Ecuaciones de compatibilidad en el volumen

Se deducirán aquí las ecuaciones de compatibilidad con una metodología sencilla, a modo de “receta”, pero que se apoya en un análisis matemático riguroso que no se describirá. La misma consiste en tomar las ecuaciones que definen a las componentes de la deformación y eliminar de ellas a los desplazamientos. Esto se logra derivándolas sucesivas veces y sumándolas o restándolas entre sí. El resultado final es un grupo de 6 ecuaciones diferenciales que involucran a las distintas componentes de la deformación (y a sus derivadas).

Ecuaciones obtenidas por derivación sucesiva de los alargamientos:

Hay 3 ecuaciones de alargamientos, una para cada dirección (coordenada o variable). Si se derivan dos veces respecto de otra variable, sus segundos miembros se convierten en “una parte” de la expresión de la distorsión sobre algún plano coordenado. Por ello, al sumar los resultados de dos de estas ecuaciones derivadas, aparece en el segundo miembro alguna distorsión “completa” que permite eliminar a los desplazamientos. La ecuación resultante vincula derivadas de los alargamientos con derivadas de las distorsiones (hay 3 ecuaciones de este tipo).

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}} \qquad \boxed{\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varepsilon_{xx}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varepsilon_{yy}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \quad + \quad \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}} \tag{1}$$

Procediendo de manera similar con otro par de ecuaciones se tiene:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad + \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}} \tag{2}$$

Finalmente, el último par de ecuaciones de alargamientos nos da:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad + \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}} \tag{3}$$

<u>Ecuaciones obtenidas por derivación sucesiva de las distorsiones</u>:

Hay 3 ecuaciones de distorsiones, una para cada plano coordenado. Si se derivan respecto a la variable perpendicular a dicho plano, se obtienen tres expresiones en las que aparecen derivadas cruzadas de dos alargamientos. Combinándolas, por suma de dos de ellas y resta de la otra, se obtienen expresiones que contienen derivadas cruzadas de un único desplazamiento.

Por último, si aquellas se derivan respecto de la coordenada que coincide con ese desplazamiento, es posible eliminarlo ya que "se convierte" en un alargamiento. Así se obtienen 3 ecuaciones diferenciales que vinculan derivadas de distorsiones con derivadas de alargamientos, y constituyen las restantes condiciones de compatibilidad.

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}} \qquad \boxed{\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}} \qquad \boxed{\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}}$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial z} \qquad\qquad \Big\downarrow \frac{\partial}{\partial y} \qquad\qquad \Big\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \qquad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}$$

A **B** **C**

Distintas combinaciones de las ecuaciones ***A***, ***B*** *y* ***C*** *son derivadas a continuación de modo que se eliminen de sus segundos miembros los desplazamientos:*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = \boxed{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}}$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

4 $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}}$$

Procediendo de forma similar con las otras dos posibles combinaciones se tiene:

$$A - B + C = \quad \boxed{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}}$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial y}$$

5 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z}$$

$$-A + B + C = \quad \boxed{-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial z}$$

6 $$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

Resumen de las ecuaciones de compatibilidad en el volumen:

Las siguientes ecuaciones establecen matemáticamente las condiciones de compatibilidad que en forma intuitiva se plantearon como necesarias para que las deformaciones se correspondan con auténticos desplazamientos de un sólido continuo. Puede demostrarse que cualquier otra ecuación que vincule componentes de la deformación es una ***combinación lineal*** *de estas 6 ecuaciones fundamentales.*

1 $$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

2 $$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

3 $$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

4 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$$

5 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z}$$

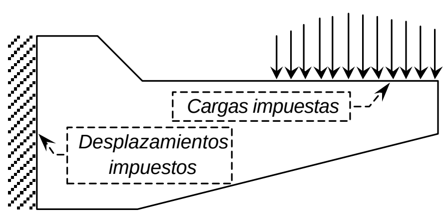
6 $$\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

Ecuaciones de compatibilidad en el contorno

*Se vio que las componentes de la deformación deben ser compatibles entre sí para corresponderse con auténticos desplazamientos de un sólido continuo. Esto implica que pueden obtenerse los desplazamientos "**u, v, w**" por integración de tales componentes de la deformación. Sin embargo, este proceso deja indefinidas algunas **constantes de integración** que deben ajustarse en función de las **condiciones de contorno** del problema particular planteado.*

$$
\begin{aligned}
u_{(x,y,z)} &= \int e_{xx}\, dx + U_{(y,z)} \\
v_{(x,y,z)} &= \int e_{yy}\, dy + V_{(x,z)} \\
w_{(x,y,z)} &= \int e_{zz}\, dz + W_{(x,y)}
\end{aligned}
$$

*Las condiciones de contorno son de dos tipos básicos: las que imponen tensiones en la parte de la superficie del sólido que denominamos G_S y las que imponen desplazamientos, aplicadas en la parte de la superficie que denominamos $G_{\boldsymbol{u}}$. Son estas últimas condiciones las que permiten ajustar las constantes de integración de las expresiones de los desplazamientos (que son funciones continuas de las variables **x, y, z**).*



*Estas condiciones se expresan matemáticamente de manera muy sencilla como: "**<u>Función desplazamiento</u> evaluada en el contorno Gu = <u>Desplazamiento impuesto</u> en Gu**". En las expresiones siguientes el suprarayado en las letras del segundo miembro indica que se trata de "desplazamientos impuestos", no confundirlo con la notación utilizada para vectores, y a tales ecuaciones se las conoce como **ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD EN EL CONTORNO**:*

$$
\boxed{\; en \quad \Gamma_u \quad \begin{cases} u_{(x,y,z)} = \overline{u} \\ v_{(x,y,z)} = \overline{v} \\ w_{(x,y,z)} = \overline{w} \end{cases} \;}
$$