ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ ВАЛЬДХАУЗЕНА

Н.В.Иванов

I. <u>Обозначения и определения</u>. Мы употребляем дифференциально-топологическую C^∞ - терминологию. Пусть V - компактное многообразие, F - его подмногообразие, N и A - замкнутые множества в V и F соответственно. Мы обозначаем через $\mathcal{D}iff(V,N)$ группу всех диффеоморфизмов многообразия V, неподвижных на ∂V и N, через $Em_A(F,V)$ - множество вложений многообразия F в V, совпадающих на ∂F и A с включением, и через $H(V)$ - множество гомотопических эквивалентностей многообразия V, неподвижных на ∂V; $\mathcal{D}iff(V,N)$ и $Em_A(F,V)$ наделяются C^∞ - топологией, а $H(V)$ - компактно-открытой топологией. Положим $\mathcal{D}iff(V) = \mathcal{D}iff(V,\varnothing)$.

Пусть V - компактное трехмерное многообразие. Поверхность (компактное двумерное подмногообразие) F в V называется с о б с т в е н н о й, если $\partial F = \partial V \cap F$ и F трансверсальна к ∂V. Она называется н е с ж и м а е м о й, если: (i) F является связной, собственной и лежит в V двусторонне; (ii) F не является краем стягиваемого подмногообразия и либо F не является диском, либо включение $(F,\partial F) \to (V,\partial V)$ не допускает гомотопии в отображение с образом, лежащим в V; (iii) гомоморфизм включения $\pi_1(F) \to \pi_1(V)$ является мономорфизмом.

Многообразие V называется н е п р и в о д и м ы м, если всякая вложенная в V двумерная сфера ограничивает в V шар. Оно называется м н о г о о б р а з и е м В а л ь д х а у з е н а, если V неприводимо, содержит несжимаемую поверхность и $\mathbb{R}P^2$ не вкладывается в V двусторонне.

2. <u>История вопроса</u>. Если N - подмногообразие многообразия V, то $\mathcal{D}iff(V,N)$ обладает структурой многообразия Фреше; см.Лесли [9]. В частности, в этом случае $\mathcal{D}iff(V,N)$ имеет гомотопический тип счетного клеточного пространства (счетного „CW - комплекса") и определяется своим гомотопическим типом с точностью до гомеморфизма; см.Бургелеаи Кюйпер [3]. Гомотопический тип $\mathcal{D}iff(V)$ изучался в ряде работ. Первыми были результаты Милнора о $\pi_0\mathcal{D}iff(S^n)$ (см. [7], [10]). На их основе Новиковым [II], Антонелли, Бургелеа и Каном [I] и другими авторами была доказана нетривиальность большого числа гомотопических

групп $\pi_i \mathrm{Diff}(V)$ для $V = D^n$ и некоторых других V.

Полная информация о гомотопическом типе $\mathrm{Diff}(V)$ имеется лишь в немногих случаях. В существенном они сводятся к следующему. Хорошо известно (и легко доказывается), что $\mathrm{Diff}(S^1) \approx S^1$. Смейлом [12] доказано, что $\mathrm{Diff}(S^2) \approx O(3)$, для остальных замкнутых поверхностей гомотопический тип группы диффеоморфизмов вычислен Иисом и Ирлом [5]. Что касается трехмерного случая, то Акиба [2] анонсировал доказательство гипотезы Смейла, согласно которой $\mathrm{Diff}(D^3)$ стягиваема (автор не знаком с ним, поэтому теоремы 2 и 3 ниже формулируются с осторожностью).

Кроме этого в трехмерном случае имеются частичные результаты. Лауденбах получил значительную информацию о $\pi_0 \mathrm{Diff}(S^1 \times S^2 \# \dots \# S^1 \times S^2)$. В случае, когда V - многообразие Вальдхаузена, Вальдхаузен и Лауденбах свели вычисление $\pi_0 \mathrm{Diff}(V)$ к гомотопической задаче, а Лауденбах доказал, что $\pi_1 \mathrm{Diff}(V, \{v\}) = 0$, где $v \in V$. Изложение этих результатов имеется у Лауденбаха [8].

3. Основные результаты. Пусть V - многообразие Вальдхаузена.

ТЕОРЕМА I. (теорема разделения). Пусть F - несжимаемая поверхность в V и F' - результат малого сдвига F вдоль нормального поля. Если $v \in F$, то включение

$$Em_{\{v\}}(F, V \setminus F') \subset Em_{\{v\}}(F, V)$$

индуцирует изоморфизм гомотопических групп.

Предположим теперь, что верна гипотеза Смейла.

