j$ *при некоторых* $i \neq j$;

(iii) $E(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$, *если* n *нечетно или если* $f_i \in O(n, \mathbf{R})$ *при некотором* i;

(iv) $E(f_1, f_2, \dots, f_n) = -E(f_1^{-1}f_2, \dots, f_1^{-1}f_n)$.

Обратимся теперь к основным результатам заметки. Пусть ξ – ориентированное плоское n-мерное расслоение с базой B и пусть $e(\xi)$ – его вещественный класс Эйлера. Выберем точку $b \in B$ и изоморфизм h: $\mathbf{R}^n \to \xi_b$, где ξ_b – слой над точкой b. Эти данные определяют гомоморфизм $\varphi_\xi: \pi_1(B, b) \to \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ – гомоморфизм монодромии расслоения ξ. Его образ лежит в подгруппе $\mathrm{GL}^+(n, \mathbf{R})$ отображений, сохраняющих ориентацию.

Мы приведем нашу конструкцию в двух вариантах: B – связное симплициальное пространство (в смысле [4]); B – линейно-связное пространство. Взаимоотношения этих вариантов ясны из доказательства теорем 2 и 3 ниже.

Пусть сначала B – связное симплициальное пространство, и пусть T – максимальное дерево в его одномерном остове. Для упорядоченного n-мерного симплекса α пространства B с вершинами $a_0, a_1, \dots, a_n$ обозначим через $g_i(\alpha)$ гомотопический класс петли, получающейся последовательным прохождением из b в a_i по T, затем из a_i в a_0 по α и, наконец, из a_0 в b по T.

Теорема 2. *Вещественная симплициальная коцепь, относящая упорядоченному симплексу* α *число* $E(\varphi_\xi(g_1(\alpha)), \varphi_\xi(g_2(\alpha)), \dots, \varphi_\xi(g_n(\alpha)))$, *является коциклом и представляет* $e(\xi)$.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что если B является ориентированным псевдомногообразием, то $|e(\xi)([B])|$ не превосходит числа (неупорядоченных) n-мерных симплексов в B, пересекающихся с T только по вершинам, умноженного на 2^{-n} (для симплекса α, пересекающегося с T по ребрам, или $g_i(\alpha) = 1$ при некотором i, или $g_i(\alpha) = g_j(\alpha)$ при некоторых $i \neq j$). Эта оценка несколько усиливает оценку Сулливана–Смилли, в которой фигурирует число всех n-мерных симплексов. Заметим, что если N – число вершин псевдомногообразия B, то с T пересекаются по ребрам не менее, чем $3N/n$ симплексов размерности n.

Хорошо известно (см. [1]), что если n нечетно или если структурная группа расслоения ξ редуцируется к $\mathrm{SO}(n, \mathbf{R})^\delta$, то $e(\xi) = 0$. Как показывает теорема 1, в этих случаях коцикл теоремы 2 равен 0.

Пусть теперь B – линейно-связное пространство. Для каждой точки $x \in B$ зафиксируем путь $\bar{x}$: $[0, 1] \to B$ с $\bar{x}(0) = b$ и $\bar{x}(1) = x$. Пусть Δ^n – стандартный n-мерный симплекс с вершинами $c_0, c_1, \dots, c_n$. Для сингулярного симплекса α: $\Delta^n \to B$ обозначим через $g_i(\alpha)$ гомотопический класс петли, получающейся последовательным прохождением пути $\overline{\alpha(c_i)}$, затем пути $\tau \mapsto \alpha((1-\tau)c_i + \tau c_0)$, $\tau \in [0, 1]$, и, наконец, пути $\overline{\alpha(c_0)}^{-1}$.

Теорема 3. *Вещественная сингулярная коцепь, относящая сингулярному симплексу* α *число* $E(\varphi_\xi(g_1(\alpha)), \varphi_\xi(g_2(\alpha)), \dots, \varphi_\xi(g_n(\alpha)))$, *является коциклом и представляет* $e(\xi)$.

