

4. Síntesis del problema elástico y Métodos de resolución

Con lo visto en el capítulo anterior se completa el modelo matemático de la Teoría de la Elasticidad Lineal y sus hipótesis definen las condiciones en las que resulta adecuado. Ahora se discutirá cómo resolver las ecuaciones derivadas de ese modelo, tanto por vía analítica como numérica, procediendo de la siguiente manera:

- 4.1. Se hará una **síntesis del problema** reuniendo todas las ecuaciones, tal como fueron deducidas, y se comentarán dos casos particulares: los estados de tensión y deformación plana.
- 4.2. Se utilizará el **Método de las Tensiones** para resolver por primera el problema, por vía analítica, y comprender cabalmente lo que significa “encontrar la solución de las ecuaciones”.
- 4.3. Se planteará el **Método de los Desplazamientos** como alternativa para sortear algunas dificultades del anterior, todavía analíticamente y sin modificar el formato de las ecuaciones.
- 4.4. Se deducirán **Formatos Convenientes** para las ecuaciones, según el método de resolución escogido, aprovechando las relaciones que vinculan a las incógnitas del problema.
- 4.5. Se comentarán intuitivamente las ideas básicas para obtener soluciones aproximadas con métodos numéricos tales como el de **Diferencias Finitas** (MDF) y de **Elementos Finitos** (MEF).

4.1. Síntesis del problema elástico

El problema elástico se planteará primero en su forma más general para luego abordar dos casos particulares muy frecuentes en la práctica: los estados planos de tensión y deformación.

GEOMETRIA

Se comienza por una completa definición de la geometría de la pieza a analizar (dominio), compuesta de un **volumen** encerrado por superficies en su **contorno**. Se trata de un problema naturalmente tridimensional aunque en ciertos casos particulares, tales como los estados planos de tensión o deformación, es reducible a dos dimensiones o incluso una.

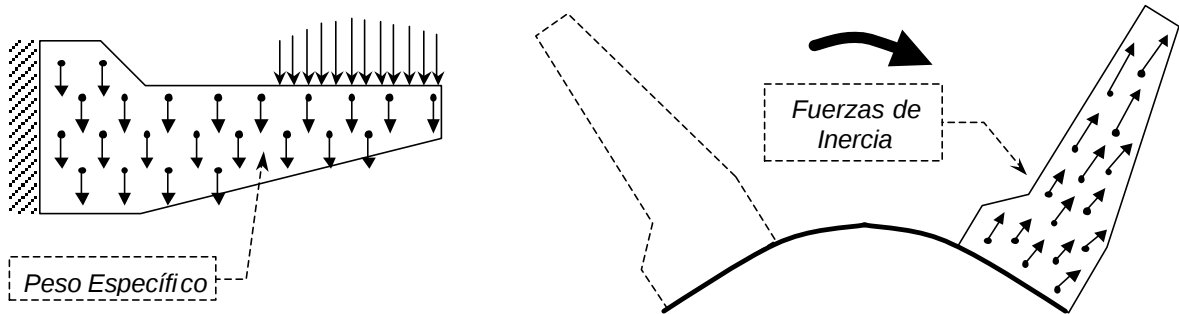
MATERIAL

Se define el material de la pieza especificando los valores de sus constantes elásticas “E, G, ν ”, recordando que sólo dos de ellas son independientes. La teoría impone que el material sea:

- Continuo
- Isótropo
- Perfectamente elástico
- Homogéneo
- Linealmente deformable

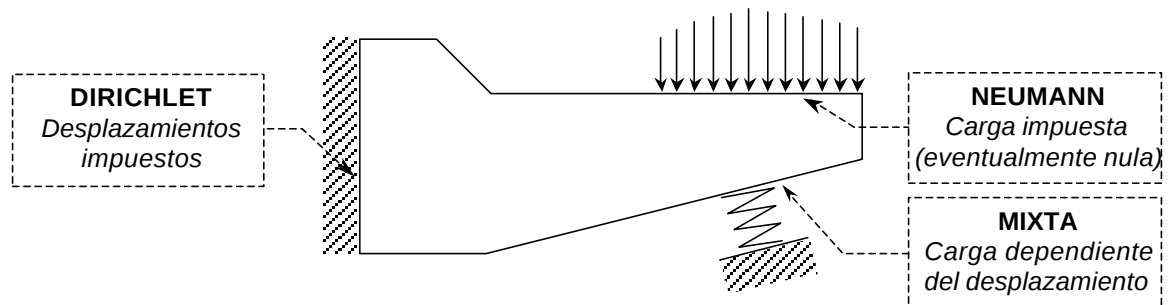
FUERZAS MASICAS

Las **cargas por unidad de volumen** (fuerzas másicas) que afectan a cada porción del material en estudio son otros datos necesarios para definir el problema. El caso más sencillo lo constituye el **peso específico** (Densidad x Aceleración de la Gravedad) que se incluye cuando no es despreciable en comparación con las cargas externas. Otro caso típico, adicionable al anterior, es el de las **fuerzas de inercia** presentes en mecanismos sujetos a grandes aceleraciones. Un estudio cinemático y dinámico previo permite calcular estos esfuerzos, en ocasiones bastante complejos, para incorporarlos luego como **datos del problema elástico** a resolver.



CONDICIONES DE CONTORNO

Todos los puntos del contorno de la pieza “sin excepción” deben tener algún tipo de condición especificada. Las llamadas condiciones **Dirichlet** imponen **Desplazamientos** en los puntos correspondientes: pueden ser nulos, como en un empotramiento, o no nulos, como al forzar cotas de montaje. Se asocian a direcciones específicas (no necesariamente a todas) lo cual da lugar a situaciones en las que se imponen desplazamientos en una dirección y cargas en la otra, como en un apoyo deslizante. Las condiciones **Neumann** imponen **Cargas** en los respectivos puntos y en direcciones específicas. Un sector de contorno en el cual “no haya nada” posee, en realidad, una condición Neumann de carga nula.



Existen también condiciones de contorno **Mixtas** que imponen **Cargas dependientes de los Desplazamientos** de los puntos, tal como sucede en los apoyos elásticos. Los mismos proveen una carga o reacción (desconocida a priori) que depende del desplazamiento que experimenta ese punto (que es una incógnita del problema).

INCOGNITAS

Las incógnitas del problema son “funciones tensoriales y vectoriales definidas en todo el dominio” descriptas a través de sus componentes en cierto sistema de coordenadas adoptado para el cálculo: la **tensión** (seis funciones componentes de un tensor), la **deformación** (seis funciones componentes de un tensor) y los **desplazamientos** (tres funciones componentes de un vector). Estas incógnitas no son todas independientes dado que existen relaciones que las vinculan.

ECUACIONES CINEMATICAS

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & g_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & g_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & g_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

Las ecuaciones cinemáticas permiten obtener las deformaciones en función de los desplazamientos, con la sola condición de que estos últimos sean continuos. Para el camino inverso, obtener desplazamientos continuos a partir de las deformaciones, es necesario verificar ciertas relaciones a cumplir entre las componentes de la deformación (ecuaciones de compatibilidad).

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 g_{xz}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial g_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

La Ley de Hooke, en sus formas directa e inversa, relaciona a las tensiones con las deformaciones. La inclusión de las ecuaciones cinemáticas en esta ley provee una relación directa entre tensiones y desplazamientos (sus derivadas).

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + l & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 2G + l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 2G + l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} = \partial u / \partial x \\ e_{yy} = \partial v / \partial y \\ e_{zz} = \partial w / \partial z \\ g_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ g_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ g_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{Bmatrix}$$

Nota: Usando la ley de Hooke pueden escribirse las ecuaciones de compatibilidad en función de las componentes de tensión. Así se muestra que las tensiones también deben ser "compatibles" y que se relacionan mutuamente de forma similar a las deformaciones. Este hecho podía intuirse notando que entre deformaciones y tensiones sólo median valores constantes (las constantes elásticas del material) y, por ende, son funciones equivalentes.

ECUACIONES PARA PUNTOS DEL VOLUMEN

Todos los puntos del volumen deben **verificar el equilibrio entre componentes de tensión y fuerzas másicas** expresado por las Ecuaciones Diferenciales del Equilibrio en Volumen obtenidas a partir de sumatorias de fuerzas y momentos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

ECUACIONES PARA PUNTOS DEL CONTORNO

Todos los puntos del contorno con condiciones Neumann deben **verificar el equilibrio entre componentes de tensión y cargas impuestas** y todos los puntos del contorno con condiciones Dirichlet deben **verificar la compatibilidad con los desplazamientos impuestos**.

$$\bar{S}_n = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{n\ x} \\ \bar{S}_{n\ y} \\ \bar{S}_{n\ z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

en contornos Γ_s

$$\text{en } \Gamma_u \begin{cases} u_{(x,y,z)} = \bar{u} \\ v_{(x,y,z)} = \bar{v} \\ w_{(x,y,z)} = \bar{w} \end{cases}$$

POSTPROCESOS

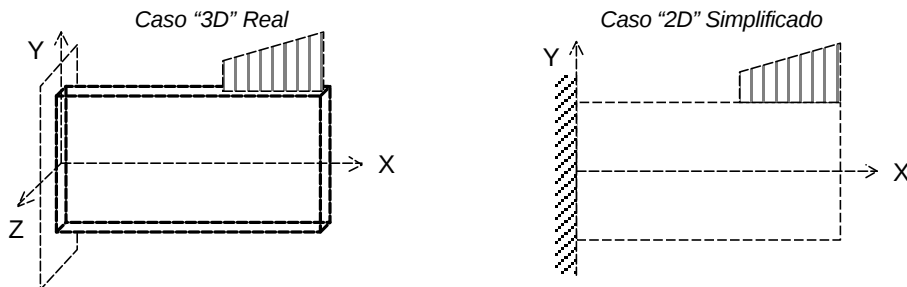
Habitualmente se denominan postprocesos a ciertas operaciones posteriores a la determinación de las incógnitas fundamentales del problema. Algunos permiten completar los resultados (ejemplo: cálculo de reacciones de apoyo) y otros los reelaboran para facilitar su interpretación (ejemplo: cálculo de tensiones principales y equivalentes). Una parte fundamental de los postprocesos son las salidas gráficas de las diversas magnitudes obtenidas.

Comentario sobre estados planos

Los llamados estados planos de tensión o deformación son simplificaciones, aceptables en ciertas circunstancias especiales, que permiten tratar el problema elástico (realmente tridimensional) como si fuese bidimensional. Existen otras posibles simplificaciones, aplicables a sólidos de revolución, placas, láminas, vigas, etc., que reducen las dimensiones del problema particularizando las ecuaciones tridimensionales generales de la teoría de la elasticidad.

