Доклады Академии наук СССР
1979. Том 244, № 2

УДК 513.832/835

МАТЕМАТИКА

Н. В. ИВАНОВ

ГОМОТОПИИ ПРОСТРАНСТВ АВТОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком Л. Д. Фаддеевым 17 VII 1978)

Изучение гомотопического типа пространств автоморфизмов компактных многообразий (гладких, кусочно-линейных и топологических) привлекает все большее внимание, однако почти все полученные результаты имеют частичный характер и состоят либо в построении нетривиальных элементов гомотопических групп этих пространств (см., например, ([1])), либо в вычислении для них групп π_0 и π_1 (см. например, ([2], [3])), либо в вычислении для них рациональных гомотопических групп «стабильных» размерностей (см. ([4])). Полная информация о гомотопическом типе пространств автоморфизмов имеется лишь для многообразий размерности не более 2 во всех трех категориях и для многообразий Вальдхаузена в кусочно-линейной и топологической категориях. О многообразиях размерности не более 2 см. ([5]), а многообразия Вальдхаузена были независимо рассмотрены в ([6], [7]). Напомним, что многообразия Вальдхаузена — это компактные неприводимые достаточно большие трехмерные многообразия, не допускающие двустороннего вложения проективной плоскости. Все они имеют бесконечную фундаментальную группу.

В настоящей работе вычисляется гомотопический тип пространств кусочно-линейных и топологических автоморфизмов и число компонент связности пространств диффеоморфизмов для некоторых трехмерных многообразий с конечной фундаментальной группой. Среди них все линзы вида $L(4n, 1)$, так что для этих линз получается решение проблемы 33 обзора Кирби ([8]) (которая состоит в вычислении $\pi_0(\mathrm{Diff}(L(m,n)))$).

Основные результаты работы сформулированы в п. 4. В п. 1 напоминаются определения пространств автоморфизмов и вложений; в п. 2 вводятся изучаемые в настоящей работе многообразия и обсуждаются их элементарные свойства; в п. 3 сформулированы две «теоремы разделения». С помощью известных результатов к ним легко сводятся основные теоремы работы; кроме того, они представляют и самостоятельный интерес. Эти теоремы доказываются и в дифференциальной категории.

1. Пространства автоморфизмов и вложений. Пусть M и N — кусочно-линейные многообразия. Напомним, что пространством $\mathrm{PL}(M)$ кусочно-линейных гомеоморфизмов многообразия M называется полусимплициальное множество, k-мерными симплексами которого служат кусочно-линейные гомеоморфизмы $\Delta^k\times M\to\Delta^k\times M$, где Δ^k — стандартный k-мерный симплекс, коммутирующие с проекцией на Δ^k; операторы граней и вырождения определяются очевидным образом. Аналогично определяется пространство $\mathrm{Top}\ (M)$ гомеоморфизмов многообразия M, пространства

$\mathrm{PL}(M,\partial)$ и $\mathrm{Top}(M,\partial)$ кусочно-линейных и топологических автоморфизмов неподвижных на ∂M и пространство $\mathrm{E_{PL}}(N,M)$ кусочно-линейных вложений $N\to M$. Симплексами последнего служат кусочно-линейные вложения $f\colon \Delta^k\times N\to\Delta^k\times M$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Delta^k\times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & \Delta^k\times M \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & \Delta^k & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Аналогичные определения нетрудно дать и в дифференциальной категории, однако под $\mathrm{Diff}(M)$, $\mathrm{Diff}(M,\partial)$ и $\mathrm{E_{Diff}}(N,M)$ (где M и N — гладкие многообразия) можно понимать и просто множества C^∞-диффереоморфизмов и C^∞-вложений соответственно, рассматриваемые в C^∞-топологии.

2. Многообразия $Q(m,n)$. Пусть $S^1=\{x\in C\mid |\varkappa|=1\}$, $T=S^1\times S^1$ и $\tau\colon T\to T$ — инволюция, определяемая формулой $\tau(x,y)=(-x,\bar{y})$. Пусть $K=T/\tau$; ясно, что это бутылка Клейна, и пусть P — цилиндр естественной проекции $T\to K$. Очевидно, P является многообразием с краем T. Для целочисленной унимодулярной матрицы $a=\begin{pmatrix} m & n\\ p & q\end{pmatrix}$ определим гомеоморфизм $f_a\colon T\to T$ формулой $f_a(x,y)=(x^my^n,\ x^py^q)$. Интересующие нас многообразия получаются в результате склеивания P с $D^2\times S^1$ по всевозможным f_a. Заметим, что если для гомеоморфизмов f, $g\colon S^1\times S^1\to S^1\times S^1$ гомеоморфизм $f\circ g^{-1}$ продолжается на $D^2\times S^1$, то результаты склеивания P с $D^2\times S^1$ по f и g гомеоморфны. Поэтому результат склеивания по f_a, где $a=\begin{pmatrix} m & n\\ p & q\end{pmatrix}$, зависит лишь от m и n; его мы обозначим $Q(m,n)$. (В качестве m и n здесь могут выступать любые взаимно простые целые числа).