Если в качестве $\bar{b}$ взят постоянный путь, то значение коцикла теоремы 3 на таких сингулярных симплексах α, что $\alpha(c_i) = b$ при всех i, зависит только от ξ и изоморфизма h: $\mathbf{R}^n \to \xi_b$. Отметим, что подкомплекс сингулярного комплекса, порожденный такими симплексами, гомотопически эквивалентен всему сингулярному комплексу.

Следствие. *Функция* $\underbrace{\mathrm{GL}^+(n, \mathbf{R}) \times \ldots \times \mathrm{GL}^+(n, \mathbf{R})}_{n+1 \text{ раз}} \to \mathbf{R}$, *заданная формулой* $(g_0, g_1, \ldots, g_n) \longmapsto E(g_1^{-1}g_0, g_2^{-1}g_0, \ldots, g_n^{-1}g_0)$, *определяет коцикл в стандартном комплексе группы* $\mathrm{GL}^+(n, \mathbf{R})^\delta$, *представляющий вещественный класс Эйлера универсального n-мерного плоского расслоения.*

Отметим, что если два симплекса отличаются друг от друга лишь порядком вершин, причем эти порядки определяют одну и ту же ориентацию, то значения коцикла теорем 2 и 3 на этих симплексах совпадают. Это вытекает из п.п. (ii) и (iv) теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. (i) вытекает из того, что 2^n последовательностей, получающихся из последовательности $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$ умножением некоторых векторов на -1, порождают 2^n телесных углов с попарно непересекающимися внутренностями. (ii) вытекает из формулы (1) и того, что функция u меняет знак при перестановке двух аргументов. Что касается (iii), то при нечетном n равенство $E(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$ вытекает из формулы (1) и того, что $u(-v_1, -v_2, \ldots \ldots, -v_n) = (-1)^n u(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, а при $f_i \in O(n, \mathbf{R})$ равенство $E(f_1, f_2, \ldots \ldots, f_n) = 0$ вытекает из формулы (2) и того, что функция t меняет знак при перестановке двух аргументов. Наконец, (iv) вытекает из формулы (2) и того, что $t(v_0, f_1(v_1), f_2(v_2), \ldots, f_n(v_n)) = t(f_1^{-1}(v_0), v_1, f_1^{-1}(f_2(v_2)), f_1^{-1}(f_3(v_3)), \ldots \ldots, f_1^{-1}(f_n(v_n)))$.

Доказательство теоремы 2 в случае, когда B конечно. Напомним, что плоское n-мерное расслоение со стягиваемой базой обладает набором естественных тривиализаций, получающихся одна из другой подкруткой на элемент группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ (см. [1]). Фиксируем для каждого симплекса Δ в B некоторую естественную тривиализацию $\psi_\Delta\colon \Delta \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(\Delta)$ (где π – проекция расслоения ξ) расслоения $\xi|_\Delta$. Пусть, кроме того, $\psi_T\colon T \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(T)$ – естественная тривиализация расслоения $\xi|_T$, индуцирующая изоморфизм $\mathbf{R}^n \to \xi_b$, совпадающий с h. Каждое сечение η расслоения $\xi|_{B_0}$ (где B_r – r-мерный остов пространства B) однозначно продолжается с помощью тривиализаций ψ_Δ до "линейного" сечения $\bar\eta$ расслоения ξ. Именно, если $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – вершины симплекса Δ пространства B и $\tau_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_m = 1$, то мы полагаем $\bar\eta(\tau_0 a_0 + \tau_1 a_1 + \ldots + \tau_m a_m) = \psi_\Delta(\tau_0 \psi_\Delta^{-1}(\eta(a_0)) + \ldots + \tau_m \psi_\Delta^{-1}(\eta(a_m)))$. Если $\bar\eta$ не имеет нулей на B_{n-1}, то коцепь e_η, сопоставляющая упорядоченному n-мерному симплексу Δ в B его индекс пересечения с $\bar\eta(\Delta)$ (равный 1, -1 или 0), является коциклом, представляющим класс Эйлера $e(\xi)$ (по определению последнего). Рассмотрим функцию $\eta \mapsto e_\eta(\Delta)$ и проинтегрируем ее по множеству таких η, что $\eta(B_0) \subset \psi_T(B_0 \times D^n)$ и $\bar\eta$ не имеет нулей на B_{n-1}; мера на этом множестве получается перенесением при помощи ψ_T меры Лебега на $D^n \times \ldots \times D^n$ ($\mathrm{card}(B_0)$ сомножителей). (Заметим, что множество тех η, для которых $\bar\eta$ имеет нули на B_{n-1}, имеет меру 0.) Интеграл этой функции обозначим через $d(\Delta)$. Ясно, что $d\colon \Delta \to d(\Delta)$ – коцикл, представляющий $e(\xi)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что коцепь теоремы 2 совпадает с d.

