

3. Las relaciones Tensión – Deformación – Desplazamiento

Habiendo estudiado las incógnitas del problema elástico por separado se analizarán ahora las relaciones que las vinculan. Así se completa el planteamiento de las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad Lineal y puede procederse al estudio de los métodos para la resolución de las mismas. En este capítulo se desarrollará lo siguiente:

- 3.1. Se introducirán de manera esquemática las relaciones entre tensiones, deformaciones y desplazamientos buscadas, ejemplificándolas para el caso unidimensional.
- 3.2. Se planteará la **Ley de Hooke Generalizada** al caso 3D y material anisótropo, simplificándola luego para el material isótropo utilizado en la Teoría de la Elasticidad Lineal.
- 3.3. Se aplicará el principio de superposición para obtener las deformaciones en función de las tensiones en la denominada **Forma inversa de la Ley de Hooke** para el caso isótropo.
- 3.4. Se invertirá la matriz elástica isótropa del paso anterior para obtener las tensiones como función de las deformaciones en la denominada **Forma directa de la Ley de Hooke**.
- 3.5. Se completará el estudio del caso isótropo deduciendo las relaciones entre las constantes elásticas “E, G, n” y se analizará la deformación volumétrica para justificar el valor máximo de n.

3.1. Incógnitas del problema elástico y sus relaciones

Lo estudiado hasta el momento, en cuanto a las incógnitas del problema elástico, puede resumirse básicamente en los siguientes conceptos, válidos para cada punto del sólido analizado:

Tensión

el tensor $\underline{\underline{S}}$ define totalmente la tensión en un punto y permite calcular la tensión en un punto con referencia a un plano cuya normal es “n” con la expresión:

$$\underline{\underline{S}}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}$$

Deformación

el tensor $\underline{\underline{e}}$ define la deformación en un punto y permite calcular la deformación en un punto para un segmento orientado según “n” con la expresión:

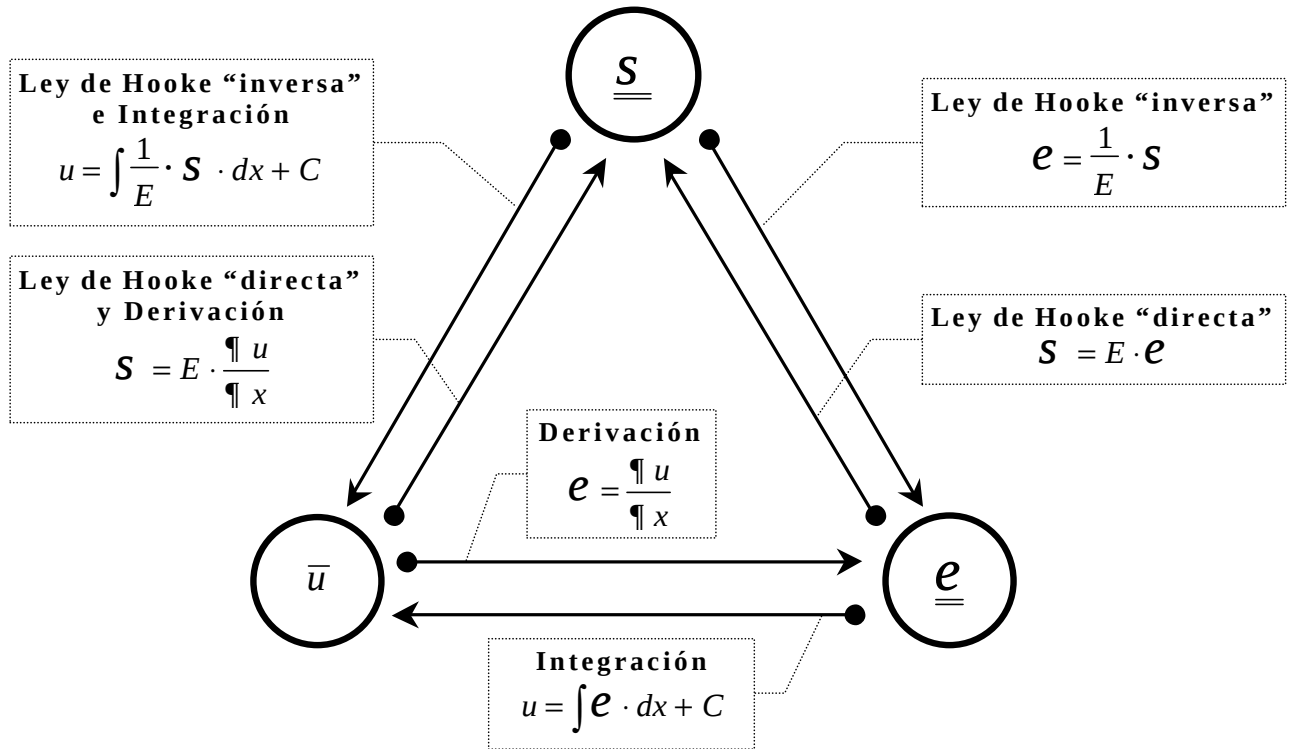
$$e = \hat{n}^T \times \underline{\underline{e}} \cdot \hat{n}$$