Estado plano de TENSIONES

Este estado se caracteriza por la nulidad de la tensión normal en la dirección “z” (no de la deformación asociada) y la nulidad de componentes cortantes en los planos “zx” e “zy” (lo cual implica distorsiones nulas). Una pieza se encuentra en este estado si su dimensión según “z” (espesor) es notablemente inferior a las otras dos (largo y ancho) y todas las cargas están contenidas en su plano medio “xy”. El equilibrio de los contornos normales al eje “z” revela que la tensión normal “z” y las cortantes “zx” y “zy” son nulas porque no hay carga externa. Por ello es aceptable pensar que, si a uno y otro lado de un “pequeño espesor” estas tensiones son nulas, no adoptarán valores importantes hacia el interior del mismo.



Las **ecuaciones particularizadas para el estado de tensión plana** se obtienen haciendo nulas las tensiones mencionadas en las ecuaciones de la elasticidad y tienen la siguiente forma:

Equilibrio en volumen:

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + Y = 0$$

Equilibrio en contorno:

$$\bar{S}_n = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{nx} \\ \bar{S}_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}$$

Ecuaciones cinemáticas:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Compatibilidad en volumen:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Compatibilidad en contorno:

$$\left. \begin{matrix} u_{(x,y)} = \bar{u} \\ v_{(x,y)} = \bar{v} \end{matrix} \right\} \text{ en } \Gamma_u$$

Ley de Hooke "inversa":

$$e_{xx} = \frac{1}{E} s_{xx} - \frac{n}{E} s_{yy}$$

$$e_{yy} = -\frac{n}{E} s_{xx} + \frac{1}{E} s_{yy}$$

$$e_{zz} = -\frac{n}{E} s_{xx} - \frac{n}{E} s_{yy}$$

$$g_{xy} = \frac{1}{G} s_{xy}$$

Ley de Hooke "directa":

$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-n^2) & nE/(1-n^2) & 0 \\ nE/(1-n^2) & E/(1-n^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \end{Bmatrix}$$

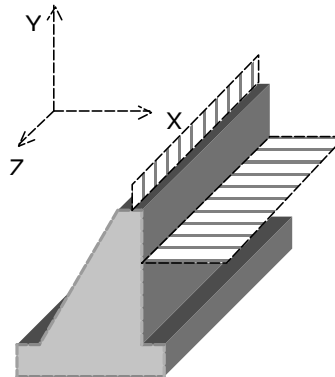
Nota:

En el estado de tensión plana todas las incógnitas son funciones sólo de "x" y de "y", incluso la deformación longitudinal según "z". El movimiento "w" y la deformación según "z" existen pero están "desacopladas del problema" por lo que no se requieren para obtener la solución y pueden calcularse luego, durante el postproceso.

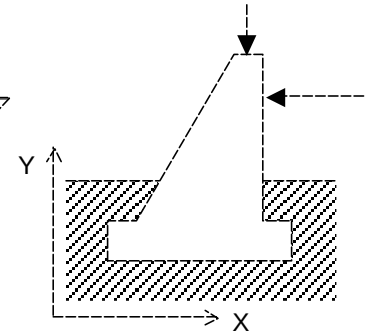
Estado plano de DEFORMACIONES

En este estado son nulas la deformación según "z" (no la tensión normal asociada) y las distorsiones en los planos "zx" e "zy" (lo cual implica tensiones cortantes nulas). Es propio de piezas prismáticas en la dirección "z" donde todas las secciones contenidas en planos "xy" estén igualmente cargadas (y vinculadas) y los extremos inmovilizados según "z" ($w=0$ en ambos). Las

ecuaciones de deformación plana se obtienen anulando las deformaciones mencionadas y sólo difieren de las de tensión plana en la forma de la Ley de Hooke. Todas las incógnitas dependen sólo de "x" y de "y" y la tensión normal según "z" puede calcularse a posteriori ya que es función de las otras dos.



Caso "3D" Real



Caso "2D" Simplificado

Ley de Hooke "inversa":

$$e_{xx} = \frac{1}{E} s_{xx} - \frac{n}{E} s_{yy} - \frac{n}{E} s_{zz}$$

$$e_{yy} = -\frac{n}{E} s_{xx} + \frac{1}{E} s_{yy} - \frac{n}{E} s_{zz}$$

$$g_{xy} = \frac{1}{G} s_{xy}$$

$$e_{zz} = -\frac{n}{E} s_{xx} - \frac{n}{E} s_{yy} + \frac{1}{E} s_{zz} = 0$$

Ley de Hooke "directa":

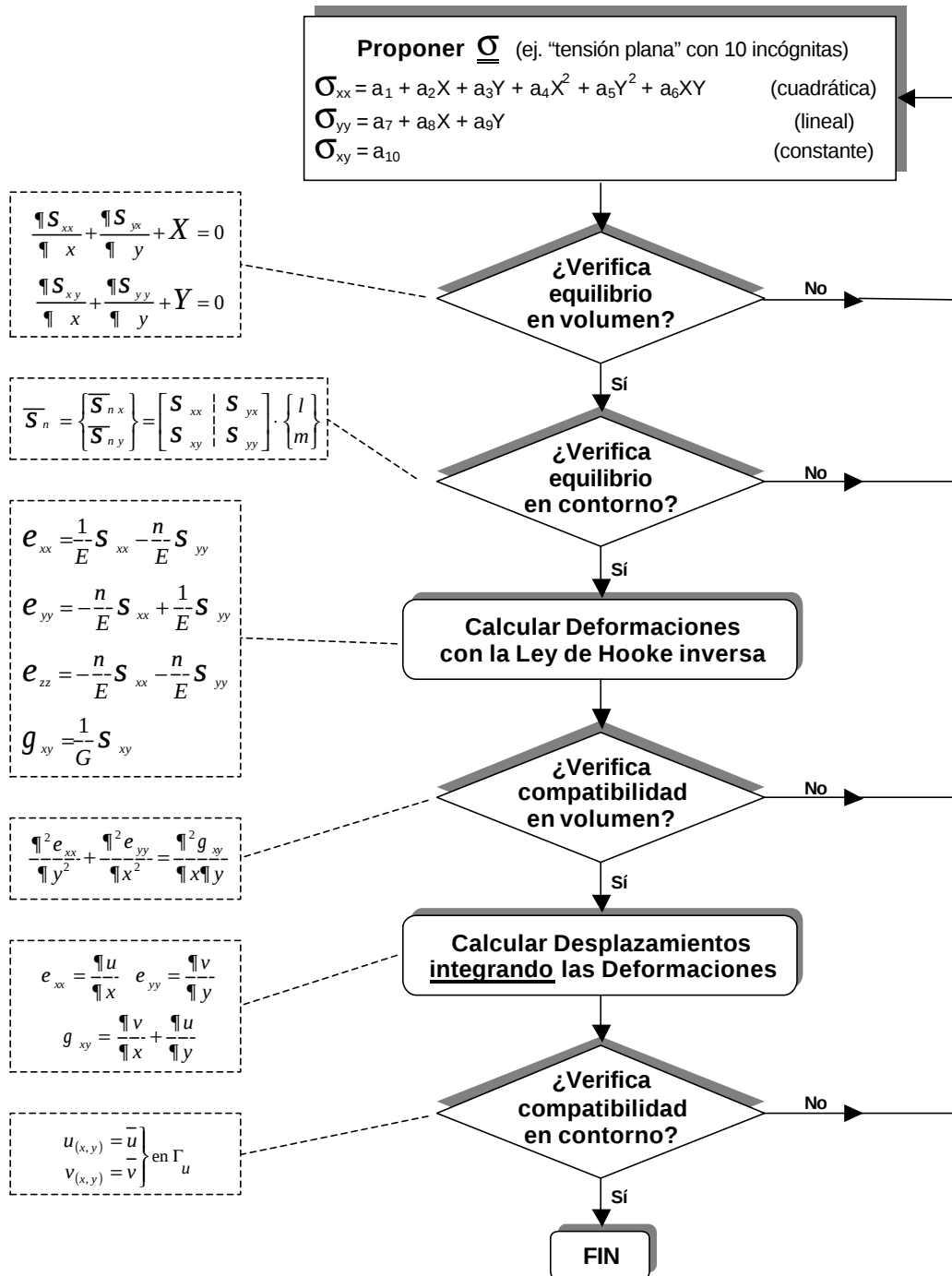
$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G+l & l & 0 \\ l & 2G+l & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \end{Bmatrix}$$

Nota:

La tensión normal según "z" existe pero está "desacoplada del problema" y no es necesaria para obtener la solución. Puede calcularse luego, durante el postproceso, como función de las tensiones según "x" e "y" usando la expresión de la deformación según "z" (recuadrada a la izquierda).

4.2. Resolución por el METODO DE LAS TENSIONES

Este método consiste en **proponer** como solución del problema unas **componentes de tensión** cuya forma funcional (por ejemplo polinómica) se postula dejando coeficientes indefinidos. Los mismos se van ajustando a medida que la propuesta pasa por cada una de las ecuaciones de la elasticidad. Si alguna de ellas no puede ser satisfecha el proceso debe reiniciarse con una nueva propuesta. El siguiente diagrama ejemplifica el método para el caso de tensión plana:



The diagram is divided into three main sections: **Realidad** (Reality), **Modelo** (Model), and a central **Modelo** section.

- Realidad:** A 3D perspective view of a thick plate being welded to a rigid base. Labels on the left indicate:
 - Pieza a analizar de espesor pequeño y peso despreciable (Part to be analyzed with small thickness and negligible weight)
 - Soldadura (Weld)
 - Base rígida (Rigid base)
 - Apoyo con baja fricción (Support with low friction)
- Modelo (Central):** A 2D cross-section of the plate. It shows a uniform pressure load p on the top surface. Material properties are listed as $E, \nu, G = \text{ctes}$. The state is labeled **TENSION PLANA** (Plane Stress). The Poisson's ratio is given as $\gamma = 0$. The bottom boundary is supported by rollers.
- Modelo (Right):** A detailed 2D stress element at the corner of the plate. The element is a square with dimensions 2×2 units. The coordinate system has $Y=0$ and $X=0$ at the center. The boundaries are labeled:
 - Top: $y=B$, $n_3=(0,1)$, $\sigma_{nx}=0$, $\sigma_{ny}=-p$
 - Right: $x=A$, $n_2=(1,0)$, $\sigma_{nx}=0$, $\sigma_{ny}=0$
 - Bottom: $y=0$, $n_4=(0,-1)$, $\sigma_{nx}=0$ (σ_{ny} incógnita), $v=0$ (u incógnita)
 - Left: $x=0$, $n_1=(-1,0)$, $\sigma_{nx}=0$, $\sigma_{ny}=0$
 A dashed box at the bottom-left corner indicates the origin: $(x,y)=(0,0)$, $u=0$, $v=0$.