Многообразия $Q(m,n)$ — это в точности замкнутые ориентируемые трехмерные неприводимые многообразия, допускающие одностороннее вложение бутылки Клейна и не являющиеся при этом достаточно большими. Фундаментальная группа многообразия $Q(m,n)$ допускает следующее представление образующими и соотношениями:

$$\pi_1(Q(m,n))=\{a,b\mid abab^{-1}=1,\ a^nb^{2m}=1\}.$$

Она конечна и имеет порядок $4mn$. Универсальное накрывающее многообразие $Q(m,n)$ является сферой. Многообразие $Q(-1,2)$ — кватернионное пространство, т. е. фактор трехмерной сферы по группе восьми кватернионов.

Предложение. *Многообразие $Q(m,1)$ является линзой $L(4m,1)$.*

Для доказательства возьмем на K простую замкнутую кривую — образ окружности $S^1\times 1$ при проекции $T\to K$. Ее трубчатая окрестность в $Q(m,1)$ является полноторием, и легко проверить, что замкнутое дополнение этой трубчатой окрестности тоже будет полноторием, так что $Q(m,1)$ — линза. Более детальное исследование этого разбиения многообразия $Q(m,1)$ на два полнотория позволяет выяснить тип этой линзы.

3. Теоремы разделения. В теоремах этого пункта под E можно понимать как $\mathrm{E_{PL}}$, так и $\mathrm{E_{Diff}}$.

Теорема 3.1. *Если ни m, ни n не равно ± 1, то включение* $\mathrm{E}(K,P)\hookrightarrow \mathrm{E}(K,Q(m,n))$ (*P естественно лежит в $Q(m,n)$*) *является слабой гомотопической эквивалентностью.*

Теорема 3.2. $\pi_i(\mathrm{E}(K,Q(m,1)),\ \mathrm{E}(K,P))=0$ *при* $i\neq 1$, $\pi_1(\mathrm{E}(K,Q\times \times(m,1)),\ \mathrm{E}(K,P))=Z$ (*образующая в последней группе может быть явно указана*).

Поскольку $\mathrm{E}(K,P)=E(K,Q(m,n)\setminus T)$, эти теоремы можно рассматривать как теоремы разделения: теорема 3.1 утверждает, что при $m,n\neq \neq\pm 1$ любое семейство бутылок Клейна, лежащих в $Q(m,n)$, можно столкнуть с тора T, а теорема 3.2 утверждает, что при $n=1$ к этому имеется единственное препятствие.

Теоремы 3.1 и 3.2 играют в доказательстве основных теорем настоящей работы (теорем 4.1, 4.2) роль, аналогичную роли теорем разделения несжимаемых поверхностей в доказательстве соответствующих теорем о многообразиях Вальдхаузена (см. ([9], [6], [7])). Поверхность K не является несжимаемой в $Q(m,n)$ — она лежит там односторонне и к тому же гомоморфизм включения $\pi_1(K)\to\pi_1(Q(m,n))$ не инъективен. Одно из ее свойств, заменяющих несжимаемость, состоит в том, что простая замкнутая кривая на поверхности K, гомотопная нулю в $Q(m,\ n)$, гомотопна нулю и в K.

Доказательство теоремы 3.1 аналогично, но несколько сложнее доказательства теоремы 1 из ([7]).

Теорема 3.2 на основе известных теорем о многообразиях Вальдхаузена сводится к следующему утверждению.

Теорема 3.3. *Пусть X — образ при проекции $T\to K$ множества $S^1\times \times\{-1,1\}$. Обозначим через $\mathrm{E}_X(K,Q(m,1))$ пространство вложений $K\to \to Q(m,1)$, неподвижных на X.*

Тогда включение $\mathbf{E}_X(K,Q(m,1))\hookrightarrow\mathbf{E}(K,Q(m,1))$ *является слабой гомотопической эквивалентностью.*

4. Гомотопии пространств $\mathrm{PL}(Q(m,n))$, $\mathrm{Top}\,(Q(m,n))$ и $\mathrm{Diff}\,(Q(m,n))$.

Теорема 4.1. *Если ни m, ни n не равно ± 1, то пространства* $\mathrm{PL}(Q(m,\ n))$ *и* $\mathrm{Top}\,(Q(m,\ n))$ *стягиваемы, а пространство* $\mathrm{Diff}\,(Q(m,n))$ *связно.*

Теорема 4.2. *Пространства* $\mathrm{PL}\,(L(4m,\ 1))=\mathrm{PL}\,(Q(m,\ 1))$ *и* $\mathrm{Top}\,(L(4m,\ 1))=\mathrm{Top}\,(Q(m,\ 1))$ *гомотопически эквивалентны окружности. Пространство* $\mathrm{Diff}(L(4m,\ 1))=\mathrm{Diff}\,(Q(m,\ 1))$ *связно.*

Утверждения о гомотопическом типе пространства $\mathrm{PL}\,(Q(m,\ n))$ стандартным образом выводятся из теорем 3.1 и 3.2; стр. ([6], [7]). При этом используется стягиваемость пространства $\mathrm{PL}\,(D^3,\ \partial)$ (прием Александера) и стягиваемость пространства $\mathrm{PL}\ (M,\ \partial)$ для некоторых многообразий Вальдхаузена M, лежащих в $Q(m,\ n)$, в частности для $M=D^2\times S^1$.

