

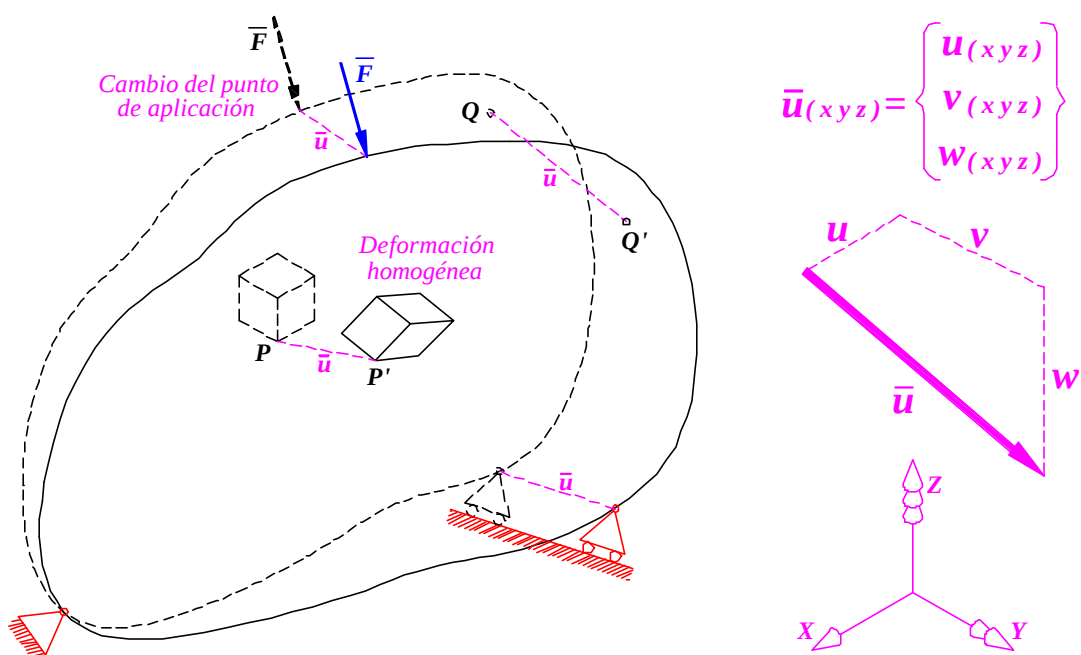
2. Los desplazamientos y las deformaciones

A continuación se analizarán los desplazamientos que experimenta un sólido genérico cargado y con vínculos que le impiden movimientos como cuerpo rígido, por lo cual estos desplazamientos siempre generan deformaciones en el sólido. Se desarrollarán las siguientes cuestiones:

- 2.1. Se analizarán los desplazamientos de un cubo diferencial alrededor de un punto del sólido y sus relaciones “lineales” con las componentes de la deformación según los ejes coordenados.
- 2.2. Se planteará la deformación de un segmento de orientación arbitraria para observar su vinculación con las componentes de la deformación según los ejes coordenados.
- 2.3. Se verificará que las componentes de la deformación constituyen una magnitud tensorial y se buscarán sus direcciones y deformaciones principales, y el significado de sus invariantes.
- 2.4. Se planteará que las componentes de la deformación no son independientes y por tanto sólo representan verdaderas deformaciones (y desplazamientos) de un sólido continuo cuando cumplen unas “Condiciones de compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones”.

2.1. Relaciones “lineales” entre desplazamientos y deformaciones

Consideremos un sólido de forma genérica solicitado por un grupo de cargas cualquiera y con vínculos suficientes que impiden su movimiento como cuerpo rígido, de modo que no sea posible el desplazamiento de las partículas del sólido sin una deformación del mismo:

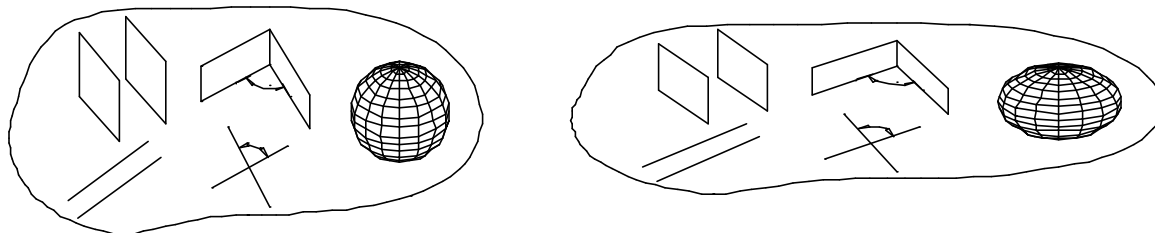


Haremos algunas hipótesis acerca de este **proceso de deformación** que definen la aproximación con que la TEORIA DE LA ELASTICIDAD LINEAL describe este fenómeno:

1. **Desplazamientos continuos**: En cada punto del sólido está definido un vector $\bar{u}$ de desplazamientos que ~~varía con continuidad~~ en todo el volumen. Esta condición es necesaria para respetar la hipótesis de que el sólido es "continuo". Si en alguna zona el campo de desplazamientos no lo fuera, significaría que dos puntos que estaban infinitamente próximos antes de la deformación han sufrido desplazamientos $\bar{u}$ muy distintos y por tanto se han separado mutuamente una distancia finita (el cuerpo se ha fisurado).

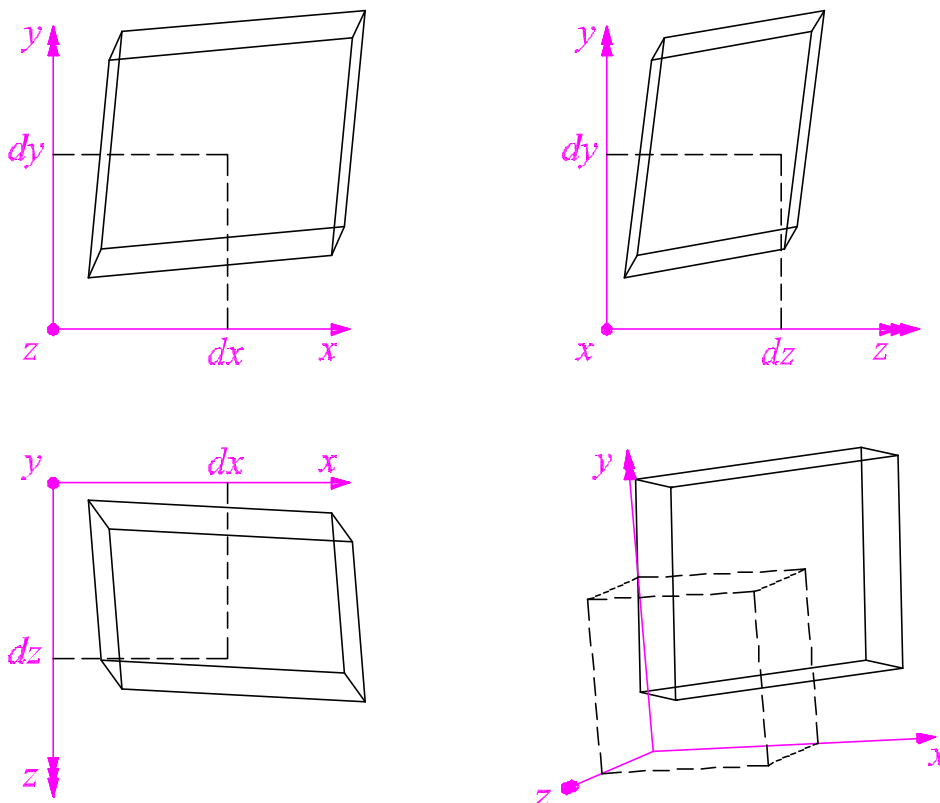
La continuidad del campo vectorial $\bar{u}$ implica que, en cualquier sistema de coordenadas (XYZ), las componentes "**u, v, w**" del mismo son también funciones continuas de "**x, y, z**".

