ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев А.Ф.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, т. 22, № 2, с. 201–242. 2. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. 3. *Гельфонд А.О.* Тр. МИАН, 1951, т. 3, с. 2–67. 4. *Леонтьев А.Ф.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, т. 32, с. 682–708. 5. *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* – Матем. сб., 1951, т. 29 (71), № 3, с. 477–500. 6. *Хромов А.П.* Докт. дисс. Новосибирск, 1973. 7. *Громов В.П.* Сб. тр.: Матем. анализ и теория функций, 1974, в. 4, с. 20–28. 8. *Рид М., Саймон В.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1977, т. 1.

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Н.В. ИВАНОВ

ЭНТРОПИЯ И ЧИСЛА НИЛЬСЕНА

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 28 I 1982)

Гипотеза об энтропии (см. [11, 14]) связывает топологическую энтропию гладкого отображения компактного многообразия в себя с действием этого отображения в гомологиях. Эта гипотеза мотивировала ряд работ, посвященных оценкам топологической энтропии в чисто топологических или геометрических терминах. Некоторые из этих работ выходят за рамки гипотезы об энтропии в том смысле, что полученные в них оценки применимы к произвольным непрерывным отображениям и при определенных обстоятельствах сильнее, чем оценка гипотезы об энтропии. В настоящей заметке предлагается новая оценка такого рода. Подобно широко известному усилению теоремы Мэннинга [12] (см. [3, 7, 9, 11]), она тесно связана с фундаментальной группой. С другой стороны, она тесно связана с периодическими точками рассматриваемого отображения – подобно чисто динамическим оценкам Конза [6] и Боуэна [1].

Чтобы сформулировать эту оценку, мы приведем сначала необходимые определения и обозначения. Пусть X – компактный полиэдр и $f\colon X \to X$ – непрерывное отображение. Две неподвижные точки отображения f называются эквивалентными, если их можно соединить таким путем α, что петля $\alpha^{-1}\cdot f\alpha$ гомотопна нулю (где $f\alpha$ – образ пути α при отображении f). Это отношение действительно является отношением эквивалентности. Каждому классу эквивалентности сопоставляется некоторое целое число – его индекс (см. [5]); точное определение индекса нам не понадобится. Число Нильсена $N(f)$ отображения f определяется как число тех классов неподвижных точек, которые имеют ненулевой индекс. Основное свойство чисел Нильсена – их гомотопическая инвариантность: если отображение $g\colon X \to X$ гомотопно f, то $N(f) = N(g)$ (см. [5]). Мы определим асимптотическое число Нильсена $N_\infty(f)$ отображения f как $\limsup_n \frac{1}{n} \log N(f^n)$.

Теперь мы сформулируем нашу оценку. Как обычно, через $h(f)$ обозначается топологическая энтропия отображения f (ее определение см., например, в [7, 11]).

Теорема. *Пусть f – непрерывное отображение компактного полиэдра в себя. Тогда $h(f) \geqslant N_\infty(f)$.*

Интересно сравнить эту теорему с результатом Конза [6]. Для отображения $g\colon X \to X$ обозначим через $F(g)$ число его неподвижных точек и положим $F_\infty(g) = \limsup_n \frac{1}{n} \log F(g^n)$. Конз [6] показал, что если f – гомеоморфизм компактного метрического пространства на себя со свойством разделения траекторий, то $h(f) \geqslant F_\infty(f)$. Наша теорема показывает, что аналогичное неравенство справедливо, если f – непрерывное отображение компактного полиэдра в себя, а числа неподвижных точек заменены на числа Нильсена.

2. Доказательство теоремы. Пусть p: $X^\sim \to X$ – универсальное накрытие, и пусть g: $X^\sim \to X^\sim$ – некоторое отображение, накрывающее f, т.е. такое, что $p \circ g = f \circ p$. Снабдим X какой-нибудь метрикой. Метрика на X индуцирует метрику на $X^\sim$ такую, что для всех шаров B в $X^\sim$ достаточно малого радиуса накрытие p индуцирует изометрию $B \to p(B)$. Пространство $X^\sim$, вообще говоря, некомпактно.

Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ – некоторое покрытие полиэдра X компактными стягиваемыми множествами A_i. Над каждым A_i накрытие p, очевидно, тривиально. Обозначим через N_{in} число тех классов эквивалентности неподвижных точек отображения f^n, которые пересекаются с A_i и имеют ненулевой индекс, $1 \leqslant i \leqslant m$. Из того факта, что

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max\left\{\limsup_n \frac{1}{n} \log a_n,\ \limsup_n \frac{1}{n} \log b_n\right\}.$$

для любых положительных последовательностей a, b, вытекает, что

$$N_\infty(f) = \limsup_n \frac{1}{n} \log N_{in}$$

для некоторого i. Возьмем множество A в $X^\sim$ такое, что p индуцирует гомеоморфизм $A \to A_i$ (это возможно, так как p тривиально над A_i). Возьмем множества S_n в A такие, что $p(S_n)$ содержит по одному элементу из тех классов неподвижных точек отображения f^n, которые подсчитываются в определении N_{in} (и не содержит больше никаких элементов), так что S_n содержит N_{in} элементов.

Пусть $x \in A_i$. Отождествим $p^{-1}(A_i)$ с $A_i \times p^{-1}(x)$ при помощи некоторой тривиализации накрытия p над A_i. В частности, A отождествляется с $A_i \times y$ для некоторого $y \in p^{-1}(x)$. Очевидно, существует такое $\epsilon > 0$, что расстояние между $A_i \times y_1$ и $A_i \times y_2$ больше ϵ, каковы бы не были $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$, $y_1 \neq y_2$. Мы покажем, что множество S_n является (n, ϵ)-разделенным для отображения g. Так как $S_n \subset A$ и A компактно, отсюда вытекает, что

$$h(g) \geqslant \limsup_n \frac{1}{n} \log N_{in}$$

(в случае отображений некомпактных метрических пространств мы пользуемся определением топологической энтропии, предложенным Боуэном [2]; см. также [7]). Поскольку $h(g) = h(f)$ (в силу, например, [7], § 1) и $\limsup_n \frac{1}{n} \log N_{in} = N_\infty(f)$, отсюда вытекает теорема.

Покажем теперь, что множество S_n является (n, ϵ)-разделенным. Так как $p(S_n)$ лежит в множестве неподвижных точек отображения f^n, то $g^n(S_n) \subset \subset p^{-1}(p(S_n)) \subset p^{-1}(A_i)$. Поэтому достаточно доказать, что если $x_1, x_2 \in S_n$, $x_1 \neq x_2$, то точки $g^n(x_1)$ и $g^n(x_2)$ не могут лежать в одном множестве вида $A_i \times y$, $y \in p^{-1}(x)$. Допустим противное, т.е. что $g^n(x_1), g^n(x_2) \in A_i \times y$. Соединим x_1 и x_2 путем α в A. Пусть β – путь в $A_i \times y$ такой, что $p\alpha = p\beta$; β соединяет $g^n(x_1)$ с $g^n(x_2)$. Так как $X^\sim$ односвязно, то петля $\beta^{-1} \cdot g^n \alpha$ гомотопна нулю. Поэтому гомотопна нулю и петля $p(\beta^{-1} \cdot g^n \alpha) = (p\beta)^{-1} \cdot p(g^n \alpha) = (p\alpha)^{-1} \cdot f^n(p\alpha)$. Так как $p\alpha$ соединяет $p(x_1)$ с $p(x_2)$, мы видим, что $p(x_1)$ и $p(x_2)$ лежат в одном классе неподвижных точек отображения f^n. Противоречие с выбором множества S_n завершает доказательство.