Para este ejemplo se propone que todas las componentes de tensión sean funciones lineales de "x" y de "y":

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= A_1 + A_2 X + A_3 Y \\ \sigma_{yy} &= B_1 + B_2 X + B_3 Y \\ \sigma_{xy} &= C_1 + C_2 X + C_3 Y \end{aligned} \right\} \text{9 incógnitas}$$

$$\frac{\frac{1}{2}S_{xx}}{\frac{1}{2}x} + \frac{\frac{1}{2}S_{yx}}{\frac{1}{2}y} + X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A2 + C3 + 0 = 0 & \mathbf{C3 = -A2} \\ C2 + B3 + 0 = 0 & \mathbf{C2 = -B3} \end{matrix}$$

Propuesta actualizada

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{xx} = A1 + A2.X + A3.Y \\ \sigma_{yy} = B1 + B2.X + B3.Y \\ \sigma_{xy} = C1 - B3.X - A2.Y \end{matrix} \right\} 7 \text{ incógnitas}$$

$$\overline{S}_n = \left\{ \begin{matrix} \overline{S}_{n \ x} \\ \overline{S}_{n \ y} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} S_{xx} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\}$$

CONTORNO 1:

Ver condiciones en la figura

$$0 = \sigma_{xx} \cdot (-1) + \sigma_{xy} \cdot (0) \quad 0 = \sigma_{xx} \quad 0 = A1 + A2 \cdot 0 + A3 \cdot Y \quad \mathbf{A1 = A3 = 0}$$

$$0 = \sigma_{xy} \cdot (-1) + \sigma_{yy} \cdot (0) \quad 0 = \sigma_{xy} \quad 0 = C1 - B3 \cdot 0 - A2 \cdot Y \quad \mathbf{C1 = A2 = 0}$$

Propuesta actualizada

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= B1 + B2 \cdot X + B3 \cdot Y \\ \sigma_{xy} &= -B3 \cdot X \end{aligned} \right\} \text{ 3 incógnitas}$$

CONTORNO 2:

Ver condiciones en la figura

$$0 = \sigma_{xx} \cdot (1) + \sigma_{xy} \cdot (0) \quad 0 = \sigma_{xx} \quad \mathbf{OK}$$

$$0 = \sigma_{xy} \cdot (1) + \sigma_{yy} \cdot (0) \quad 0 = \sigma_{xy} \quad 0 = -B3 \cdot A \quad \mathbf{B3 = 0}$$

Propuesta actualizada

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= B1 + B2 \cdot X \\ \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ 2 incógnitas}$$

CONTORNO 3:

Ver condiciones en la figura

$$0 = \sigma_{xx} \cdot (0) + \sigma_{xy} \cdot (1) \quad 0 = \sigma_{xy} \quad \mathbf{OK}$$

$$-p = \sigma_{xy} \cdot (0) + \sigma_{yy} \cdot (1) \quad -p = \sigma_{yy} \quad -p = B1 + B2 \cdot X \quad \mathbf{B1 = -p \quad B2 = 0}$$

Propuesta actualizada

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= -p \\ \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ 0 incógnitas}$$

CONTORNO 4:

Ver condiciones en la figura

$$0 = \sigma_{xx}(0) + \sigma_{xy}(-1) \quad 0 = \sigma_{xy} \quad \text{OK}$$

 σ_{ny} = NO ESTA IMPUESTA EN ESTA DIRECCION DEL CONTORNO**Propuesta final (CONFIRMADA)**

$$\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} = -p$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

0 incógnitas

PASO 4 – Método de Tensiones: Calcular las DEFORMACIONES

$$e_{xx} = \frac{1}{E} s_{xx} - \frac{\nu}{E} s_{yy}$$

$$e_{yy} = -\frac{\nu}{E} s_{xx} + \frac{1}{E} s_{yy}$$

$$g_{xy} = \frac{1}{G} s_{xy}$$

DEFORMACIONES

$$\epsilon_{xx} = (\nu / E).p$$

$$\epsilon_{yy} = (-1 / E).p$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

PASO 5 – Método de Tensiones: Verificar la COMPATIBILIDAD EN VOLUMEN

$$\frac{\epsilon_{xx}^2}{\epsilon_{yy}^2} + \frac{\epsilon_{yy}^2}{\epsilon_{xx}^2} = \frac{g_{xy}^2}{\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}}$$

$$0 + 0 = 0 \quad \text{OK}$$

PASO 6 – Método de Tensiones: Calcular los DESPLAZAMIENTOS

Es necesario "integrar" las ecuaciones cinemáticas, con lo cual aparecen tres nuevas incógnitas (K, C1 y C2):

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u = \int e_{xx} dx + F1(y)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow v = \int e_{yy} dy + F2(x)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow g_{xy} = 0 = F'_{2(x)} + F'_{1(y)}$$

DESPLAZAMIENTOS

$$u = (\nu.p / E).X + F1(y)$$

$$v = (-p / E).Y + F2(x)$$

DESPLAZAMIENTOS

$$u = (\nu.p / E).X + K.Y + C1$$

$$v = (-p / E).Y - K.X + C2$$

$$F'_{1(y)} = -F'_{2(x)} = K \text{ (cte) de donde:}$$

$$F1(y) = \int F'_{1(y)} dy = K.Y + C1$$

$$F2(x) = \int F'_{2(x)} dx = -K.X + C2$$

PASO 7 – Método de Tensiones: Verificar la COMPATIBILIDAD EN CONTORNO

$$\left. \begin{matrix} u_{(x,y)} = \bar{u} \\ v_{(x,y)} = \bar{v} \end{matrix} \right\} \text{ en } \Gamma_u$$

CONTORNO 4: puntos (X, Y) = (X, 0)

u = NO ESTA IMPUESTO

$$v = (-p / E).0 - K.X + C2 = 0 \quad K = 0 \quad C2 = 0$$

CONTORNO 5: punto (X, Y) = (0, 0)

$$u = (\nu.p / E).0 + C1 = 0 \quad C1 = 0$$

$$v = (-p / E).0 = 0 \quad \text{OK}$$

DESPLAZAMIENTOS

$$u = (\nu.p / E).X + C1$$

$$v = (-p / E).Y$$

DESPLAZAMIENTOS

$$u = (\nu.p / E).X$$

$$v = (-p / E).Y$$

RESUMEN GENERAL DE RESULTADOS**TENSIONES**

Tensor constante en todo el dominio

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \text{"tensión principal 1"}$$

$$\sigma_{yy} = -p \quad \text{"tensión principal 2"}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \text{(dirección principal)}$$

DEFORMACIONES

Tensor constante en todo el dominio

$$\epsilon_{xx} = (\nu / E).p \quad \text{"Deformación ppal 1"}$$

$$\epsilon_{yy} = (-1 / E).p \quad \text{"Deformación ppal 2"}$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad \text{(Dirección principal)}$$

DESPLAZAMIENTOS

Vector lineal en todo el dominio

$$u = (\nu.p / E).X \quad u_{MAX} = (\nu.p / E).A$$

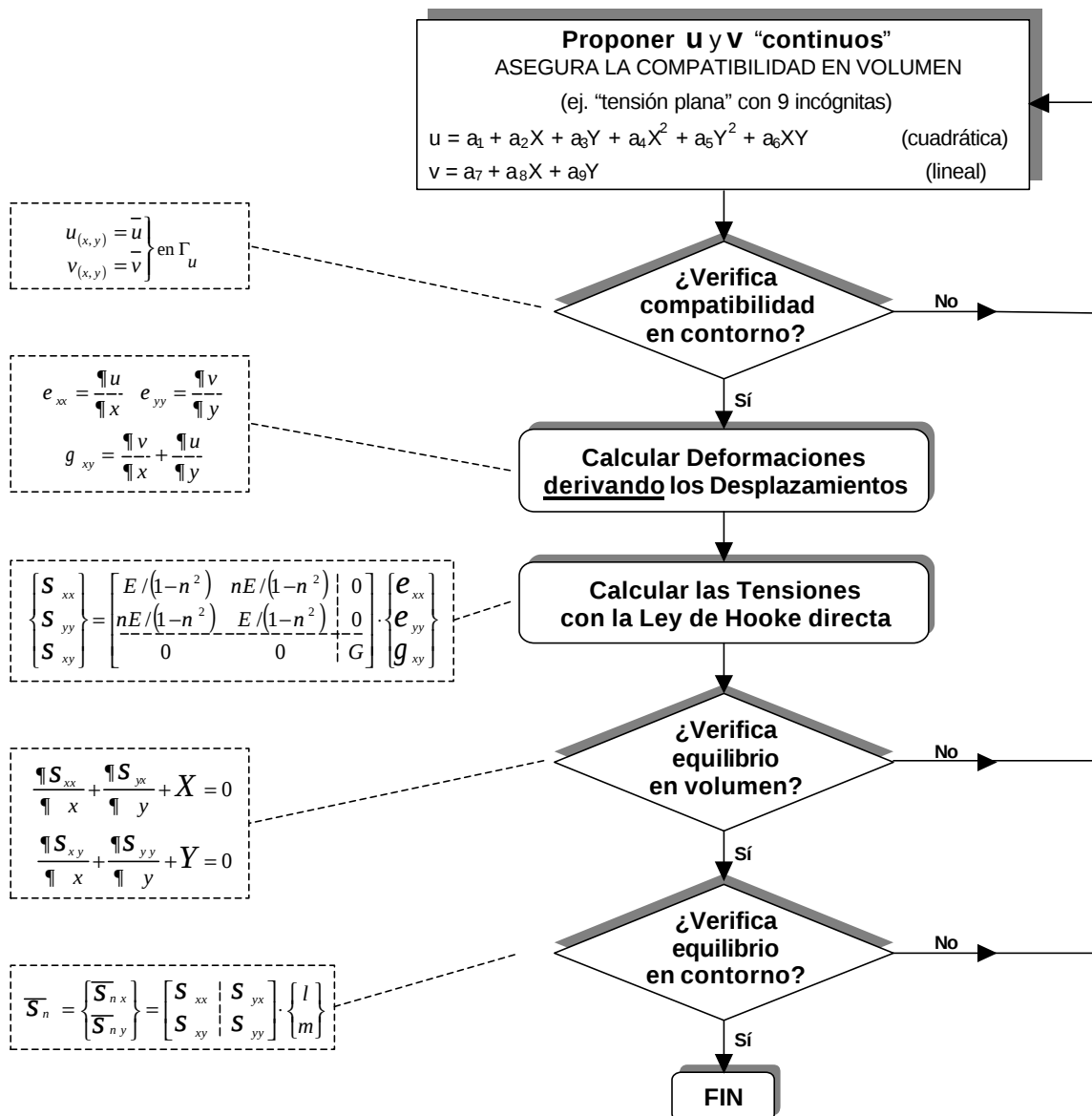
$$v = (-p / E).Y \quad v_{MAX} = (-p / E).B$$

4.3. Resolución por el METODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

En este método la solución propuesta consiste en **funciones continuas de desplazamiento** (por ejemplo polinomios) con coeficientes indefinidos. Los mismos se ajustan a medida que la propuesta pasa por cada una de las ecuaciones de la elasticidad (salvo las de compatibilidad en volumen pues quedan automáticamente aseguradas por la continuidad de los desplazamientos). Este método presenta dos importantes ventajas con respecto al de tensiones:

- 1) **NO se usan las ecuaciones de compatibilidad en volumen** (se satisfacen automáticamente).
- 2) **NO se integran las ecuaciones cinemáticas** (sólo se derivan los desplazamientos).