ТЕОРЕМА 2. (основная теорема). Если $\partial V \neq \emptyset$, то компоненты группы $\mathrm{Diff}(V)$ стягиваемы. Если $\partial V \neq \emptyset$ и $v \in V$, то компоненты группы $\mathrm{Diff}(V, \{v\})$ стягиваемы.

ТЕОРЕМА 3. Включение $\mathrm{Diff}(V) \subset H(V)$ является гомотопической эквивалентностью.

Теорема 3 является легким следствием теоремы 2. Теорема 2 выводится без большого труда из теоремы I и существования иерархий Хакена на многообразиях Вальдхаузена [6]. Главную трудность представляет теорема разделения, имеющая и самостоятельный интерес. Наброску ее доказательства посвящен пункт 4. Ее можно интерпретировать как утверждение, что любое конечнопараметрическое семейство вложений $F \to V$ можно столкнуть с F'. Ее частный случай был доказан Лауденбахом [8], который построил сталкивания 0 и I - параметрических семейств.

4. Основные этапы доказательства теоремы разделения. Доказа-

тельство состоит из двух частей. Сначала строится более или менее каноническая сталкивающая изотопия для одного вложения. Потом из нескольких таких изотопий склеивается сталкивание целого семейства.

4а. <u>Накрытие</u>. Обозначим через $p : (V^{\sim}, w) \to (V, v)$ накрытие, ассоциированное с образом группы $\pi_1(F, v)$ в $\pi_1(V, v)$. Положим $F'' = p^{-1}(F)$ и обозначим через Π множество компонент многообразия F''. Каждая поверхность C из Π делит $V^{\sim}$ на две части X_C и Y_C; через X_C мы обозначаем ту часть, которая содержит w. Отношение $Y_C \subset Y_D$ определяет отношение порядка $D < C$ на Π.

Использовать эту конструкцию для доказательства теоремы разделения предложил Лауденбах [8].

4б. <u>Вложения общего вида</u>. Точку y из F мы будем называть **особой** для вложения $f : F \to V$, если f не трансверсально к F' в y. Особую точку y вложения f будем называть **конечнократной**, если росток в $f(y)$ четверки $(V, F', f(F), f(y))$ диффеоморфен ростку в 0 некоторой четверки вида $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \times 0, \Gamma, 0)$ с Γ, являющимся графиком функции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такой, что 0 – ее конечнократная критическая точка. Будем говорить, что вложение f – общего вида, если все его особые точки конечнократные.

Дополнение в $Em_{\{v\}}(F, V)$ до множества вложений общего вида имеет коразмерность ∞ и потому для доказательства теоремы разделения достаточно столкнуть с F' конечнопараметрическое семейство вложений общего вида.

4в. ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $f : F \to V$ вложение общего вида, изотопное связанно на v включению $F \subset V$, $f^{\sim} : F \to V^{\sim}$ – такое его поднятие, что $f^{\sim}(v) = w$, A – замкнутое множество в $V^{\sim}$ и пусть C – компонента многообразия F''. Если $A \cap f^{\sim}(F) = \emptyset$, $C \cap f^{\sim}(F) \neq \emptyset$ и $D \cap f^{\sim}(F) = \emptyset$ при $C < D$, то существуют вложение $g : F \to V^{\sim}$ трансверсальное к F'', компонента G множества $g(F) \setminus F''$ и компактное многообразие с углами W в $V^{\sim}$ такие, что: (i) $g(v) = w$ и $p \circ g$ – вложение; (ii) $\overline{G}$ пересекается ровно с одной компонентой многообразия F'' и $\partial W = G \cup (\partial W \cap F'')$; (iii) $\overline{G} \cap (A \cup f^{\sim}(F)) = \emptyset$, $\partial W \cap F'' \cap f^{\sim}(F) \neq \emptyset$;

(iv) либо $\partial \overline{G} \subset C$ и $W \subset Y_C$ либо существует диск E такой, что $G \subset E \subset g(F)$; (v) если компонента S многообразия $\partial \overline{G}$ ограничивает в F'' диск D_S, то либо $D_S \cap W = S$, либо существует диск E_S такой, что $\partial E_S = S$ и $G \subset E_S \subset g(F)$.

(Диск $E_s \subset \partial E_s = S$ и $G \subset E_s \subset q(F)$ существует не более чем для одной компоненты S многообразия $\partial \bar{G}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на изучении аппроксимаций вложения f вложениями, трансверсальными к F' .

4г. <u>Сталкивающие изотопии</u>. В ситуации основной леммы сужение $p|_W$ является вложением. Выберем вложение $\varphi: F' \times [0,1] \to V$ такое, что $\varphi^{-1}(p(\bar{G})) = p(\partial \bar{G}) \times [0,1]$.

