Замечание 2. Метод естественным образом переносится на многоме ный случай и случай приближенного задания оператора $A(v)$, причем условие (: можно заменить на более слабое:

$$\|A(v_1) - A(v_2)\| \leqslant \Omega(\|v_1 - v_2\|_S, R),$$

где $R \equiv \max\{\|v_1\|_S, \|v_2\|_S\}$.

Замечание 3. Метод можно использовать для отыскания глобальног экстремума нелинейного функционала $\Phi(v)$ в шаре пространства S, если функ ционал удовлетворяет условию

$$|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)| \leqslant \Omega(\|v_1 - v_2\|_S).$$

Замечание 4. Если рассмотреть аналогичную задачу, в которой вмест тройки пространств C, M, S взята тройка W_2^1, C, C, то получим в этом случае следующую оценку апостериори:

$$\|v^\delta - u\|_C \leqslant \epsilon(\delta) + \sqrt{h(\delta)} + \tau(\delta) \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0;$$

здесь $\delta_0 \equiv \delta_0(u) = \text{const} > 0$, $\epsilon(\delta) \equiv \operatorname{diam} V_N$, $N \equiv N(\delta)$; $\epsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

В заключение автор выражает благодарность акад. А.Н. Тихонову за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
26 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А.Н. Тихонов*, ДАН, т. 153, № 1 (1963). [2] *В.А. Морозов*, Методы решения неустойчи-
вых задач, М., Изд-во МГУ, 1967. [3] *А.Б. Бакушинский*, Избранные вопросы приближенного
решения некорректных задач, М., Изд-во МГУ, 1968. [4] *А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.Г. Яго-*
ла, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 2 (1973). [5] *В.А. Винокуров, Ю.И. Пету-*
нин, А.Н. Пличко, ДАН, т. 220, № 3 (1975). [6] *Я.И. Альбер*, Сиб. матем. журн., т. 16, № 1 (1975).
[7] *А.Б. Бакушинский*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 1 (1973). [8] *О.А. Лиско-*
вец, Дифференц. уравнения, т. 4, № 6 (1968). [9] *В.К. Иванов*, Изв. высш. учебн. завед., Мате-
матика, № 10 (1967). [10] *Л.Д. Менихес*, ДАН, т. 241, № 2 (1978). [11] *Ю.Л. Гапоненко*, ДАН,
т. 229, № 2 (1976). [12] *В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана*, Теория линейных некорректных
задач и ее приложения, М., "Наука", 1978. [13] *Ю.Л. Гапоненко*, Журн. вычислит. матем. и ма-
тем. физ., т. 18, № 2 (1978).

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Д.Ю. ГРИГОРЬЕВ, Н.В. ИВАНОВ

О ФОРМУЛЕ АЙЗЕНБУДА – ЛЕВИНА НАД СОВЕРШЕННЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 20 XII 1979)

1. Недавно Айзенбуд и Левин ([1]) предложили алгебраическую формулу для локальной степени гладкого отображения. Естественно использовать эту формулу для определения степени полиномиального отображения над произвольным основным полем. В ([2]) Айзенбуд предлагает следующее определение. Пусть k – поле характеристики 0 и $f\colon (k^n, 0) \to (k^n, 0)$ – полиномиальное отображение. Рас-

смотрим $Q_k(f) = k[[x_1, \ldots, x_n]]/(f^1, \ldots, f^n)$ – локальную алгебру отображения f в 0 и предположим, что она конечномерна. Пусть J – образ в $Q_k(f)$ якобиана отображения f. Выберем линейный функционал φ: $Q_k(f) \to k$ такой, что $\varphi(J) \neq 0$, и положим $\langle a, b\rangle_\varphi = \varphi(ab)$. В [1] показано, что если $\varphi(J)/\psi(J) \in (k^*)^2$, то формы $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ и $\langle \cdot, \cdot\rangle_\psi$ эквивалентны. Айзенбуд [2] предлагает определить степень f в 0 как класс эквивалентности формы $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ (нужно брать функционал φ с $\varphi(J) = \dim_k Q_k(f)$. Так определенная степень несет в себе информацию о степени продолжения f на всякое поле, большее k. В частности, на $\mathbf{R}$ она несет информацию не только об обычной степени, равной сигнатуре формы $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ в силу [1], но и о кратности в 0, равной $\dim_{\mathbf{R}} Q_{\mathbf{R}}(f) = \text{ранг}\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ и совпадающей со степенью комплексификации.

В случае поля k произвольной характеристики в этом определении нужно заменить J на следующий элемент D: возьмем ряды $a_{ij} \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ такие, что $\sum_j a_{ij}x_j = f^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и положим $\bar{D} = \det(a_{ij})$, D – образ $\bar{D}$ в $Q_k(f)$ (условие $\varphi(J) = \dim_k Q_k(f)$ нужно заменить на $\varphi(D) = 1$). Если $\operatorname{char} k = 0$, то $J = \dim_k Q_k(f) \cdot D$ и потому новое определение совпадает со старым (см. [2]).