El siguiente diagrama ejemplifica el método para el caso de tensión plana:



4.4. FORMATOS CONVENIENTES para las ecuaciones de la elasticidad

El conocimiento de las relaciones entre las incógnitas del problema permite formular la teoría en función de cualquiera de ellas. Esto genera nuevos formatos para las ecuaciones que pueden resultar convenientes para su resolución. De las muchas opciones posibles se planteará una particularmente útil y que da lugar a una mejora notable del método de los desplazamientos. La idea consiste en reescribir las ecuaciones de equilibrio (en volumen y contorno) en función de los desplazamientos, con ayuda de la Ley de Hooke y las Ecuaciones Cinemáticas.

EQUILIBRIO EN VOLUMEN en función de los desplazamientos

Las ecuaciones de equilibrio en volumen fueron deducidas inicialmente en función de las componentes de tensión. Por otro lado, la inclusión de las ecuaciones cinemáticas en la Ley de Hooke proporciona la relación entre desplazamientos y componentes de tensión. Esto último, incorporado a las ecuaciones de equilibrio, permite escribirlas en función de los desplazamientos.

Ecuaciones de **equilibrio en volumen**
en función de las tensiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

Ley de Hooke con inclusión de **Ecuaciones Cinemáticas**:

Tensiones en función de los Desplazamientos

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G+l & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 2G+l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 2G+l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} = \partial u / \partial x \\ e_{yy} = \partial v / \partial y \\ e_{zz} = \partial w / \partial z \\ g_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ g_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ g_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{Bmatrix}$$

Reemplazando tensiones

Ecuaciones de EQUILIBRIO EN VOLUMEN como función de los desplazamientos

$$\begin{aligned} \left[(2G+l) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + (G+l) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (G+l) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X &= 0 \\ \left[G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2G+l) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + (G+l) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + (G+l) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + Y &= 0 \\ \left[G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2G+l) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + (G+l) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + (G+l) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + Z &= 0 \end{aligned}$$

EQUILIBRIO EN CONTORNO en función de los desplazamientos

Con un razonamiento idéntico al anterior se utilizan las Ecuaciones Cinemáticas y la Ley de Hooke para transformar las ecuaciones de equilibrio en contorno.

Ecuaciones de **equilibrio en contorno**
en función de las tensiones

$$\bar{S}_{nx} = S_{xx}l + S_{xy}m + S_{xz}n$$

$$\bar{S}_{ny} = S_{xy}l + S_{yy}m + S_{yz}n$$

$$\bar{S}_{nz} = S_{xz}l + S_{yz}m + S_{zz}n$$

Ley de Hooke con inclusión de **Ecuaciones Cinemáticas**:

Tensiones en función de los Desplazamientos

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G+l & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 2G+l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 2G+l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} = \partial u / \partial x \\ e_{yy} = \partial v / \partial y \\ e_{zz} = \partial w / \partial z \\ g_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ g_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ g_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{Bmatrix}$$

Reemplazando tensiones

Ecuaciones de EQUILIBRIO EN CONTORNO como función de los desplazamientos

$$\bar{S}_{nx} = \left[(2G+l)l \frac{\partial u}{\partial x} + Gm \frac{\partial u}{\partial y} + Gn \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \left[ll \frac{\partial v}{\partial y} + Gm \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left[ll \frac{\partial w}{\partial z} + Gn \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$\bar{S}_{ny} = \left[lm \frac{\partial u}{\partial x} + Gl \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \left[Gl \frac{\partial v}{\partial x} + (2G+l)m \frac{\partial v}{\partial y} + Gn \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[lm \frac{\partial w}{\partial z} + Gn \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$\bar{S}_{nz} = \left[ln \frac{\partial u}{\partial x} + Gl \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \left[ln \frac{\partial v}{\partial y} + Gm \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[Gl \frac{\partial w}{\partial x} + Gm \frac{\partial w}{\partial y} + (2G+l)m \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

Nota: como ejemplo se desarrolla la transformación de una ecuación de equilibrio en contorno. En la segunda línea se reemplazan las tensiones en función de desplazamientos (Ley de Hooke + Ecuaciones Cinemáticas). En la tercera línea se agrupan las derivadas de cada uno de los desplazamientos:

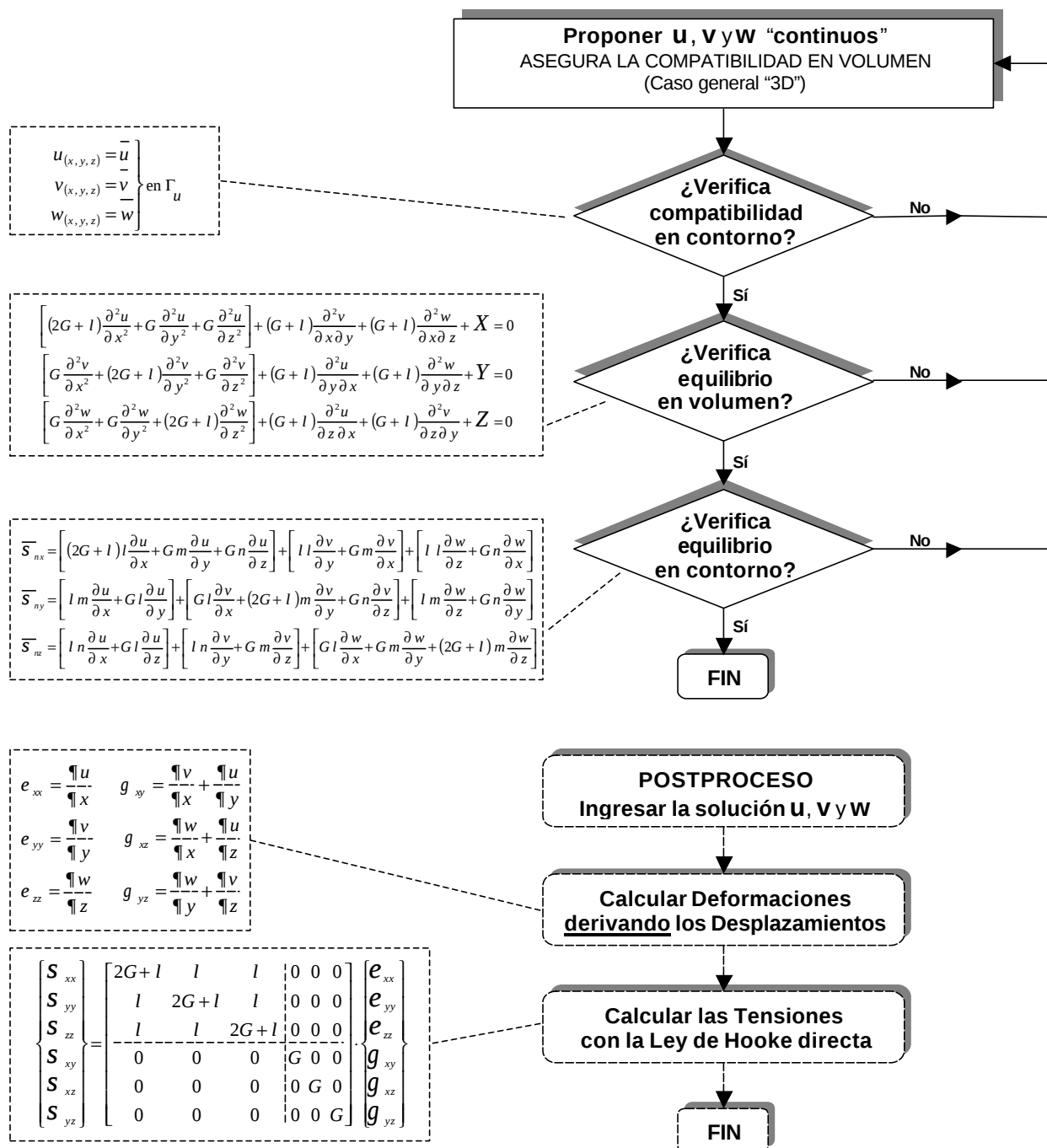
$$\bar{S}_{nx} = S_{xx}l + S_{xy}m + S_{xz}n$$

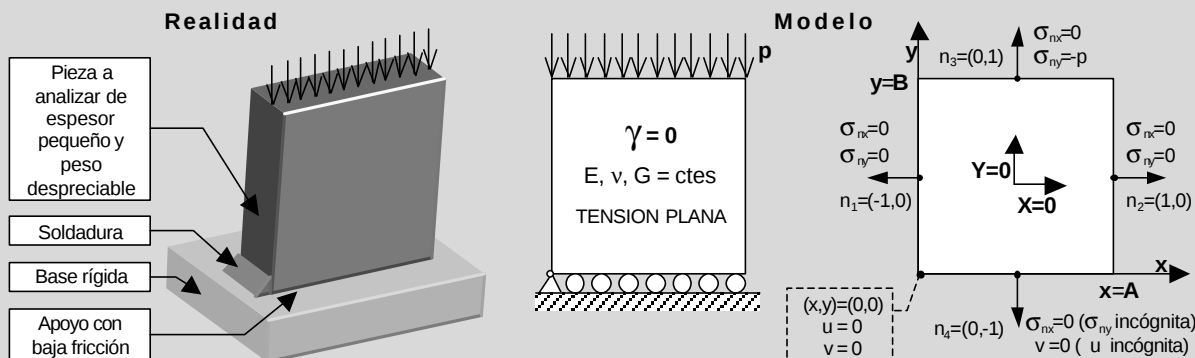
$$\bar{S}_{nx} = \left[(2G+l) \frac{\partial u}{\partial x} + l \frac{\partial v}{\partial y} + l \frac{\partial w}{\partial z} \right] l + \left[G \frac{\partial u}{\partial y} + G \frac{\partial v}{\partial x} \right] m + \left[G \frac{\partial u}{\partial z} + G \frac{\partial w}{\partial x} \right] n$$

$$\bar{S}_{nx} = \left[(2G+l)l \frac{\partial u}{\partial x} + Gm \frac{\partial u}{\partial y} + Gn \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \left[ll \frac{\partial v}{\partial y} + Gm \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left[ll \frac{\partial w}{\partial z} + Gn \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

Método de los DESPLAZAMIENTOS

Escribir todas las ecuaciones “en desplazamientos” simplifica aún más el método de resolución respectivo. Se maneja una única incógnita, el desplazamiento, y las demás se calculan luego de obtener la solución, durante el postproceso. La propuesta sólo debe verificar la compatibilidad en contorno y el equilibrio en volumen y contorno. No hay necesidad de usar explícitamente las Ecuaciones Cinemáticas ni la Ley de Hooke porque están incorporadas a las ecuaciones de equilibrio. El diagrama muestra la nueva estructura del método:



Ejemplo de aplicación del METODO DE DESPLAZAMIENTOS:**PASO 1 – Método de Desplazamientos:** Proponer funciones “continuas” de desplazamiento

Para este ejemplo se propone que todas las componentes del desplazamiento sean funciones lineales de “x” y de “y”:

Propuesta inicial

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 + A_2.X + A_3.Y \\ v &= B_1 + B_2.X + B_3.Y \end{aligned} \right\} \text{6 incógnitas}$$

PASO 2 – Método de Desplazamientos: Verificar la COMPATIBILIDAD EN CONTORNO

En el contorno Γ_u se especifican las condiciones de desplazamiento: $u_{(x,y)} = \bar{u}$, $v_{(x,y)} = \bar{v}$.