Desplazamiento

el vector $\bar{u}$ define completamente los desplazamientos en un punto del sólido en estudio.

Relaciones

el siguiente esquema muestra las relaciones $\underline{S}$ – $\underline{e}$ – $\bar{u}$ de manera muy elemental, ejemplificándolas para el caso unidimensional:



A partir de los ensayos de tracción, compresión y torsión (corte) se deducen de manera práctica las **Relaciones Tensión – Deformación** habitualmente utilizadas, por ejemplo, para materiales tales como el acero. Es común considerar a estos materiales como **homogéneos e isotrópicos**, salvo en casos donde su estructura metalográfica está fuertemente distorsionada como sucede en algunos aceros laminados, forjados o fundidos.

Además de la homogeneidad e isotropía, se suele considerar que existe **proporcionalidad entre tensiones y deformaciones** dentro del período elástico (aunque muchos materiales presentan comportamientos marcadamente no lineales en sus diagramas tensión – deformación).

De todos modos, cuando las hipótesis de homogeneidad, isotropía y proporcionalidad son aceptables se aplica la conocida **Ley de Hooke** para expresar la relación lineal resultante entre tensiones y deformaciones, tanto en tracción-compresión como en deslizamiento:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma directa de la Ley de Hooke (tracción-compresión): } S = E \cdot e \\ \text{Forma inversa de la Ley de Hooke (tracción-compresión): } e = \frac{1}{E} \cdot S \end{array} \right\} e_{\text{transversal}} = -n \cdot e$$

Forma directa de la Ley de Hooke (deslizamiento): $t = G \cdot g$

Forma inversa de la Ley de Hooke (deslizamiento): $g = \frac{1}{G} \cdot t$

En estas expresiones aparecen las **Constantes Elásticas del Material** “E, G, n” que definen completamente el comportamiento del material isótropo y que se relacionan entre sí de modo que sólo dos de ellas son independientes:

Módulo de Elasticidad Longitudinal (Young, o de 1º Género): E

Coefficiente de Deformación Transversal (Poisson): n

Módulo de Deslizamiento (o de 2º Género): G

$$\left. \begin{matrix} E \\ n \\ G \end{matrix} \right\} \boxed{G = \frac{E}{2(1+n)}}$$

Esta relación entre las constantes elásticas se demostrará más adelante planteando la energía de deformación durante el deslizamiento. Adicionalmente, analizando la deformación volumétrica, se comprobará que el coeficiente de Poisson posee valores acotados: $n \leq 0,5$.