Утверждения же о гомотопическом типе пространства $\mathrm{Top}\,(Q(m,\ n))$ непосредственно вытекают из соответствующих утверждений о $\mathrm{PL}(Q\times \times(m,\ n))$ и Top/PL — теоремы сравнения Бургелеа — Лашофа — Морле, см. ([1]) и (([10]), Essay V).

Если верна «гипотеза Смейла», т. е. если пространство $\mathrm{Diff}\,(D_-^3\partial)$ стягиваемо, то в теоремах 4.1 и 4.2 к PL и Top можно присоединить и Diff. Это можно вывести как из PL/Diff — теоремы сравнения Бургелеа — Лашофа — Морле, так и прямо из теорем 3.1 и 3.2. Поскольку связность пространства $\mathrm{Diff}(D_-^3\partial)$ доказана (теорема Серфа ([11])), каждый из этих путей приводит к доказательству связности пространства Diff$(Q(m, n))$.

Автор благодарит В. А. Рохлина за внимание к работе.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
7 VIII 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *D. Burghelea, R. Lashof*, Trans. AMS, v. 196, 1 (1974). [2] *A. Hatcher, J. Wagoner*, Asterisque, v. 6 (1973). [3] *W. C. Hsiang, R. W. Sharpe*, Pacif. J. Math., v. 67, № 2, 401 (1976). [4] *J.-L. Loday*, Seminaire Bourbaki, Exp. 516 (1978). [5] *A. Gramain*, ibid, Exp. 426 (1973). [6] *A. Hatcher*, Topology, v. 15, 343 (1976). [7] *Н. В. Иванов*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 66, 172 (1976). [8] *R. Kirby*, Proc. Symp. in Pure Math., v. 32 (1978). [9] *F. Laudenbach*, Asterisque, v. 12 (1974). [10] *R. Kirby, L. Siebenmann*, Ann. Math. Studies, v. 88 (1977). [11] *J. Cerf*, Lecture Notes in Math.

ПОПРАВКИ

В нашей статье (О.С. Филипенко, В.И. Пономарев, Л.О. Атовмян "Кристаллическая и молекулярная структура дейтерированного азоксифенетола"), опубликованной в ДАН, т. 242, № 1, 1978 г., на стр. 99, строки 9 и 13 сверху, вместо напечатанного $C_{16}D_{18}N_2O_8$ и $\gamma = 61°51'(3)$ следует читать $C_{16}D_{18}N_2O_3$ и $\gamma = 62°51'(3)$ соответственно.

О.С. Филипенко, В.И. Пономарев, Л.О. Атовмян

В моей статье (Н.В. Иванов "Гомотопии пространств автоморфизмов некоторых трехмерных многообразий"), опубликованной в ДАН, т. 244, № 2, 1979 г., допущено несколько неточностей.

1. Вместо $L(4m, 1)$ всюду следует читать $L(4m, 2m-1)$.
2. Во всех четырех теоремах предполагается, что $m \neq \pm 1$ и $n \neq \pm 2$.
3. Гомотопический тип пространств автоморфизмов, рассматриваемых в теоремах 4.1 и 4.2, отличается от указанного дополнительным множителем $S^1 \times (S^0)^2$. Таким образом, если $m, n \neq \pm 1$ и $n \neq \pm 2$, то пространство $\mathrm{PL}(Q(m, n))$ гомотопически эквивалентно пространству $S^1 \times (S^0)^2$, а $\mathrm{PL}(L(4m, 2m-1))$ гомотопически эквивалентно $(S^1)^2 \times (S^0)^2$.

Н.В. Иванов

В нашей статье (А.А. Литманович, Е.В. Ануфриева, И.М. Паписов, В.А. Кабанов "Узнавание" стереоизомеров в реакциях комплексообразования между макромолекулами в разбавленных растворах"), опубликованной в ДАН, т. 246, № 4, 1979 г., в подписи к рис. 1 (стр. 925) вместо ПМАК-1 и ПМАК*-1 всюду следует читать ПМАК-2 и ПМАК*-2 и наоборот.

А.А. Литманович, Е.В. Ануфриева, И.М. Паписов, В.А. Кабанов

Технический редактор *Л.В. Русская*

Подписано к печати 05.12.79 Т – 11797 Формат бумаги 70x100 1/16
Офсетная печать Усл.печ.л. 20,8 + 0,1 вкл. Уч.-изд.л. 23,3 Тираж 3615 экз. Зак. 971

Издательство "Наука", 117864 ГСП–7, Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90;
Ордена Трудового Красного Знамени 1-типография издательства "Наука",
199034, Ленинград, В-34, 9-я линия, 12