Покажем это. Во-первых, заметим, что $e_\eta(\Delta)$ зависит только от $\eta|_{B_0 \cap \Delta}$ и, более того, $e_\eta(\Delta) = t((p \circ \psi_\Delta^{-1} \circ \eta)(a_0), \ldots, (p \circ \psi_\Delta^{-1} \circ \eta)(a_n))$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – вершины симплекса Δ и $p\colon \Delta \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – проекция. Поэтому

$$d(\Delta) = \iint\limits_{D^n \times \ldots \times D^n} \ldots \int t((p \circ \psi_\Delta^{-1} \circ \psi_T)(a_0 \times v_0), \ldots$$

$$\ldots, (p \circ \psi_\Delta^{-1} \circ \psi_T)(a_n \times v_n)) dv_0 dv_1 \ldots dv_n.$$

Обозначая через h_i изоморфизм $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, определенный формулой $a_i \times h_i(v) = (\psi_\Delta^{-1} \circ \psi_T)(a_i \times v)$, и через f_i – изоморфизм $h_0^{-1} \circ h_i$, получаем

$$d(\Delta) = \iint\limits_{D^n \times \ldots \times D^n} \ldots \int t(h_0(v_0), h_1(v_1), \ldots, h_n(v_n)) dv_0 dv_1 \ldots dv_n =$$

$$= \iint\limits_{D^n \times \ldots \times D^n} \ldots \int t(v_0, f_1(v_1), f_2(v_2), \ldots, f_n(v_n)) dv_0 dv_1 \ldots dv_n =$$

$$= E(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Остается заметить, что $f_i = \varepsilon_i(g_i(\Delta))$.

Из доказанного случая теоремы 2 нетрудно вывести теорему 3, реализуя сингулярные цепи как образы симплициальных цепей при непрерывных отображениях. В свою очередь из теоремы 3 вытекает теорема 2 в полной общности.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dupont J.L.* – Lect. Notes Math., 1978, N 640. 2. *Milnor J.W.* – Comm. Math. Helv., 1958, vol. 32, p. 215–223. 3. *Рохлин В.А., Фукс Д.Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977. 4. *Sullivan D.P.* – Comm. Math. Helv., 1976, vol. 51, p. 183–189.

УДК 517.941.9

МАТЕМАТИКА

Н.Ю. КАПУСТИН

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 8 II 1982)

В настоящей работе речь пойдет о задаче Трикоми для системы уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

(1) $$Lu \equiv K(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y),$$

где $K(y) = 1$ при $y > 0$, $K(y) = 0$ при $y < 0$; a, b и c – заданные квадратные матрицы порядка n, f – заданный вектор, а u – искомый вектор.

Пусть область $\mathcal{D}$ является объединением прямоугольника $MABN$, $M(0, -y_0)$, $A(0,0)$, $B(d,0)$, $N(d, -y_0)$, $d > 0$, $y_0 > 0$, интервала AB и характеристического треугольника ACB системы (1). Следуя традиции, обозначим через $\mathcal{D}^+$ часть области $\mathcal{D}$, лежащую в верхней полуплоскости, а часть области $\mathcal{D}$, лежащую в нижней полуплоскости, обозначим $\mathcal{D}^-$. На коэффициенты и правую часть системы (1) наложим ограничения:

$$a(x,y) = \begin{cases} a^+(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in \mathcal{D}^+, \\ a^-(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in \mathcal{D}^-; \end{cases}$$

$$c(x,y) = \begin{cases} c^+(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in \mathcal{D}^+, \\ c^-(x,y), & \text{если} \quad (x,y) \in \mathcal{D}^-; \end{cases}$$