CONTORNO 4: puntos $(X, Y) = (X, 0)$

$u = \text{NO ESTA IMPUESTO}$
 $v = B_1 + B_2.X + B_3.0 = 0 \quad \mathbf{B1 = 0} \quad \mathbf{B2 = 0}$

CONTORNO 5: punto $(X, Y) = (0, 0)$

$u = A_1 + A_2.0 + A_3.0 = 0 \quad \mathbf{A1 = 0}$
 $v = B_3.0 = 0 \quad \mathbf{OK}$

Propuesta actualizada

Después de aplicar las condiciones de contorno, se reduce el número de incógnitas:

- Después de CONTORNO 4: $u = A_1 + A_2.X + A_3.Y$, $v = B_3.Y$ (4 incógnitas)
- Después de CONTORNO 5: $u = A_2.X + A_3.Y$, $v = B_3.Y$ (3 incógnitas)

PASO 3 – Método de Desplazamientos: Verificar el EQUILIBRIO EN VOLUMEN

Equilibrio en volumen para “tensión plana”:

$$\left[\left(\frac{E}{1-n^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \left[\left(G + n \frac{E}{1-n^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + X = 0$$

$$\left[G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{E}{1-n^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \left[\left(G + n \frac{E}{1-n^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right] + Y = 0$$

Con las condiciones de contorno aplicadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} [0 + 0] + 0 + 0 &= 0 \quad \mathbf{OK} \\ [0 + 0] + 0 + 0 &= 0 \quad \mathbf{OK} \end{aligned}$$

Con fuerzas másicas nulas el equilibrio sólo se cumple con desplazamientos constantes o lineales pues tienen derivadas segundas nulas.

PASO 4 – Método de Desplazamientos: Verificar el EQUILIBRIO EN CONTORNO

Equilibrio en contorno para “tensión plana”:

$$\bar{S}_{nx} = \left[\left(\frac{E}{1-n^2} \right) l \frac{\partial u}{\partial x} + G m \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \left[\left(n \frac{E}{1-n^2} \right) l \frac{\partial v}{\partial y} + G m \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$\bar{S}_{ny} = \left[\left(n \frac{E}{1-n^2} \right) m \frac{\partial u}{\partial x} + G l \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \left[G l \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{E}{1-n^2} \right) m \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

Notación simplificada

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= K1.l.u_x + G.m.u_y + K2.l.v_y + G.m.v_x \\ \sigma_{ny} &= K2.m.u_x + G.l.u_y + G.l.v_x + K1.m.v_y \end{aligned}$$

donde las derivadas para este ejemplo valen:

$$u_x = \mathbf{A1} \quad u_y = \mathbf{A3} \quad v_x = \mathbf{0} \quad v_y = \mathbf{B3}$$

CONTORNO 1: Ver condiciones en la figura

$$0 = K1.(-1).u_x + G.0.u_y + K2.(-1).v_y + G.0.v_x \implies v_y = -u_x K1/K2 \quad B3 = -A2/v$$

$$0 = K2.0.u_x + G.(-1).u_y + G.(-1).v_x + K1.0.v_y \implies u_y = -v_x \quad A3 = 0$$

Propuesta actualizada

$$\left. \begin{aligned} u &= A2.X \\ v &= -(A2/v).Y \end{aligned} \right\} 1 \text{ incógnita}$$

CONTORNO 2: Ver condiciones en la figura

$$0 = K1.(1).u_x + G.0.u_y + K2.(1).v_y + G.0.v_x \implies v_y = -u_x K1/K2 \quad OK$$

$$0 = K2.0.u_x + G.(1).u_y + G.(1).v_x + K1.0.v_y \implies u_y = -v_x \quad OK$$

CONTORNO 3: Ver condiciones en la figura

$$0 = K1.0.u_x + G.(1).u_y + K2.0.v_y + G.(1).v_x \implies u_y = -v_x \quad OK$$

$$-p = K2.(1).u_x + G.0.u_y + G.0.v_x + K1.(1).v_y \implies -p = K2.A2 - K1.A2/v$$

$$\implies -p = A2.[K2 - K1/v] = A2.[vE/(1-v^2) - E/(1-v^2)/v] \quad A2 = v.p/E$$

Propuesta actualizada

$$\left. \begin{aligned} u &= (v.p/E).X \\ v &= (-p/E).Y \end{aligned} \right\} 0 \text{ incógnitas}$$

CONTORNO 4: Ver condiciones en la figura

$$0 = K1.0.u_x + G.(-1).u_y + K2.0.v_y + G.(-1).v_x \implies u_y = -v_x \quad OK$$

$\sigma_{ny} = \text{NO ESTA IMPUESTA EN ESTA DIRECCION DEL CONTORNO}$

Propuesta final = SOLUCION

$$\begin{aligned} u &= (v.p/E).X \\ v &= (-p/E).Y \end{aligned}$$

FIN DEL CALCULO (SE OBTUVO LA SOLUCION EN DESPLAZAMIENTOS) – INICIO DEL POSTPROCESO**POSTPROCESO : Deformaciones**

Ecuaciones cinemáticas (sólo es necesario derivar)

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

DEFORMACIONES

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= (v/E).p \\ \epsilon_{yy} &= (-1/E).p \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

POSTPROCESO : Tensiones

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-n^2) & nE/(1-n^2) & 0 \\ nE/(1-n^2) & E/(1-n^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \end{Bmatrix}$$

TENSIONES

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= -p \\ \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

RESUMEN GENERAL DE RESULTADOS**TENSIONES**

Tensor constante en todo el dominio

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 && \text{"tensión principal 1"} \\ \sigma_{yy} &= -p && \text{"tensión principal 2"} \\ \sigma_{xy} &= 0 && \text{(dirección principal)} \end{aligned}$$

DEFORMACIONES

Tensor constante en todo el dominio

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= (v/E).p && \text{"Deformación ppal 1"} \\ \epsilon_{yy} &= (-1/E).p && \text{"Deformación ppal 2"} \\ \gamma_{xy} &= 0 && \text{(dirección principal)} \end{aligned}$$

DESPLAZAMIENTOS

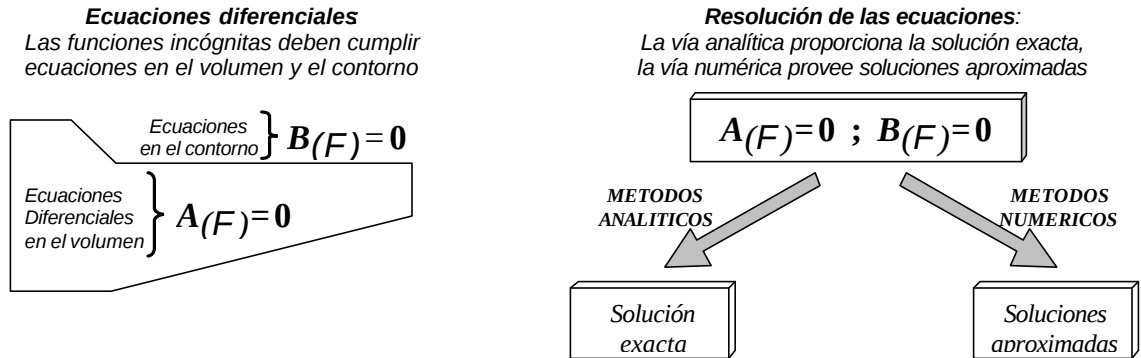
Vector lineal en todo el dominio

$$\begin{aligned} u &= (v.p/E).X && u_{MAX} = (v.p/E).A \\ v &= (-p/E).Y && v_{MAX} = (-p/E).B \end{aligned}$$

Nota: como era de esperar, la solución coincide con la obtenida antes por el método de las tensiones. Sin embargo, con este método se ha resuelto más rápidamente, desarrollando menor cantidad de pasos (4 en lugar de 7). Además, se ha implementado el llamado "postproceso" que es una sencilla y predecible marcha de cálculo para obtener el resto de las magnitudes de interés "una vez que se ha resuelto el problema".