2. **Desplazamientos pequeños**: Supondremos que los desplazamientos en todo el cuerpo son pequeños, de modo que no afecten significativamente la posición de las cargas. Esta consideración estuvo implícita en la deducción de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, ya que en ningún momento se hizo distinción entre los estados deformado y sin deformar del cuerpo. Por tanto, no se tuvieron en cuenta los cambios en los puntos de aplicación de las fuerzas de superficie y las de volumen.
3. **Deformaciones pequeñas**: como consecuencia de la continuidad y pequeñez de los desplazamientos, las deformaciones en todo el cuerpo son también magnitudes pequeñas.
4. **Deformación homogénea en el entorno infinitesimal de un punto**: consideraremos que un cubo diferencial alrededor de un punto cualquiera del cuerpo experimenta un tipo particular de deformación denominada "homogénea". Aquella supone que todos los puntos del mismo sufren igual deformación en una dirección dada y que dos elementos geoméricamente semejantes e igualmente orientados se conservan así luego de la deformación. Esto es, que las rectas y planos se conservan como tales después de la deformación, que los planos y rectas paralelos conservan su paralelismo y que una esfera se transforma en un elipsoide.



Nota: A nivel global la deformación no es homogénea, sino que varía en cada punto del cuerpo, salvo para casos muy particulares como el de una barra recta sometida a tracción simple. Incluso en casos sencillos como el de flexión simple, por ejemplo, las deformaciones varían con la distancia a la capa neutra: las secciones permanecen planas pero ya no paralelas y algunos planos longitudinales se convierten en superficies curvas.

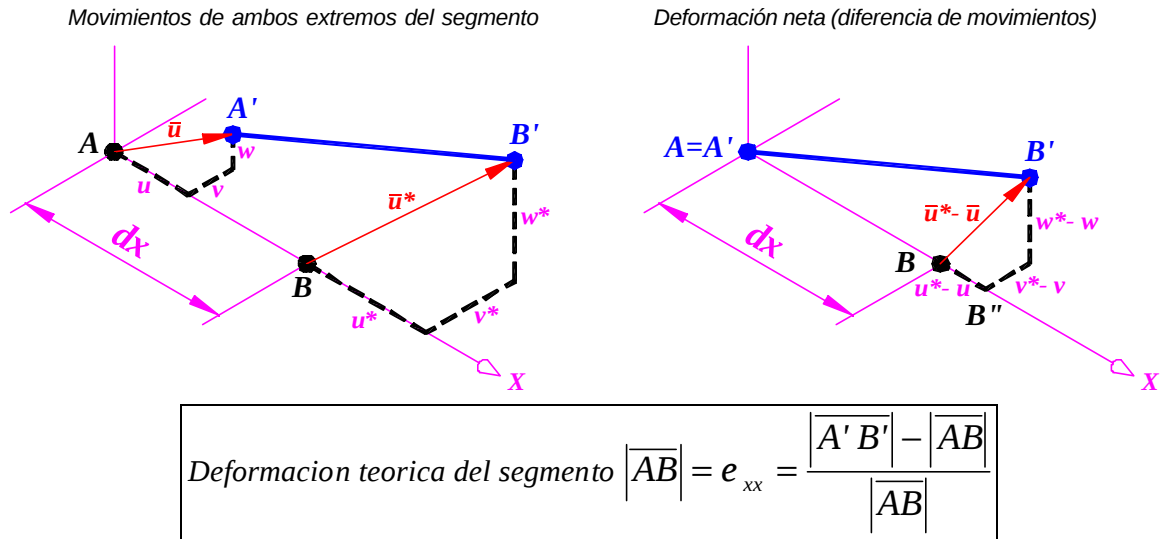
Con base en estas suposiciones analizaremos los desplazamientos y deformaciones de un cubo diferencial alrededor de un punto del sólido, paralelo a los ejes coordenados. La hipótesis de deformación homogénea del cubo impone que sus caras planas y paralelas antes de la deformación permanezcan como tales luego de ocurrida la misma.