Мы предлагаем определение степени, отражающее только поведение f в k-точках. Такое определение диктует глобальная точка зрения, которая выдвигает определенные требования инвариантности (см. теорему 2). В дальнейшем k – совершенное поле и $\operatorname{char} k \neq 2$.

Пусть $WG(k)$ – группа Витта – Гротендика симметрических билинейных форм над k. Для каждого собственного конечного расширения $k \subsetneq E$ определим форму $\langle \cdot, \cdot\rangle_E$: $E \times E \to k$ формулой $\langle a, b\rangle_E = \operatorname{Tr}_k^E(ab)$ и рассмотрим подгруппу $TF(k)$ группы $WG(k)$, порожденную формами $\langle \cdot, \cdot\rangle_E$. Положим $\Delta(k) = WG(k) / TF(k)$. Степень $\deg_0 f$ отображения f в 0 определим как образ в $\Delta(k)$ формы $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ с $\varphi(D) = 1$. Очевидно, определение распространяется и на формальные отображения $(k^n, 0) \to (k^n, 0)$ (понимаемые как наборы рядов $f^1, \ldots, f^n \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ без свободных членов).

2. Теорема 1. (a) *Если k алгебраически замкнуто или вещественно замкнуто, то $\Delta(k) \simeq \mathbf{Z}$. В первом случае изоморфизм задается рангом, во втором – сигнатурой.*

(b) *Если все конечные расширения поля k имеют степень p^m для фиксированного простого p и k не вещественно замкнуто и не алгебраически замкнуто, то $\Delta(k) \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Изоморфизм задается рангом формы, рассматриваемым по модулю p.*

(c) *В остальных случаях $\Delta(k) \simeq 0$.*

Заметим, что в силу (a) наше определение степени равносильно при $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ обычному.

3. В дифференциальной топологии понятие локальной степени позволяет определить индекс конечнократного нуля сечения n-мерного расслоения на n-мерном компактном многообразии. В ориентированном случае этот индекс лежит в $\mathbf{Z}$, в общем случае – в $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Если все нули сечения конечнократны, то сумма их индексов равна числу Эйлера расслоения и не зависит от сечения. Мы переносим эту теорему на алгебраические многообразия, определенные над k (рассматриваемый класс многообразий уточняется ниже).

В дальнейшем все рассматриваемые объекты (многообразия, расслоения, сечения) предполагаются определенными над k.

Пусть теперь: X – гладкое проективное n-мерное многообразие; Y – его открытое подмножество, содержащее все его k-точки (это условие является аналогом компактности в вещественном случае*; η — n-мерное векторное расслоение над Y; v — некоторое сечение расслоения η. В случае вещественно замкнутого поля k предполагаем, что η и Y ориентированы *. Пусть y — k-точка многообразия Y и $v(y) = 0$. С помощью тривиализации расслоения η вблизи y сечение v порождает n ростков $v^1, \ldots, v^n \in O_y$ (O_y — локальное кольцо в точке y). Пусть $\widehat{v^1}, \ldots, \widehat{v^n}$ — образы этих ростков в пополнении $\widehat{O_y}$ кольца O_y. Образы элементов $\widehat{v^1}, \ldots, \widehat{v^n}$ при каком-нибудь изоморфизме $\widehat{O_y} \cong k[[x_1, \ldots, x_n]]$ порождают формальное отображение $f\colon (k^n, 0) \to (k^n, 0)$. В случае вещественно замкнутого поля k мы будем считать, что этот изоморфизм и тривиализация согласованы с ориентациями. Нуль y сечения v назовем конечнократным, если $\dim_k Q_k(f) < \infty$. Если $\dim_k Q_k(f) < \infty$, то $\deg_0 f$ определена и зависит только от v и y (это верно и в случае вещественно замкнутого поля и касательного расслоения, если изоморфизм и тривиализация порождены одной и той же системой локальных параметров). Положим $\operatorname{ind}_y v = \deg_0 f$. Назовем сечение общим, если все его нули в k-точках конечнократны. Для общего сечения v положим $e(v) = \Sigma \operatorname{ind}_y v$, где сумма берется по всем k-нулям y сечения v.

Теорема 2. *Если v и w — два общих сечения, то* $e(v) = e(w)$.

Для полей, рассматриваемых в п. (a) теоремы 1, это хорошо известно.

Предположим, что расслоение η имеет общее сечение v. Назовем $e(v)$ числом Эйлера расслоения η и обозначим его $e(\eta)$. Если θ — расслоение на Z (Z удовлетворяет тем же требованиям, что и Y) и $e(\theta)$ определено, то $e(\pi_1^*\eta \oplus \pi_2^*\theta)$ определено и равно $e(\eta) \cdot e(\theta)$, где $\pi_1\colon Y \times Z \to Y$ и $\pi_2\colon Y \times Z \to Z$ — проекции. Если η — тривиальное расслоение, то $e(\eta) = 0$.