4.5. Soluciones aproximadas por métodos numéricos

Inicialmente se utilizó un simbolismo $\{ F ; A(F)=0 ; B(F)=0 \}$ para el problema elástico que, retoques mediante, proveerá una notación compacta y útil para interpretar las ideas básicas aplicadas en los métodos numéricos:



- El **volumen del dominio** será simbolizado con W y el **contorno** con G , destacando aquellos con **desplazamientos impuestos** como G_u y con **cargas impuestas** como G_s .
- Las incógnitas tensión-deformación-desplazamiento, simbolizadas en principio por F , serán reemplazadas por una **única incógnita**, el vector desplazamiento, representada con $\bar{u}$.
- Las ecuaciones a cumplir en el volumen, inicialmente representadas con $A(F)=0$, conforman en realidad un **sistema de ecuaciones** (3 ecuaciones con el desplazamiento como incógnita) y pasarán a simbolizarse, para mayor precisión, como:

$\bar{A}_{(\bar{u})} = \bar{0}$

→

$$\begin{aligned} &\left[(2G+I) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + (G+I) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (G+I) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X = 0 \\ &\left[G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2G+I) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + (G+I) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + (G+I) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + Y = 0 \\ &\left[G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2G+I) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + (G+I) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + (G+I) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + Z = 0 \end{aligned}$$

- Las ecuaciones para el contorno, simbolizadas en principio con $B(F)=0$, son realmente **sistemas de ecuaciones** (3 ecuaciones con el desplazamiento como incógnita) distintos para cada parte del contorno, según el tipo de condición que se le haya impuesto:

$\bar{B}_{(\bar{u})} = \bar{0}$

→

$$\begin{aligned} &\left[(2G+I) l \frac{\partial u}{\partial x} + G m \frac{\partial u}{\partial y} + G n \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \left[l l \frac{\partial v}{\partial y} + G m \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left[l l \frac{\partial w}{\partial z} + G n \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \bar{s}_{nx} = 0 \\ &\left[l m \frac{\partial u}{\partial x} + G l \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \left[G l \frac{\partial v}{\partial x} + (2G+I) m \frac{\partial v}{\partial y} + G n \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[l m \frac{\partial w}{\partial z} + G n \frac{\partial w}{\partial y} \right] - \bar{s}_{ny} = 0 \\ &\left[l n \frac{\partial u}{\partial x} + G l \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \left[l n \frac{\partial v}{\partial y} + G m \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \left[G l \frac{\partial w}{\partial x} + G m \frac{\partial w}{\partial y} + (2G+I) n \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \bar{s}_{nz} = 0 \end{aligned}$$

↘

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &= 0 \\ v - \bar{v} &= 0 \\ w - \bar{w} &= 0 \end{aligned}$$

**Forma DIFERENCIAL del problema elástico
y Método de DIFERENCIAS FINITAS**

El planteo teórico visto hasta el momento constituye la denominada “**forma diferencial**” del problema elástico, compuesta por una serie de ecuaciones igualadas a cero. Estas se satisfacen en cada punto del dominio para un único vector “u” que es solución del problema. Para cualquier otra función de desplazamientos, que no sea exactamente la solución, las ecuaciones serán distintas de cero en al menos algún punto del dominio (volumen o contorno).

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_{(\bar{u})} = \bar{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \\ \bar{B}_{(\bar{u})} = \bar{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow \bar{u} \text{ es la solución}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_{(\hat{u})} \neq \bar{0} \\ \bar{B}_{(\hat{u})} \neq \bar{0} \end{array} \right\} \text{ para } \hat{u} \text{ arbitraria}$$

El método numérico denominado **DIFERENCIAS FINITAS** (MDF) utiliza esta forma diferencial y se basa en reemplazar las derivadas de diversos órdenes que aparecen en la formulación por expresiones aproximadas, como en los siguientes ejemplos bidimensionales para “ $u_{(x,y)}$ ”:

Derivada primera “centrada” según “x”

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} \cong \frac{u_{(x+\Delta x,y)} - u_{(x-\Delta x,y)}}{2\Delta x}$$

Derivada primera “centrada” según “y”

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial y} \cong \frac{u_{(x,y+\Delta y)} - u_{(x,y-\Delta y)}}{2\Delta y}$$

Derivada primera “hacia adelante” según “x”

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} \cong \frac{u_{(x+\Delta x,y)} - u_{(x,y)}}{\Delta x}$$

Derivada primera “hacia adelante” según “y”

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial y} \cong \frac{u_{(x,y+\Delta y)} - u_{(x,y)}}{\Delta y}$$

Derivada primera “hacia atrás” según “x”

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} \cong \frac{u_{(x,y)} - u_{(x-\Delta x,y)}}{\Delta x}$$

Derivada primera “hacia atrás” según “y”

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial y} \cong \frac{u_{(x,y)} - u_{(x,y-\Delta y)}}{\Delta y}$$

Derivada segunda según “x”

$$\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x^2} \cong \frac{u_{(x+\Delta x,y)} - 2u_{(x,y)} + u_{(x-\Delta x,y)}}{\Delta x^2}$$

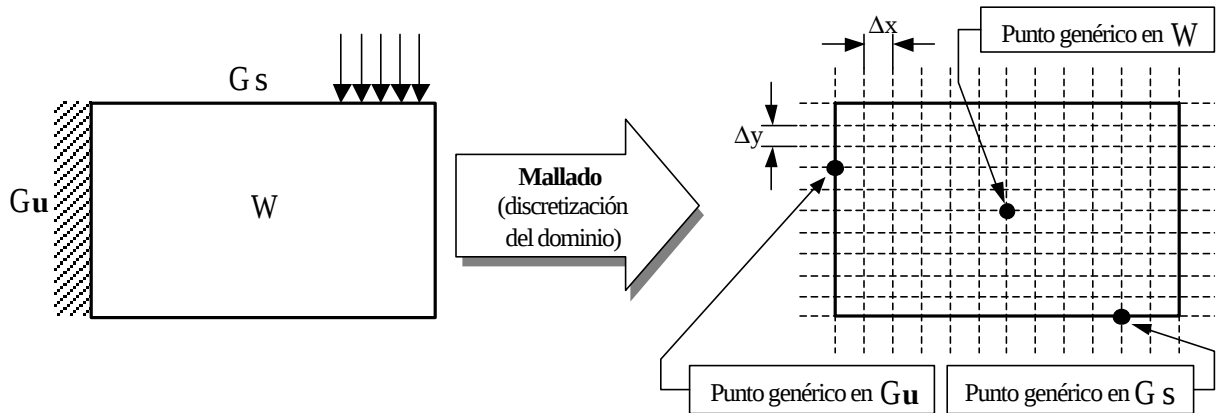
Derivada segunda según “y”

$$\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \cong \frac{u_{(x,y+\Delta y)} - 2u_{(x,y)} + u_{(x,y-\Delta y)}}{\Delta y^2}$$

Derivada segunda según “x e y” (cruzada)

$$\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \cong \frac{u_{(x+\Delta x,y+\Delta y)} - u_{(x+\Delta x,y-\Delta y)} - u_{(x-\Delta x,y+\Delta y)} + u_{(x-\Delta x,y-\Delta y)}}{4\Delta x \Delta y}$$

Esta aproximación requiere el trazado de una “malla” sobre el dominio. En el más sencillo de los casos se trata de un arreglo de filas y columnas equiespaciadas a distancias “ Δx y Δy ”.



De este modo se genera una **cantidad finita de puntos** en el volumen y contorno, proceso al que suele denominarse “**discretización del dominio**”. Los mismos se identifican con algún tipo de rótulo (número) que permite hacer referencia a cualquiera de ellos y a sus “vecinos” al momento de calcular las derivadas presentes en la formulación. El método de diferencias finitas propone verificar las **ecuaciones discretizadas** de la elasticidad solamente en esta cantidad finita de puntos. Para cada uno, aquellas involucran a los desplazamientos del punto en cuestión y de sus vecinos cercanos. Como ejemplo se discretiza la ecuación de equilibrio en volumen según “x”:

Ecuación **DIFERENCIAL** (sobre **DOMINIO CONTINUO**) de equilibrio en volumen para la dirección “x”:

$$\left[(2G + I) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + (G + I) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (G + I) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X = 0$$

Ecuación **ALGEBRAICA** (sobre **DOMINIO DISCRETO**) de equilibrio en volumen para la dirección “x”:

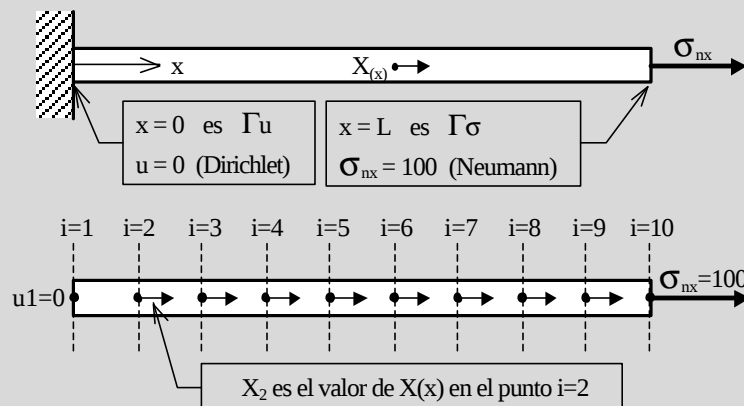
$$\left[(2G + I) \frac{u_{(x+\Delta x, y, z)} - 2u_{(x, y, z)} + u_{(x-\Delta x, y, z)}}{\Delta x^2} + G \frac{u_{(x, y+\Delta y, z)} - 2u_{(x, y, z)} + u_{(x, y-\Delta y, z)}}{\Delta y^2} + G \frac{u_{(x, y, z+\Delta z)} - 2u_{(x, y, z)} + u_{(x, y, z-\Delta z)}}{\Delta z^2} \right] \\ + (G + I) \frac{v_{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)} - v_{(x+\Delta x, y-\Delta y, z)} - v_{(x-\Delta x, y+\Delta y, z)} + v_{(x-\Delta x, y-\Delta y, z)}}{4\Delta x \Delta y} \\ + (G + I) \frac{w_{(x+\Delta x, y, z+\Delta z)} - w_{(x+\Delta x, y, z-\Delta z)} - w_{(x-\Delta x, y, z+\Delta z)} + w_{(x-\Delta x, y, z-\Delta z)}}{4\Delta x \Delta z} + X_{(x, y, z)} = 0$$

Nota: Se procede de igual forma con las ecuaciones de equilibrio en contorno, las cuales contienen derivadas primeras. Según el sector de contorno que se considere se aplican distintas fórmulas de aproximación de la primera derivada: centrada, hacia delante o hacia atrás. Por ejemplo, los puntos del contorno vertical derecho no poseen vecinos adelante y utilizan derivadas hacia atrás que sólo requieren información de sus vecinos a izquierda. Contrariamente, puntos del contorno vertical izquierdo utilizan derivadas hacia adelante ya que sólo poseen vecinos a su derecha.

Por otro lado, las condiciones de contorno Dirichlet son triviales pues consisten en “imponer el valor del desplazamiento” en los puntos correspondientes. Por tanto, en aquellos no aparecen fórmulas con derivadas de los desplazamientos sino, simplemente, se les asigna un valor y dejan de ser incógnitas del problema.

La idea general es encontrar “n valores” discretos “u, v, w” correspondientes a los “n puntos” de la malla, que cumplan aproximadamente las ecuaciones en volumen y contorno, en lugar de buscar funciones solución. Esto es posible ya que el planteo de las ecuaciones discretas para cada uno de los puntos genera un sistema de “n ecuaciones” con “n incógnitas” que puede resolverse con diversos algoritmos: eliminación Gaussiana, descomposición LU, Choleski, Gauss-Seidel, etc.