3. Примеры. Пусть, как и выше, X – компактный полиэдр и f: $X \to X$ – непрерывное отображение. Нам потребуются следующие гомологические инварианты

отображения f: его число Лефшеца

$$L(f) = \sum_i (-1)^i \operatorname{trace}[f_{*i}\colon H_i(X, \mathbf{R}) \to H_i(X, \mathbf{R})],$$

асимптотическое число Лефшеца

$$L_\infty(f) = \limsup_n \frac{1}{n} \log |L(f^n)|$$

и спектральный радиус (т.е. максимальный модуль собственного значения) эндоморфизма $H_*(X, \mathbf{R}) \to H_*(X, \mathbf{R})$, индуцированного f, который мы обозначим $s(f)$.

Нам потребуется следующий факт: если Y – еще один компактный полиэдр, $g\colon\ Y \to Y$ – непрерывное отображение и $h\colon\ X \to Y$ – гомотопическая эквивалентность такая, что $h \circ f$ гомотопно $g \circ h$, то $N(f) = N(g)$. Этот факт нетрудно вывести из более слабого свойства гомотопической инвариантности, упомянутого в п. 1, используя вложения пространств X и Y в качестве деформационных ретрактов некоторое третье пространство.

Пусть X гомотопически эквивалентно некоторому тору. В силу сказанного в предыдущем абзаце из теоремы об отображениях тора [4] вытекает, что $N(f) = |L(f)|$ и, более того, $N(f^n) = |L(f^n)|$ при любом n, так что $N_\infty(f) = L_\infty(f)$. Число $L_\infty(f)$ без труда вычисляется: $L_\infty(f) = 0$, если 1 является собственным значением отображения $f_{*1}\colon\ H_1(X, \mathbf{R}) \to H_1(X, \mathbf{R})$, и $L_\infty(f) = \log s(f)$ в противном случае. Таким образом, в этом последнем случае из теоремы вытекает, что $h(f) \geqslant \log s(f)$, т.е. что для f справедлива оценка гипотезы об энтропии. Вспоминая определение чисел Нильсена, мы попутно получаем, что $F(f^n) \geqslant c^n$ для некоторого $c > 1$ и любого n (ср. [9], § 3).

В следующем примере X – ориентируемое компактное многообразие и $f\colon\ X \to X$ – сохраняющее ориентацию растягивающее отображение (в смысле [13]). Если $X^\sim \to X$ – универсальное накрытие и $g\colon\ X^\sim \to X^\sim$ – произвольное отображение, накрывающее f, то согласно [13] g имеет ровно одну неподвижную точку. Отсюда вытекает, что неподвижные точки отображения f попарно неэквивалентны. Индекс каждого класса эквивалентности, состоящего, таким образом, из одной неподвижной точки, совпадает с ее индексом Лефшеца (по определению индекса). Последний, очевидно, равен 1. Поэтому $N(f) = F(f)$ и $F(f) = L(f)$ в силу формулы Лефшеца. Так как итерации f^n также являются растягивающими отображениями, то $N(f^n) = L(f^n)$ для любого n и потому $N_\infty(f) = L_\infty(f)$. Таким образом, из теоремы вытекает неравенство $h(f) \geqslant L_\infty(f)$. Более того, в силу гомотопической инвариантности чисел Нильсена неравенство $h(g) \geqslant L_\infty(g)$ справедливо для любого отображения $g\colon\ X \to X$, гомотопного некоторому растягивающему отображению. Аналогичные соображения позволяют получить неравенство $h(g) \geqslant L_\infty(g)$ и в других случаях, например, для отображений g, гомотопных метрически разложимым (в смысле [8]) диффеоморфизмам Аносова. Ввиду гипотезы об энтропии было бы интересно выяснить, совпадает ли в этих случаях $L_\infty(g)$ с $\log s(g)$.