3.2. Ley de Hooke Generalizada

La extensión de las relaciones tensión-deformación al **caso multidimensional lineal** se conoce como Ley de Hooke Generalizada y establece que todas las componentes de tensión son funciones lineales de las componentes de la deformación. Para expresarlo matemáticamente es común escribir las seis componentes del tensor de tensiones en un vector y hacer lo propio con las seis componentes del tensor de deformaciones. Así, en términos genéricos, tal relación lineal queda expresada a través de una **matriz de constantes elásticas** $\underline{\underline{D}} = [d_{ij}]$:

$$\left\{ \begin{matrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{matrix} \right\}$$

$$\boxed{\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{e}}}$$

Esta matriz en principio posee 36 coeficientes pero, por cuestiones energéticas, puede demostrarse que la misma **es simétrica** y por tanto sólo 21 coeficientes son distintos, lo cual corresponde al caso de un material totalmente anisótropo.

Materiales con grados crecientes de simetría requieren cada vez menor cantidad de constantes elásticas para definir su comportamiento, por ejemplo:

Materiales asimétricos (anisótropos)	requieren 21 constantes
Materiales con 1 plano de simetría	requieren 13 constantes
Materiales con 3 planos de simetría (ortótropos)	requieren 9 constantes
Materiales con 1 eje de simetría (transversalmente anisótropos)	requieren 5 constantes
Materiales con 3 ejes de simetría (isótropos)	requieren 2 constantes

El último caso (material isótropo) se define tan sólo con 2 constantes elásticas a elección entre “E, G, n” y es el que se considera en la Teoría de la Elasticidad Lineal.

¿Simetría?

Se ha mencionado que por “cuestiones energéticas” la matriz de constantes elásticas debe ser simétrica, y lo comprobaremos con un caso 2D sencillo sin pretender demostrarlo formalmente.

Consideremos un material que cumpla con la Ley de Hooke Generalizada, al cual deformamos hasta llevarlo a un estado final consistente solamente en deformaciones longitudinales según dos direcciones (no existen tensiones ni deformaciones tangenciales según las direcciones analizadas). Entonces, las componentes de tensión se escriben como funciones lineales de las componentes de deformación del siguiente modo:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= d_{11}e_{xx} + d_{12}e_{yy} \\ S_{yy} &= d_{21}e_{xx} + d_{22}e_{yy} \end{aligned}$$

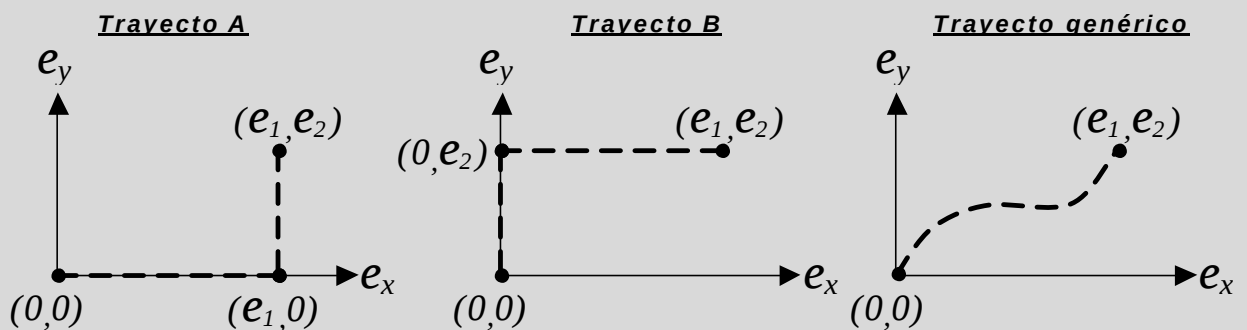
o simplemente:

$$\begin{aligned} S_x &= d_{11}e_x + d_{12}e_y \\ S_y &= d_{21}e_x + d_{22}e_y \end{aligned}$$

donde

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Resulta que el ESTADO FINAL DE DEFORMACION, caracterizado por sus componentes según X e Y, tiene asociado un TRABAJO que necesariamente debe ser INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA seguida. Es decir, que las fuerzas interiores hacen el mismo trabajo cualquiera sea el orden o modo de aplicación de las deformaciones, siempre que conduzcan a un mismo estado deformado final. En otras palabras, la energía elástica de deformación es una FUNCION DE ESTADO (no depende de la trayectoria). Es así que plantearemos dos posibles caminos de deformación (Trayecto A y B) que conducen al mismo estado final y procederemos a comparar sus correspondientes trabajos:



La expresión del trabajo en los trayectos A y B planteados consta de dos integrales: una para la parte horizontal y otra para la parte vertical del trayecto, y ambas son de la forma:

$$W = \int_{\text{punto inicial}}^{\text{punto final}} (S_x de_x + S_y de_y)$$

Para el **Trayecto A** se tiene:

$$W_A = \underbrace{\int_{(0,0)}^{(e_1,0)} (s_x d\mathbf{e}_x + s_y d\mathbf{e}_y)}_{\text{aquí se anula } d\mathbf{e}_y \text{ por ser un trayecto horizontal}} + \underbrace{\int_{(e_1,0)}^{(e_1,e_2)} (s_x d\mathbf{e}_x + s_y d\mathbf{e}_y)}_{\text{aquí se anula } d\mathbf{e}_x \text{ por ser un trayecto vertical}} =$$

$$= \int_{(0,0)}^{(e_1,0)} s_x d\mathbf{e}_x + \int_{(e_1,0)}^{(e_1,e_2)} s_y d\mathbf{e}_y =$$

$$= \underbrace{\int_{(0,0)}^{(e_1,0)} (d_{11}\mathbf{e}_x + d_{12}\mathbf{e}_y) d\mathbf{e}_x}_{\text{aquí } \mathbf{e}_y \text{ es nulo}} + \underbrace{\int_{(e_1,0)}^{(e_1,e_2)} (d_{21}\mathbf{e}_x + d_{22}\mathbf{e}_y) d\mathbf{e}_y}_{\text{aquí } \mathbf{e}_x \text{ es cte e igual a } \mathbf{e}_1} =$$

$$= d_{11} \int_{(0,0)}^{(e_1,0)} \mathbf{e}_x d\mathbf{e}_x + d_{21} \mathbf{e}_1 \int_{(e_1,0)}^{(e_1,e_2)} d\mathbf{e}_y + d_{22} \int_{(e_1,0)}^{(e_1,e_2)} \mathbf{e}_y d\mathbf{e}_y =$$

$$W_A = d_{11} \frac{(\mathbf{e}_1)^2}{2} + d_{21} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + d_{22} \frac{(\mathbf{e}_2)^2}{2}$$

Para el **Trayecto B**, con la misma metodología aplicada en el caso anterior, se tiene:

$$W_B = \underbrace{\int_{(0,0)}^{(0,e_2)} (s_x d\mathbf{e}_x + s_y d\mathbf{e}_y)}_{\text{aquí se anula } d\mathbf{e}_x \text{ por ser un trayecto vertical}} + \underbrace{\int_{(0,e_2)}^{(e_1,e_2)} (s_x d\mathbf{e}_x + s_y d\mathbf{e}_y)}_{\text{aquí se anula } d\mathbf{e}_y \text{ por ser un trayecto horizontal}} =$$

$$W_B = d_{11} \frac{(\mathbf{e}_1)^2}{2} + d_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + d_{22} \frac{(\mathbf{e}_2)^2}{2}$$

Observando ambas expresiones del trabajo se constata que los términos que acompañan a los cuadrados de las deformaciones son idénticos. Sólo resta que lo sean los términos que involucran al producto de ambas deformaciones. Es evidente que para que ello sea posible las constantes elásticas d_{12} y d_{21} deben ser iguales, con lo cual se concluye que la matriz de constantes elásticas resulta simétrica:

$$d_{21} = d_{12} \rightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \text{ es simétrica}$$

3.3.