Ejemplo 1D: aproximemos por MDF las deformaciones de una viga empotrada en un extremo, con una tensión de tracción en el otro y sometida a fuerzas másicas (inerciales por ejemplo) en la dirección de su eje. Se trata de un caso reducible a una dimensión y con ecuaciones muy simplificadas que permiten prestar atención al MDF:



$$\begin{aligned}
 i=1: & \quad u_1 = 0 & \text{es } G_u \\
 i=2: & \quad (u_3 - 2u_2 + u_1)E/dx^2 + X_2 = 0 & \text{es } W \\
 i=3: & \quad (u_4 - 2u_3 + u_2)E/dx^2 + X_3 = 0 & \text{es } W \\
 & \dots\dots\dots \\
 i=9: & \quad (u_{10} - 2u_9 + u_8)E/dx^2 + X_9 = 0 & \text{es } W \\
 i=10: & \quad (u_{10} - u_9)E/dx = 100 & \text{es } G_s
 \end{aligned}$$

Equilibrio en volumen:

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + X = 0 \quad \text{"Hooke"}$$

$$S_{xx} = E \cdot e_{xx} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow$$

$$E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + X = 0 \quad \text{"MDF"}$$

$$E \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + X_i = 0$$

Equilibrio en contorno:

$$S_{nx} = 100 = S_{xx} \cdot l \quad \text{"Hooke"}$$

$$S_{xx} = E \cdot e_{xx} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow$$

$$100 = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{"MDF"}$$

$$100 = E \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

Reordenando las 10 ecuaciones anteriores queda planteado un sistema lineal 10x10:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
 \end{pmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9 \\
 u_{10}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 -X_2 \cdot dx^2/E \\
 -X_3 \cdot dx^2/E \\
 -X_4 \cdot dx^2/E \\
 -X_5 \cdot dx^2/E \\
 -X_6 \cdot dx^2/E \\
 -X_7 \cdot dx^2/E \\
 -X_8 \cdot dx^2/E \\
 -X_9 \cdot dx^2/E \\
 -100 \cdot dx/E
 \end{pmatrix}$$

**Forma INTEGRAL del problema elástico
y Método de ELEMENTOS FINITOS**

El problema elástico también admite una “**forma integral**” que puede deducirse partiendo de “**consideraciones energéticas**” tales como el “**principio de los trabajos virtuales**”, o bien por “**integración y ponderación**” de las ecuaciones diferenciales. Se adoptará este último camino aprovechando el conocimiento ya adquirido acerca de las ecuaciones diferenciales.

La forma diferencial del problema expresa que la función solución hace nulas las ecuaciones diferenciales “en todos y cada uno de los puntos del dominio”. Una consecuencia, casi trivial, de esto es que la integral de tales ecuaciones nulas también resulta igual a cero:

$$\text{Si } \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_{(\bar{u})} = \bar{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \\ \bar{B}_{(\bar{u})} = \bar{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_{\Omega} \bar{A}_{(\bar{u})} d\Omega + \iint_{\Gamma} \bar{B}_{(\bar{u})} d\Gamma = \bar{0}$$

Para interpretar mejor esta formulación es útil recordar las ecuaciones de equilibrio tal como se dedujeron inicialmente y justo antes de proceder a la “simplificación de los diferenciales” de volumen o superficie correspondientes:

El equilibrio en volumen, en forma diferencial, tiene unidades de “fuerza”:

$$\underbrace{\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} dx dy dz}_{\text{Desbalance de tensiones normales según "x" [Kg]}} + \underbrace{\frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dx dy dz}_{\text{Desbalance de tensiones cortantes según "x" [Kg]}} + \underbrace{\frac{\partial S_{zx}}{\partial z} dx dy dz}_{\text{Fuerza másica sobre el cubo diferencial, según "x" [Kg]}} + X dx dy dz = 0$$

La integral de esta ecuación en todo el volumen expresa el desbalance total [en Kg] necesario en las tensiones normales y tangenciales para equilibrar a la fuerza másica [Kg] de todo el cuerpo.

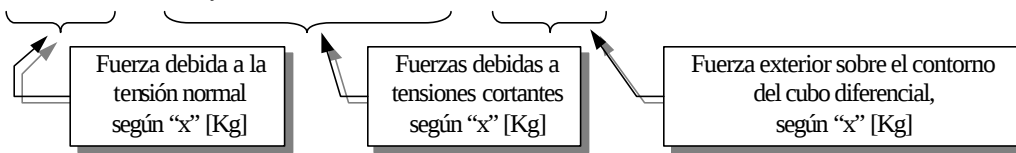
El equilibrio en volumen, en forma integral, también tiene unidades de “fuerza”:

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} dx dy dz}_{\text{Desbalance total de tensiones normales según "x" [Kg]}} + \underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dx dy dz}_{\text{Desbalance total de tensiones cortantes según "x" [Kg]}} + \underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} dx dy dz}_{\text{Fuerza másica en todo el cuerpo, según "x" [Kg]}} + \iiint_{\Omega} X dx dy dz = 0$$

Algo similar sucede con las ecuaciones de equilibrio en el contorno, cuya forma integral tiene también el sentido de “totalizar valores” que físicamente están distribuidos en todo el cuerpo.

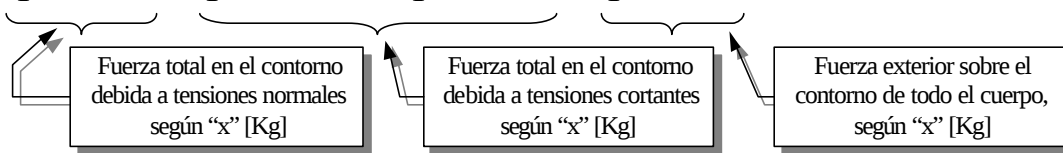
El equilibrio en contorno, en forma diferencial, tiene unidades de “fuerza”:

$$S_{xx} l ds + S_{xy} m ds + S_{xz} n ds - \bar{S}_{nx} ds = 0$$



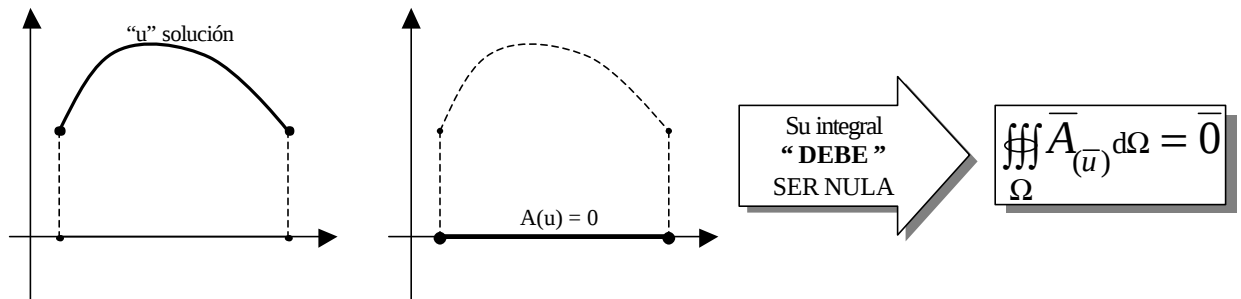
El equilibrio en contorno, en forma integral, también tiene unidades de “fuerza”:

$$\oint_{\Gamma} S_{xx} l ds + \oint_{\Gamma} S_{xy} m ds + \oint_{\Gamma} S_{xz} n ds - \oint_{\Gamma} \bar{S}_{nx} ds = 0$$

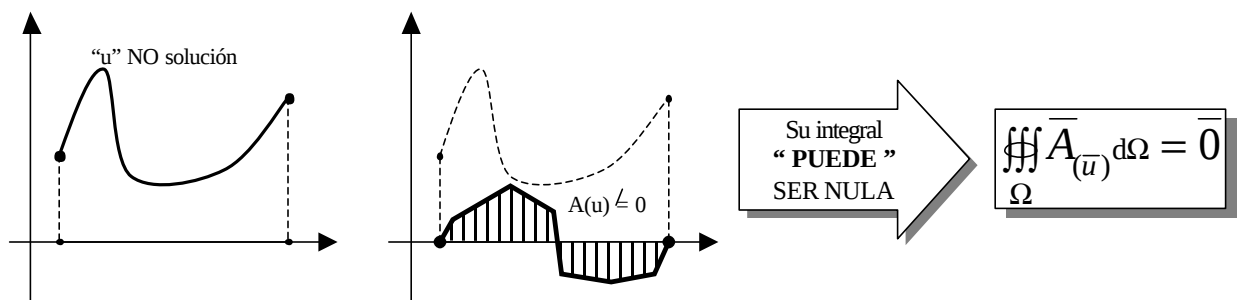


En resumen, integrar las ecuaciones de equilibrio en todo el dominio conduce a un resultado “global” que totaliza las tensiones normales y tangenciales, las fuerzas másicas y las fuerzas exteriores aplicadas en el contorno del cuerpo. Es justamente por ese carácter totalizador que la forma integral puede ser satisfecha por infinitas funciones además de la solución del problema:

- Si el vector “u” es la solución del problema, hace nulas a las ecuaciones “A y B” en cada punto del dominio, con lo cual **sus integrales necesariamente resultan nulas**.



- Si un vector “u” no es la solución del problema, provoca que las ecuaciones “A y B” adopten valores en el dominio (residuos), pero **sus integrales también podrían resultar nulas**.



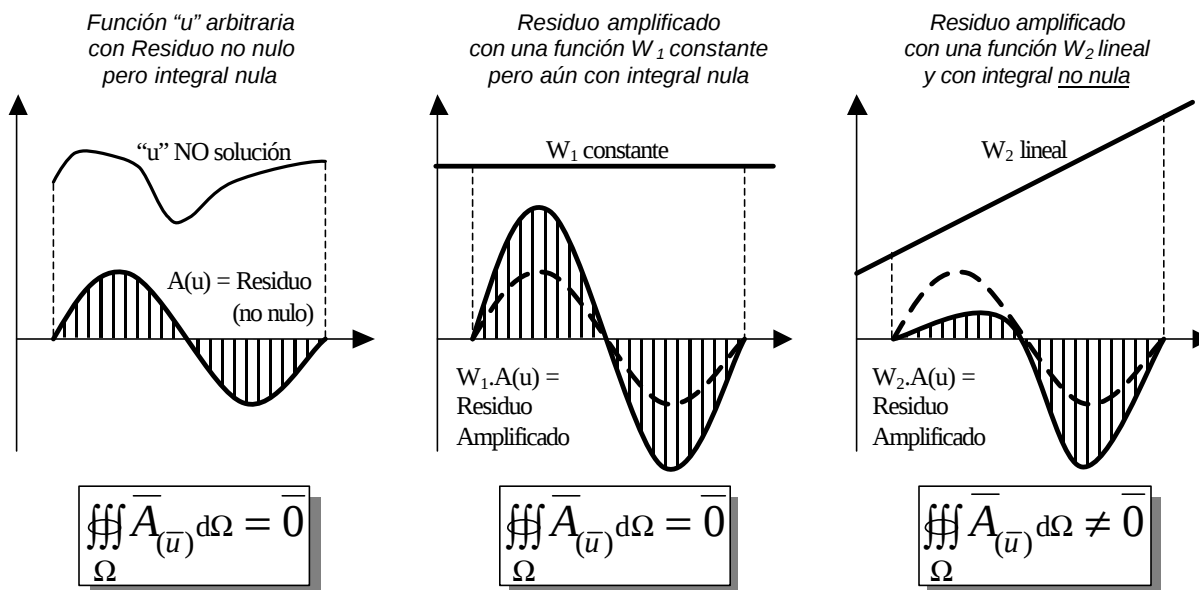
Entonces, esta formulación integral es incapaz de distinguir entre la solución del problema, que satisface punto a punto las ecuaciones diferenciales, y cualquier otra función que provoca “residuos” en todo el dominio. El residuo en un punto manifiesta un “incumplimiento” de la ecuación diferencial correspondiente. La integral de residuos igual a cero puede estar reflejando graves incumplimientos, de distinto signo, que sumados se cancelan. Estas situaciones, si bien parecen muy particulares, pueden resultar infinitas en cantidad. Sin embargo, si los residuos son multiplicados por “funciones de peso” arbitrarias, y luego integrados, se amplifican con la forma de las mismas y, en general, el resultado ya no es nulo. A este proceso se lo denomina “ponderación” y de él derivan los llamados “métodos de residuos ponderados”.