Se buscará una expresión para la **deformación longitudinal** que sufren los segmentos diferenciales paralelos a los ejes coordenados, cuya forma genérica es el cociente entre el estiramiento (longitud final menos la inicial) y la longitud inicial. Luego se hará lo propio con la **distorsión angular** que experimentan cada par de estos segmentos, perpendiculares entre sí antes de la deformación, sobre cada uno de los planos coordenados.

Deformación longitudinal de un segmento diferencial paralelo a un eje coordenado

En general, un segmento diferencial paralelo a un eje se estira o acorta y, además, se desvía del eje coordenado porque sus extremos sufren movimientos distintos (si ambos tuviesen el mismo movimiento el segmento no se deformaría). El desvío se debe a las diferencias de movimientos según los otros dos ejes perpendiculares al primero. Observaremos que, para la deformación del segmento, resulta mucho más significativa la diferencia de movimientos de sus extremos en el sentido del propio eje que según los otros dos ejes coordenados.



Segmento deformado A'B':

$$A' = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}; \quad B' = \begin{Bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} \rightarrow A'B' = \begin{Bmatrix} u^* - u + dx \\ v^* - v \\ w^* - w \end{Bmatrix}$$

Aproximación lineal de los movimientos en B como función de los correspondientes en A:

$$\left. \begin{aligned} u^* &\cong u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ v^* &\cong v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ w^* &\cong w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \end{aligned} \right\} \rightarrow A'B' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ \frac{\partial w}{\partial x} dx \end{Bmatrix}$$

Longitudes TEORICA y APROXIMADA del segmento deformado:

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} = \\ &= dx \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \text{ y } \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \ll 1 \\ &\cong dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) = |A'B''| \end{aligned}$$

Con base en lo anterior, podremos **aproximar la deformación del segmento** teniendo en cuenta solamente lo que sucede según su dirección inicial (eje X por ejemplo) y despreciar la pequeña deformación adicional que provocan los movimientos según direcciones perpendiculares a ella (ejes Y, Z). Luego, con un ejemplo numérico, comprobaremos la validez de tal aproximación.

Deformación TEORICA del segmento AB:

$$e_{xx} = \frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|} = \frac{dx \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - dx}{dx} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1$$

Deformación APROXIMADA del segmento AB:

$$e_{xx} = \frac{|A'B''| - |AB|}{|AB|} = \frac{dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ejemplo

Sea un segmento de longitud 1000mm, paralelo al eje X, que se estira igualmente según los tres ejes en una cantidad igual a 1mm (este es el orden de magnitud que pueden tener las deformaciones en un acero de construcción). Verificaremos que la deformación real del segmento, debida a los tres estiramientos, es muy similar a la correspondiente al eje X y que por tanto las otras dos (distorsiones según Y y Z) pueden despreciarse:

Longitud inicial	AB = 1000	
Estiramiento según X.....	$u^* - u = 1$	
Estiramiento según Y.....	$v^* - v = 1$	
Estiramiento según Z.....	$w^* - w = 1$	
Longitud final "REAL".....	$ A'B' = [(1000 + 1)^2 + (1)^2 + (1)^2]^{1/2}$	= 1001,000999
Longitud final "APROX.".....	$ A'B'' = 1000 + 1$	= 1001
Deformación "REAL"	$e_{xx} = (1001,000999 - 1000) / 1000$	= 0,001000999
Deformación "APROX.".....	$e_{xx} = (1001 - 1000) / 1000$	= 0,001
ERROR en e_{xx} aprox.	$E\% = 100 (0,001000999 - 0,001) / 0,001000999$	= 0,0998%

Procediendo de manera similar para el análisis de la deformación en segmentos diferenciales paralelos a los tres ejes coordenados se tiene, según la aproximación de la TEORIA DE LA ELASTICIDAD LINEAL:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