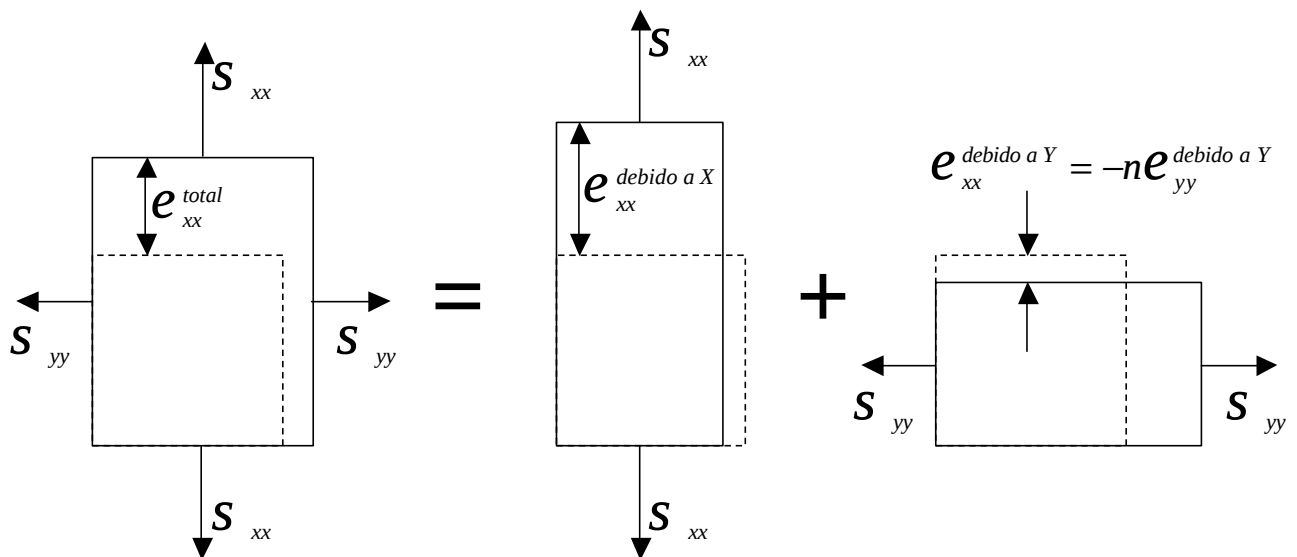
Forma “inversa” de la Ley de Hooke

De momento la matriz de constantes elásticas quedará expresada genéricamente, aceptando su estructura simétrica. Más tarde se definirá a partir de su inversa, la cual obtendremos directamente en este apartado aplicando el principio de superposición de efectos. Entonces, se obtendrá primero la relación que expresa a las deformaciones como función de las tensiones, conocida como Forma “Inversa” de la Ley de Hooke, en la que aparece una matriz de constantes elásticas que resulta ser la inversa de la planteada en la Ley de Hooke Generalizada.

Deformaciones por superposición de efectos

Como complemento al modelo de la Teoría de la Elasticidad Lineal, se exponen a continuación algunas hipótesis relacionadas con las deformaciones longitudinales, las distorsiones angulares y las componentes de tensión que las provocan:

- La **deformación longitudinal total** que corresponde a cierta dirección se compone de los aportes debidos a los alargamientos en esa dirección y a las contracciones de Poisson motivadas por alargamientos según las restantes dos direcciones. Además se postula que la misma no depende de las distorsiones angulares.



De este modo la deformación longitudinal total, por ejemplo según x , se calcularía como:

$$e_{xx}^{total} = e_{xx}^{debida a X} + e_{xx}^{debida a Y} + e_{xx}^{debida a Z} \dots \text{Independiente de } g$$

$$e_{xx}^{total} = \frac{1}{E} S_{xx} - \frac{n}{E} S_{yy} - \frac{n}{E} S_{zz} \dots \text{Independiente de } t$$