Как следствие из теоремы 2 получаем, что на неприводимом гладком многообразии, определенном над k, множество k-точек всюду плотно в топологии Зарисского, если оно непусто. Для $k = \mathbf{R}$ этот факт известен.

4. Обратим теперь внимание на то, что многие аффинные многообразия, определенные над незамкнутым полем k, не имеют k-точек на бесконечности, т.е. содержат все k-точки своего проективного замыкания. Пусть Y — такое многообразие. Тогда расслоение η над Y можно рассматривать как проективный модуль (ранга $\dim Y$) над $k[Y]$. Тем самым e превращается в инвариант проективных модулей над такими кольцами. Если k — поле как в п. (b) теоремы 1, то этот инвариант обращается в нуль на стабильно-свободных модулях.

Вычислим инвариант e в случае $\dim Y = 1$ (предполагаем, что поле k как в п. (b) теоремы 1). В этом случае кольцо $A = k[Y]$ дедекиндово и классы изоморфизма проективных модулей ранга 1 образуют группу $\operatorname{Pic}(A)$ относительно тензорного умножения, изоморфную также группе классов идеалов кольца A. Инвариант e определяет эпиморфизм $\operatorname{Pic}(A) \to \Delta(k)$. Пусть $0 \neq a \in \operatorname{Pic}(A)$, a — идеал, γ — кратность a (если $a = m_1^{\rho_1} \cdots m_l^{\rho_l}$ — разложение в произведение максимальных идеалов, то $\gamma = \Sigma \rho_i$). Тогда $e(a) = -\gamma (\operatorname{mod} p)$.

В заключение приведем явный пример проективного модуля M с $e(M) = 1$. Пусть k — поле такое, как в п. (b) теоремы 1, и пусть $\alpha \in k^* \setminus (k^*)^p$. Пусть $A = k[x, y]/(x^p - x - \alpha y^p)$ и пусть модуль M порожден строками (x^{p-1}, y) и

---

* Ориентация гладких многообразий и векторных расслоений вводится по аналогии с классическим случаем. Именно, назовем два базиса в векторном пространстве над k эквивалентными, если определитель матрицы перехода от одного базиса к другому лежит в $(k^*)^2$; класс эквивалентности базисов назовем ориентацией векторного пространства. Ориентацией векторного расслоения назовем совокупность ориентаций его слоев над k-точками базы, локально тривиальную в очевидном смысле; ориентацией гладкого многообразия — ориентацию его касательного расслоения.

$(-\alpha x^{p-2}y^{p-1},\ 1-x^{p-1})$. Тогда M проективен ранга 1 и $e(M)=1$ (заметим, что кривая $x^p - x - \alpha y^p = 0$ не имеет k-точек на бесконечности.

Авторы благодарят А.Н. Кириллова, А.А. Суслина и М.А. Фрумкина за внимание к работе.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *D. Eisenbud, H. Levine*, Ann. Math., v. 106, № 1, 19 (1977). [2] *D. Eisenbud*, Bull. Am. Math. Soc., v. 84, № 5, 751 (1978).

УДК 513.82 + 517.9

МАТЕМАТИКА

В.Р. КИРЕЙТОВ

О ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИНАХ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

(Представлено академиком Г.И. Марчуком 21 XII 1979)

Цель статьи – дать формальное определение многомерных аналогов основных фотометрических величин для римановых многообразий достаточно широкого класса, названных F-многообразиями, и выписать основные соотношения между этими величинами. В известных системах построения теоретической фотометрии в трехмерном пространстве ([1,2]) в качестве основной величины, характеризующей стационарное распределение светового поля в свободном пространстве, выступает световое векторное поле $\mathcal{E}$, и раздел, связанный с изучением поля $\mathcal{E}$, называется теорией светового поля. Мы оставили термин "теория светового поля" (т.с.п.) для системы определенных ниже фотометрических величин и соотношений. Представленный вариант т.с.п. соответствует рассмотрению светового поля в пустом (или заполненном поглощающей средой) пространстве, причем основные фотометрические величины зависят также от временного параметра, что позволяет рассматривать вопросы динамики световых потоков (в галилеевой пространственно-временной структуре пространства событий). Кроме того, в этой системе можно устранить определенную асимметрию, свойственную обычным системам построения т.с.п. и состоящую в отсутствии в них формализованного понятия точечно локализованного приемника светового поля, двойственного понятию точечного источника общего (т.е. неизотропного) типа. Фактически приборы с избирательной способностью восприятия света по отношению к направлениям лучей, формирующих световой поток, существуют и простейший из них – камера обскура. Введение в т.с.п. идеализированного представления такого рода приемника света позволяет устранить упомянутую асимметрию, для чего следует перейти к описанию светового поля в терминах величины Π (см. ниже).

Всюду в статье термин "гладкий" означает "C^∞-гладкий". Рассматриваемые гладкие многообразия считаются связными, счетными в бесконечности, ориентируемыми и, если не оговорено противное, многообразиями без края. Если M – гладкое многообразие, то через TM обозначается его касательное расслоение, TM_x – касательное пространство в точке $x \in M$. Для обозначения точек из TM