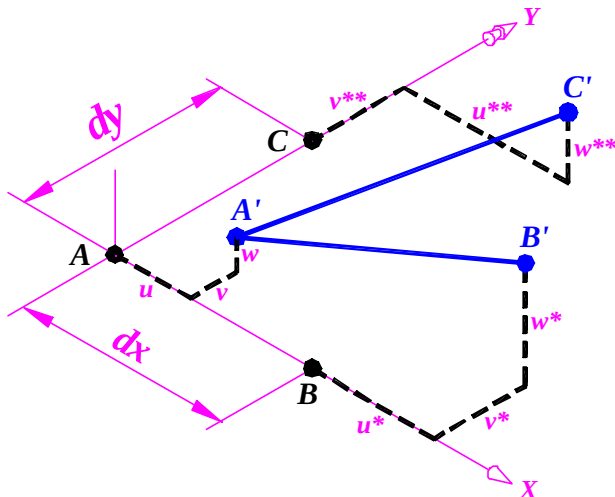
$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

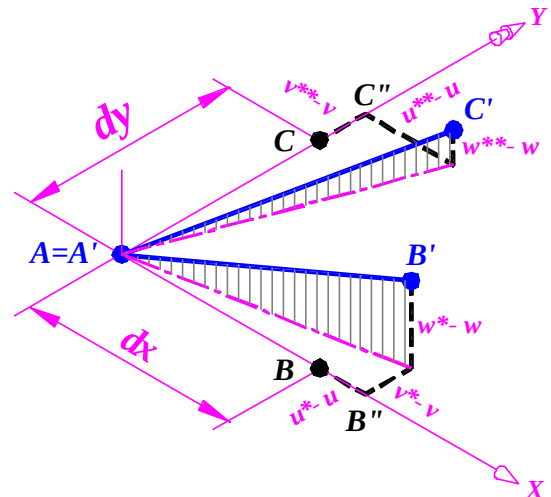
Distorsión del ángulo recto entre segmentos orientados según los ejes coordenados

En general, dos segmentos contenidos en un plano coordenado cualquiera, tal como el XY, y orientados según sus ejes (X e Y) sufren una distorsión del ángulo recto que formaban inicialmente. En rigor, esta distorsión debería medirse sobre el plano inclinado que contiene a ambos segmentos deformados para obtener su verdadera magnitud. Sin embargo, es posible despreciar la pequeña distorsión adicional que provoca la deformación según el eje perpendicular al plano en cuestión (eje Z) y considerar solamente la proyección del ángulo sobre el plano.

Movimientos de ambos segmentos
perpendiculares entre sí
antes de ocurrida la deformación



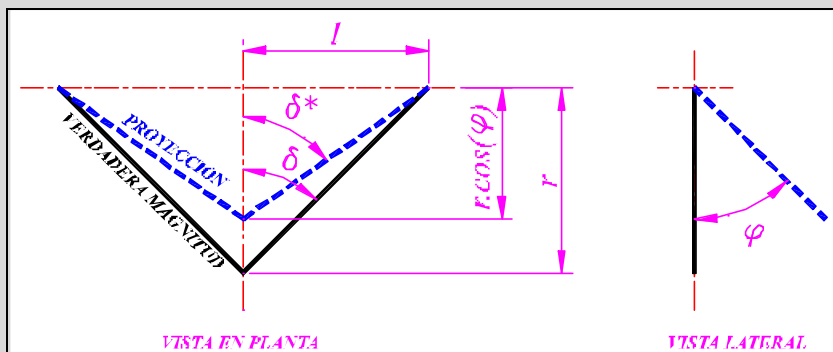
Distorsión neta del ángulo recto
VERDADERA MAGNITUD: sobre plano A'B'C'
PROYECCION sobre XY: desprecia los w, w* y w**