- La **distorsión angular** en un cierto plano es solamente función de la componente de tensión tangencial sobre ese plano, y por tanto no depende de las componentes normales de tensión ni de las restantes componentes cortantes. Según esta hipótesis la distorsión angular sobre un plano tal como el “XY” se calcula como:

$$g_{xy} = \frac{1}{G} S_{xy}$$

Forma “Inversa” de la Ley de Hooke

Sobre la base de las anteriores hipótesis se escribe directamente la expresión que permite obtener a las componentes de la deformación como funciones de las componentes de tensión:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} S_{xx} - \frac{n}{E} S_{yy} - \frac{n}{E} S_{zz} \\ e_{yy} &= -\frac{n}{E} S_{xx} + \frac{1}{E} S_{yy} - \frac{n}{E} S_{zz} \\ e_{zz} &= -\frac{n}{E} S_{xx} - \frac{n}{E} S_{yy} + \frac{1}{E} S_{zz} \\ g_{xy} &= \frac{1}{G} S_{xy} \\ g_{xz} &= \frac{1}{G} S_{xz} \\ g_{yz} &= \frac{1}{G} S_{yz} \end{aligned}$$

La forma matricial de las expresiones anteriores muestra claramente la estructura (simétrica y a bloques) de la inversa de la matriz de constantes elásticas de la Ley de Hooke Generalizada:

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -n/E & -n/E & 0 & 0 & 0 \\ -n/E & 1/E & -n/E & 0 & 0 & 0 \\ -n/E & -n/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\bar{e}} = D^{-1} \cdot \bar{\bar{S}}$$

3.4.**Forma “directa” de la Ley de Hooke**

La forma directa de la Ley de Hooke expresa a las tensiones en función de las deformaciones a través de una matriz de constantes elásticas $\underline{\underline{D}} = [d_{ij}]$ que tendremos que hallar por inversión de la obtenida en el apartado anterior. Se aprovecharán características tales como la simetría, la presencia de bloques nulos y otras que simplifican la obtención de su inversa. La justificación de las técnicas utilizadas proviene del álgebra matricial y no será discutida en detalle.

La estructura de la matriz a invertir

Una ventaja de esta matriz 6x6 está en los dos bloques nulos 3x3, ubicados en su contradiagonal, que manifiestan la independencia que poseen las tensiones y deformaciones normales respecto de las tangenciales. Por ello puede encararse, por un lado, la inversión de la submatriz 3x3 que vincula las tensiones normales con las deformaciones longitudinales y, por el otro, hacer lo propio con la que vincula a las tensiones tangenciales con las distorsiones angulares.

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -n/E & -n/E & 0 & 0 & 0 \\ -n/E & 1/E & -n/E & 0 & 0 & 0 \\ -n/E & -n/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -n/E & -n/E \\ -n/E & 1/E & -n/E \\ -n/E & -n/E & 1/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix}$$

El segundo problema planteado es sumamente sencillo debido a que la submatriz a invertir es del tipo “diagonal” y por tanto su inversa se obtiene directamente:

$$\begin{Bmatrix} S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix}$$

Para el otro caso conviene hacer observaciones adicionales tales como la simetría de la submatriz correspondiente y el hecho que sólo posee dos tipos distintos de coeficientes (los diagonales y los no diagonales). Estas características se conservan en su inversa, por lo que resultará también simétrica y con dos tipos básicos de elementos: los diagonales (A) y los no diagonales (B).

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -n/E & -n/E \\ -n/E & 1/E & -n/E \\ -n/E & -n/E & 1/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \end{Bmatrix}$$

Su obtención es sencilla a partir de la definición de matriz inversa como aquella que, multiplicada por la original, da como resultado la matriz identidad.