Для каждой компоненты S многообразия $p(\partial \bar{G})$ ограничивающей в F' диск D_s такой, что $D_s \cap p(W) = S$, добавим к многообразию $p(W)$ цилиндр $\varphi(D_s \times [0, \varepsilon_s])$, где $0 < \varepsilon_s < 1$, и сгладим у полученного многообразия углы, не лежащие на F' . В результате получим многообразие Z , являющееся тривиальным кобордизмом между $\partial Z \cap F'$ и $\overline{\partial Z \setminus F'}$. С его помощью можно построить изотопию многообразия V ,переводящую $\overline{\partial Z \setminus F'}$ в $\partial Z \cap F'$. Из утверждения (iii) следует, что если числа ε_s достаточно малы, то эта изотопия в некотором смысле (который мы здесь не уточняем) упрощает пересечение образа вложения f с F' . Поэтому, последовательно выполнив несколько таких изотопий, мы столкнем вложение с F' .

4д. <u>Сталкивание семейства</u>. Мы ограничимся случаем однопараметрического семейства (ср.Лауденбах [8]); общий случай аналогичен, но довольно громоздок. Построим сталкивающую изотопию для каждого вложения из семейства. Изотопия, сталкивающая некоторое вложение, сталкивает и все близкие вложения. Поэтому можно выбрать несколько изотопий λ^i и разбиение $\{T_i\}$ области определения семейства на замкнутые отрезки так, что λ^i сталкивает f_t при $t \in T_i$, где $\{f_t : t \in T\}$ - рассматриваемое семейство. Если $t \in T_i \cap T_j$ и $i \neq j$, то имеются две изотопии, сталкивающие f_t . Их можно рассматривать как отображение $\lambda: I \times 0 \cup 0 \times I \to \operatorname{Diff}(V)$. Чтобы построить нужное сталкивание, достаточно продолжить это отображение на I^2 так, чтобы $\lambda(x) \circ f_t \in \operatorname{Em}_{\{v\}}(F, V \setminus F')$ при $x \in I \times 1 \cup 1 \times I$. Такое продолжение составляется из отображений $\sigma: I^2 \to \operatorname{Diff}(V)$ вида $\sigma(t_1, t_2) = \lambda_1(t_1) \circ \lambda_2(t_2)$, где λ_1 и λ_2 или построены с помощью основной леммы, как в 4г, или оставляют F' неподвижной.

(В случае многопараметрического семейства употребляются отображения вида $\sigma(t_1, \ldots, t_n) = \lambda_1(t_1) \circ \ldots \circ \lambda_n(t_n)$).

5. Автор благодарит своего руководителя профессора В.А.Рохлина за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. A n t o n e l l i P., B u r g h e l e a D., K a h n P.J., The non-finite homotopy of some Diff.-Topology. 1972, 11, N 1, p.1-49.
2. A k i b a T . Homotopy types of some PL -complexes. - Bull.Amer.Math.Soc., 1971, 77, N 6, 1060-1062.
3. B u r g h e l e a D., K u i p e r N., Hilbert manitolds. - Ann.Math., 1969, 90, N 2, p.379-417.
4. C e r f J., Sur les diffeomorphismes de la sphere de dimension trois $(\Gamma_4 = 0)$. - Lect.Not.Math., N 53.
5. E e l l s J., E a r l e C.J. A fibre bundle description of Teichmuller theory. - J.Different.Geometry, 1969, 3, N 1, p.19-43.
6. H a k e n W., Uber das Homeomorphie problem der 3-Mannigfaltigkeiten I. - Math.Z., 1962, 80, N 2, p.89-120.
7. K e r v a i r e M.A., M i l n o r J.W., Groups of homotopy spheres I. - Ann.Math., 1963, 77, N 2, p.504-573.
8. L a u d e n b a c h F. Topologie de la dimension trois homotopie et izotopic. - Asterisque, 1974, 12.
9. L e s l i e J., On a differential structure for the group of diffeomorphisms. - Topology. 1967, 6, p.263-271.
10. M i l n o r J.W., On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. - Ann.Math., 1956, 64, N 2, p.399-405.
11. Н о в и к о в С.П. Дифференцируемые пучки сфер. - Изв. АН СССР, сер.мат., I965, 29, № I, с.7I-96.
12. S m a l e S., Diffeomorphisms of the 2- sphere. - Proc. Amer.Math.Soc., 1959, 10, N 4, p.621-629.

Ivanov N.V. Diffeomorphism groups of Waldhausen manifolds.

The author describs the homotopy type of the group of diffeomorphisms of some 3-dimensional manifolds and studies the space of incompressible surfaces in these manifolds.