Formulación integral ponderada

$$\iiint_{\Omega} W_{(x,y,z)} \bar{A}_{(\bar{u})} d\Omega + \iint_{\Gamma} W^*_{(x,y,z)} \bar{B}_{(\bar{u})} d\Gamma = \bar{0}$$

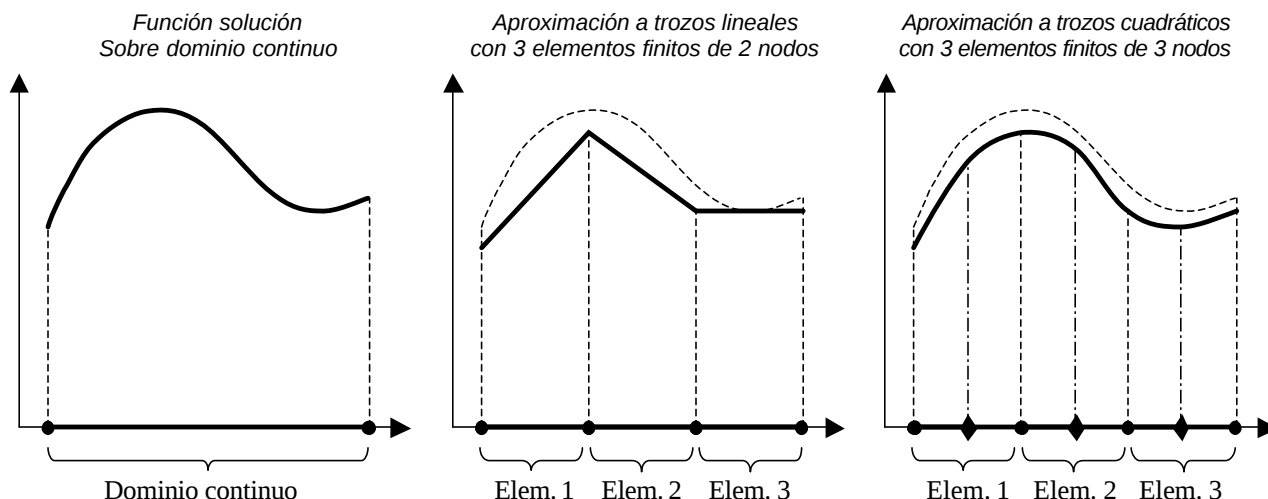
donde W y W* son las funciones de peso o ponderación

Podría suceder que ciertas funciones con residuos importantes pasen inadvertidas “una única prueba” de amplificación arbitraria, dando integrales nulas. Por ello conviene aplicar el proceso de ponderación con muchas funciones de peso diferentes. Puede demostrarse que, a medida que se incrementa la cantidad de funciones de peso utilizadas, sólo las funciones “u” más parecidas a la solución son capaces de provocar integrales de residuos ponderados nulas.

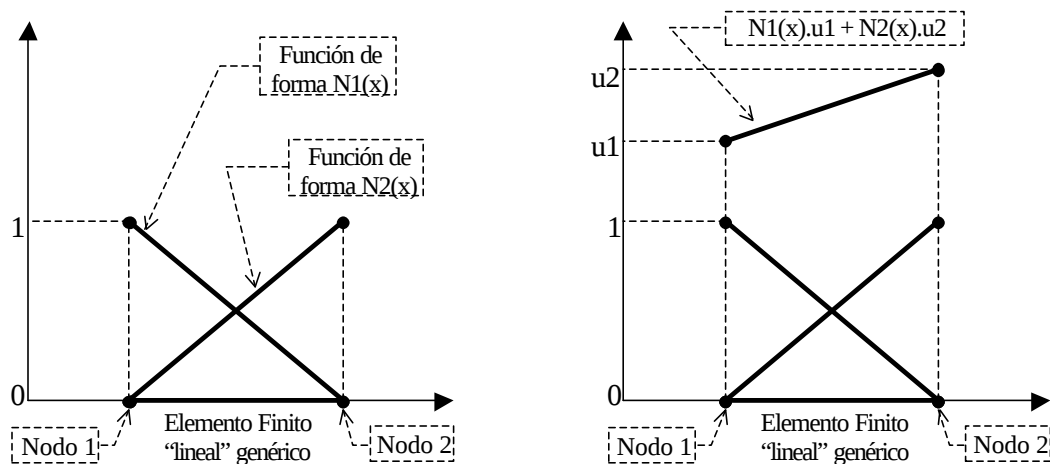


Métodos numéricos como el de **ELEMENTOS FINITOS** (MEF) utilizan las ideas anteriores para “armar una solución aproximada” con “n parámetros a definir” y plantear “n ecuaciones” para determinarlos (un sistema $n \times n$) donde cada una corresponde a una función de peso diferente.

Es común armar soluciones aproximadas “a trozos” uniendo sectores “polinómicos” lineales, cuadráticos, etc. Para esto se divide el dominio en “elementos finitos” conectados entre sí por nodos y a veces también con nodos en su interior:



Sobre los elementos finitos se definen unas “**funciones de forma**” que tienen la propiedad de valer 1 (uno) en un nodo y 0 (cero) en el resto. Cada elemento tiene tantas funciones de forma “ $N_i(x)$ ” como nodos posea. Por ejemplo para una aproximación lineal son necesarias dos funciones de forma en un elemento 1D: la primera, “ $N1(x)$ ”, vale uno en el nodo izquierdo y cero en el derecho y la segunda, “ $N2(x)$ ”, vale uno en el derecho y cero en el izquierdo:



De este modo puede aproximarse la función solución como “producto” de sus valores “aproximados” en los nodos (incógnitas del problema) por las funciones de forma. Al evaluar las funciones de forma en cierto nodo, todas valen cero excepto “la función de forma del propio nodo” (que vale uno) y entonces la aproximación propuesta coincide con la función incógnita en el mismo, mientras en el resto (entre nodos) la aproxima con carácter lineal, cuadrático u otro.

En resumen, se propone como aproximación una función en la que se desconocen una cierta cantidad “n” de parámetros (los valores nodales de la misma):

$$u_{(x,y,z)} \cong N_{1(x,y,z)} \cdot u_1 + N_{2(x,y,z)} \cdot u_2 + \dots + N_{n(x,y,z)} \cdot u_n = \sum_{i=1}^n N_{i(x,y,z)} \cdot u_i$$

Para obtenerlos se plantean tantas ecuaciones como incógnitas se hayan propuesto, utilizando distintas funciones de peso W_i en la formulación integral ponderada:

$$\iiint_{\Omega} W_{(x,y,z)} \bar{A}_{(\bar{u})} d\Omega + \iint_{\Gamma} W_{(x,y,z)}^* \bar{B}_{(\bar{u})} d\Gamma = \bar{0}$$

Finalmente se llega a un sistema de “n ecuaciones” con “n incógnitas” que puede resolverse con cualquier algoritmo numérico de modo similar a lo dicho para el método de diferencias finitas.

Ecuación 1: $\iiint_{\Omega} W_{1(x,y,z)} \bar{A}_{(\bar{u})} d\Omega + \iint_{\Gamma} W_{1(x,y,z)}^* \bar{B}_{(\bar{u})} d\Gamma = \bar{0}$

Ecuación 2: $\iiint_{\Omega} W_{2(x,y,z)} \bar{A}_{(\bar{u})} d\Omega + \iint_{\Gamma} W_{2(x,y,z)}^* \bar{B}_{(\bar{u})} d\Gamma = \bar{0}$

.....

Ecuación N: $\iiint_{\Omega} W_{n(x,y,z)} \bar{A}_{(\bar{u})} d\Omega + \iint_{\Gamma} W_{n(x,y,z)}^* \bar{B}_{(\bar{u})} d\Gamma = \bar{0}$

NOTAS: los métodos numéricos, en particular el MEF, tienen una carga teórica propia que merece un tratamiento particular. Lo desarrollado aquí pretende ser apenas una introducción conceptual, aceptando que muchos aspectos no quedarán claros hasta tanto se traten con el debido detalle.

Por ejemplo: no se ha mostrado el resultado de reemplazar en la formulación integral ponderada la aproximación propuesta como “suma de funciones de forma * valores nodales de la solución”. Al hacerlo aparecen explícitamente los parámetros incógnita y las derivadas de las funciones de forma. Es entonces cuando se descubre que es necesario pedir mayores requisitos de continuidad a las funciones de forma, para poder integrarlas, que a las de peso y de allí surge la idea de aplicar la **INTEGRACIÓN POR PARTES** (proceso de **DEBILITACION**). El resultado es un nuevo formato integral en el que los requisitos de continuidad están mejor repartidos entre funciones de forma y de peso. Luego, se vislumbra que **SI SE ELIGEN LAS FUNCIONES DE PESO IGUALES A LAS DE FORMA** (método de residuos ponderados de **GALERKIN**) puede obtenerse un sistema de ecuaciones con **MATRIZ SIMETRICA**, lo cual facilita enormemente la tarea de resolución (sobre todo en grandes sistemas de ecuaciones).

Para el estudio detallado de métodos numéricos se recomienda tener en cuenta lo mencionado como “aviso” de las transformaciones que sufrirá la formulación a favor de facilitar la resolución numérica del sistema de ecuaciones resultante pero a costa de enmascarar los conceptos físicos de los que derivó inicialmente la teoría de la elasticidad.