$\underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}}$	A	B	B
	B	A	B
	B	B	A
$1/E \quad -n/E \quad -n/E$	1	0	0
$-n/E \quad 1/E \quad -n/E$	0	1	0
$-n/E \quad -n/E \quad 1/E$	0	0	1

Por simple inspección puede comprobarse que los “Tres Unos” de la matriz identidad corresponden a una misma ecuación mientras otra diferente define a sus “Seis Ceros”. De este modo es posible plantear un sistema 2x2 para obtener los coeficientes “A” y “B” desconocidos:

$$\begin{bmatrix} 1/E & -2n/E \\ -n/E & (1-n)/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Este sistema puede ser reescrito, por conveniencia para su resolución, multiplicando todo por “E”:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2n \\ -1 & (1-n)/n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De este modo la suma de las ecuaciones permite eliminar a “A” y calcular el valor de “B”, para luego despejar “A”, por ejemplo de la segunda ecuación, y obtener finalmente:

$$A = \frac{E}{(1+n)(1-2n)}(1-n)$$

$$B = \frac{E}{(1+n)(1-2n)}n$$

Forma “Directa” de la Ley de Hooke

Reuniendo lo obtenido en la sección previa puede escribirse explícitamente a las tensiones como función de las deformaciones a través de una matriz 6x6 de constantes elásticas cuyos coeficientes se compactan mediante la siguiente notación clásica:

$$l = \frac{E}{(1+n)(1-2n)}n$$

con lo cual los coeficientes “A” y “B” quedan:

$$\begin{aligned} A &= l(1-n)/n \\ B &= l \end{aligned}$$

De esta manera se llega a la Forma Directa de la Ley de Hooke:

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l(1-n)/n & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l(1-n)/n & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & l(1-n)/n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix}$$

- Recordando la relación entre las constantes elásticas del material isótropo:

$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$

- Es fácil verificar la igualdad siguiente (utilizable en los primeros tres elementos diagonales de la matriz):

$$l \frac{1-n}{n} = 2G + l$$

- Que permite reescribir la ley de Hooke en otra de sus clásicas formas:

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + l & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & 2G + l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 2G + l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{e}}$$

3.5.

Las constantes elásticas del material isótropo

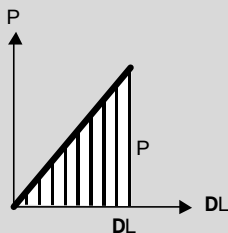
Para completar el estudio de las relaciones Tensión-Deformación-Desplazamiento, se propone profundizar algunas cuestiones vinculadas a las constantes elásticas que definen al material isótropo. Se ha mencionado que las tres constantes “**E**, **G** y **n**” no son independientes, hecho que quedará en evidencia en la siguiente sección, y también que el coeficiente de Poisson “**n**” no puede adoptar cualquier valor arbitrario, lo cual se demostrará en la sección final.

Relación entre las constantes E, G y n

Una forma de poner en evidencia la relación entre las constantes elásticas consiste en plantear la energía de deformación para una porción de material en estado de corte puro. Al hacerlo debe resultar indiferente el sistema de coordenadas utilizado para el cálculo, que afecta a las componentes de los tensores de tensión y deformación, pues el resultado final es una magnitud escalar (invariante). Aprovechando este hecho, se calcula la energía de deformación desde dos sistemas de coordenadas distintos, uno coincidente con las direcciones principales y otro coincidente con la tensión cortante, y se igualan ambos resultados para hallar la relación buscada.

Energía de Deformación: CASO 1D

La energía de deformación asociada a un proceso tracción o compresión uniaxial puede deducirse observando el correspondiente diagrama de carga. Se trata de un proceso “cuasiestático” donde la carga crece con la deformación entregando una energía que se almacena íntegramente como elástica y es numéricamente igual al área bajo la curva **P-DL**:

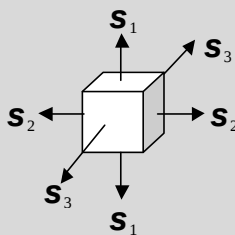


$$U_{\text{EXTERIOR}} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta L = \frac{1}{2} S \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} \cdot L = \frac{1}{2} S \cdot e \cdot \text{Vol}$$

$$U_{\text{ESPECIFICA}} = \frac{1}{2} S \cdot e = \frac{1}{2E} S^2 = \frac{E}{2} e^2$$