Пусть теперь X – поверхность и $f\colon\ X \to X$ – псевдоаносовский диффеоморфизм. Тогда, как и в случае диффеоморфизмов Аносова, $h(f) = F_\infty(f)$, при этом часто $h(f) > \log s(f)$. Из теоремы (2.3) из [10] (см. также [15]), вытекает, что $N(f) = F(f)$. Так как итерации f^n также являются псевдоаносовскими диффеоморфизмами, то $N(f^n) = F(f^n)$ для любого n и потому $N_\infty(f) = F_\infty(f)$. Пользуясь теоремой и гомотопической инвариантностью чисел Нильсена, мы получаем новое доказательство того, что псевдоаносовские диффеоморфизмы реализуют инфимум топологической энтропии в своем гомотопическом классе (первоначальное доказательство см. в [7]).

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
9 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowen R.* – Proc. Symp. in Pure Math., 1970, № 14, p. 23–41. 2. *Bowen R.* – Trans. AMS, 1971, vol. 153, p. 401–414. 3. *Bowen R.* – Lecture Notes in Math., 1978, № 668, p. 21–29. 4. *Brooks R.B.S., Brown R.F., Pak J., Taylor D.H.* – Proc. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 52, p. 398–400. 5. *Broen R.F.* The Lefschetz fixed point theorem. Scott. Foresman. Glenview, 1971. 6. *Conze J.-P.* – C.R., 1968, vol. 267, № 3, p. 149–152. 7. *Fathi A., Shub M.* – Asterisque, 1979, № 66–67, p. 181–207. 8. *Franks J.* – Proc. Symp. in Pure Math., 1970, № 14, p. 61–93. 9. *Gromov M.* Three remarks on geodesic dynamic and fundamental group, Preprint, 1977. 10. *Иванов Н.В.* В кн.: Исследования по топологии IV, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 122, 1982. 11. *Каток А.Б.* В кн.: Гладкие динам. системы. М.: Мир, 1977, с. 181–203. 12. *Manning A.* – Lecuture Notes in Math., 1974, № 468, p. 185–191. 13. *Shub M.* – Amer. J. Math., 1969, vol. 91, p. 175–199. 14. *Shub M.* – Bull. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 80, № 1, p. 27–41. 15. *Thurston W.P.* On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces I, Preprint, 1977.

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

В.Ф. КИРИЧЕНКО

ОБОБЩЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ПОСТОЯННОЙ ГОЛОМОРФНОЙ КОНФОРМНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 22 II 1981)

Изучению конформных инвариантов римановых многообразий, в частности, почти-эрмитовых многообразий, уделяется большое внимание в печати. Это, кроме естественного для дифференциальной геометрии интереса, объясняется также и существенными приложениями данной тематики в теоретической физике (см., например, [1]). Что касается эрмитовой геометрии, то изучение этой тематики позволило с новой точки зрения осмыслить вопросы классификации почти-эрмитовых структур [2], а также привлечь к рассмотрению такие чрезвычайно интересные классы структур, как, например, локально конформно-келеровы структуры [3]. Наконец, попытки классификации конформно-плоских приближенно келеровых многообразий привели Ватанабэ и Такамацу к рассмотрению интересных примеров таких многообразий [4]. С другой стороны, большой интерес к почти-эрмитовым многообразиям постоянной голоморфной секционной кривизны делает естественным обобщение круга вопросов, связанных с этой тематикой, на почти-эрмитовы многообразия постоянной голоморфной конформной кривизны, частным случаем которых являются конформно-плоские многообразия.

В настоящей заметке этот круг вопросов обсуждается для обобщенных почти-эрмитовых структур, введенных в рассмотрение в [5] и охватывающих наряду с классическими почти-эрмитовыми структурами также почти-контактные, почти-параэрмитовы, f-структуры и ряд других. Получена полная классификация обобщенных приближенно келеровых многообразий весьма общего вида (включающего классические приближенно келеровы многообразия, т.е. почти-эрмитовы многообразия с киллинговым структурным оператором) постоянной голоморфной конформной кривизны. Это обобщает как результаты Ватанабэ и Такамацу по классификации конформно-плоских приближенно келеровых многообразий [4], так и результаты Либерман, Грея, Хервеллы и других авторов, касающиеся класси-