Energía de Deformación: CASO 3D

Para el caso tridimensional la energía se obtiene por “superposición” de las aportadas por las distintas componentes de tensión. Resulta sencillo calcularla en un sistema coincidente con las direcciones principales, de modo que sólo se consideren tres componentes no nulas (las tensiones principales):



$$U_{\text{ESPECIFICA}} = \frac{1}{2} (S_1 \cdot e_1 + S_2 \cdot e_2 + S_3 \cdot e_3)$$

$$e_1 = \frac{1}{E} (S_1 - n S_2 - n S_3)$$

$$e_2 = \frac{1}{E} (S_2 - n S_1 - n S_3)$$

$$e_3 = \frac{1}{E} (S_3 - n S_1 - n S_2)$$

A fin de expresar la energía específica (por unidad de volumen) solamente en función de las componentes de tensión, se hará uso de la ley de Hooke (en su forma inversa) para eliminar de su expresión a las deformaciones.

Reemplazando las componentes de deformación en la expresión de la energía se tiene:

$$U_{ESP} = \frac{1}{2} \left[S_1 \cdot \frac{1}{E} (S_1 - nS_2 - nS_3) + S_2 \cdot \frac{1}{E} (S_2 - nS_1 - nS_3) + S_3 \cdot \frac{1}{E} (S_3 - nS_1 - nS_2) \right]$$

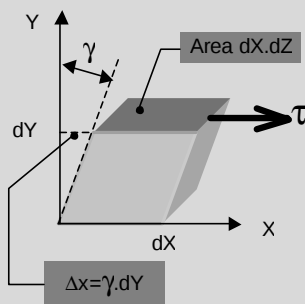
$$U_{ESP} = \frac{1}{2E} [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2n(S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3)]$$

Energía de Deformación: CASO 3D – CORTE PURO

caracteriza por

$$S_1 = t ; S_2 = 0 ; S_3 = -t$$

El caso tridimensional para el estado de corte puro se y la correspondiente energía de deformación vale:



$$U_{ESP} = \frac{1}{2E} [S_1^2 + S_3^2 - 2n(S_1S_3)] = \frac{1}{2E} [t^2 + t^2 + 2nt^2] = \frac{1+n}{E} t^2$$

De manera similar es posible calcular la energía asociada al estado de corte puro considerando un sistema coordenado orientado según la tensión cortante:

$$U = \frac{1}{2} \text{Fuerza} \cdot \text{Distancia} = \frac{1}{2} t \cdot dX \cdot dZ \cdot g \cdot dY = \frac{1}{2} t \cdot g \cdot dVol$$

$$U_{ESP} = \frac{1}{2} t \cdot g = \frac{1}{2G} t^2 = \frac{G}{2} g^2$$

Igualando las expresiones de la energía, calculada en los dos sistemas mencionados, se tiene:

$$U_{ESP} = \frac{1}{E} (1+n) t^2$$

$$U_{ESP} = \frac{1}{2G} t^2$$

$$\frac{1}{2G} t^2 = \frac{1}{E} (1+n) t^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$

Valores admisibles para el coeficiente “n”

Dado que la deformación volumétrica que experimenta una porción de material sometida a un estado tracción triaxial “no puede decrecer” es posible deducir de su expresión (con ayuda de la Ley de Hooke) los valores admisibles para el coeficiente de Poisson “n”:

$$e_v \cong e_1 + e_2 + e_3 \geq 0 \quad \text{EN TRACCION TRIAXIAL}$$

$$= \left(\frac{S_1}{E} - \frac{nS_2}{E} - \frac{nS_3}{E} \right) + \left(-\frac{nS_1}{E} + \frac{S_2}{E} - \frac{nS_3}{E} \right) + \left(-\frac{nS_1}{E} - \frac{nS_2}{E} + \frac{S_3}{E} \right) =$$

$$= \frac{1-2n}{E} \underbrace{(S_1 + S_2 + S_3)}_{>0 \text{ TRACCION}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2n}{E} \geq 0 \Rightarrow n \leq 0.5$$