Ejemplo

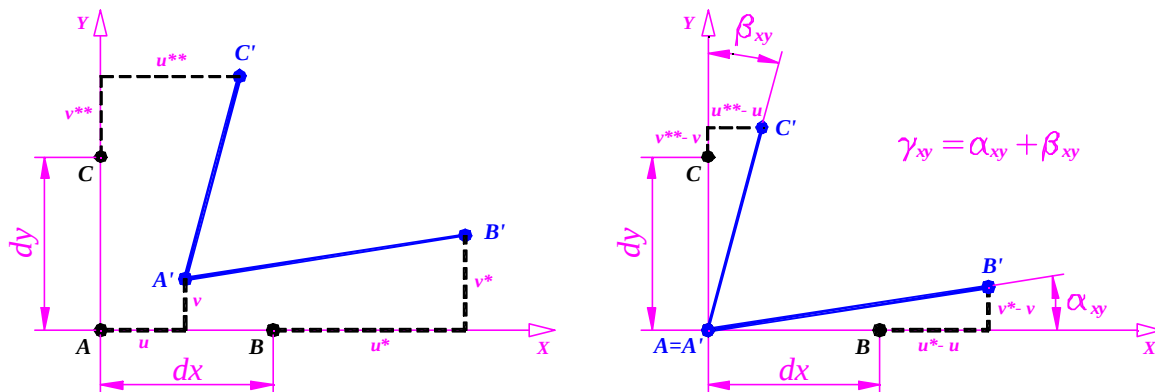
¿Qué tan distintas serán la VERDADERA MAGNITUD y la PROYECCION SOBRE XY de un ángulo contenido en un plano con leve inclinación f respecto al XY?

Lo comprobaremos numéricamente considerando un ángulo recto $2d = 90^\circ$ en verdadera magnitud, contenido en un plano levemente inclinado según $f = 1^\circ$ respecto al plano coordenado, y calculando el ángulo proyectado $2d^*$.



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(d) &= \frac{l}{r} \\ \operatorname{tg}(d^*) &= \frac{l}{r \cdot \cos j} \\ \text{Para } j = 1^\circ \text{ y } \frac{l}{r} &= 1 \\ 2d &= 90^\circ 0' 0,00'' \\ 2d^* &= 90^\circ 0' 31,42'' \end{aligned}$$

Adoptando esta aproximación analizaremos la distorsión total g_{xy} del ángulo recto entre dos segmentos paralelos a los ejes coordenados, la cual es suma de a_{xy} (correspondiente al segmento paralelo al eje X) y b_{xy} (correspondiente al segmento paralelo al eje Y).



$$\text{Distorsión en el plano } XY: g_{xy} = a_{xy} + b_{xy}$$

Distorsión del segmento AB, paralelo al eje X:

$$\operatorname{tg}(a_{xy}) = \frac{v^* - v}{dx + u^* - u}$$

Deformaciones netas en X, Y del extremo B:

$$u^* - u \cong \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$v^* - v \cong \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Aproximación por ángulos cercanos a 0°:

$$\operatorname{tg}(a_{xy}) \cong \operatorname{sen}(a_{xy}) \cong a_{xy}$$

Aproximación por pequeñas deformaciones:

$$a_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \cong \frac{\partial v}{\partial x}$$

Distorsión del segmento AC, paralelo al eje Y:

$$\operatorname{tg}(b_{xy}) = \frac{u^{**} - u}{dy + v^{**} - v}$$

Deformaciones netas en X, Y del extremo C:

$$u^{**} - u \cong \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u = \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$v^{**} - v \cong \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - v = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Aproximación por ángulos cercanos a 0°:

$$\operatorname{tg}(b_{xy}) \cong \operatorname{sen}(b_{xy}) \cong b_{xy}$$

Aproximación por pequeñas deformaciones:

$$b_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} \cong \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Procediendo de manera similar sobre los tres planos coordenados XY, XZ e YZ se obtienen las expresiones para las distorsiones de los ángulos rectos sobre los mismos:

Plano XY

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Plano XZ

$$g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Plano YZ

$$g_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Componentes de la deformación

Bajo ciertas hipótesis se dedujeron seis ecuaciones que vinculan los desplazamientos (sus derivadas) de un cubo diferencial, orientado según los ejes coordenados, con las deformaciones de sus aristas y las distorsiones de los ángulos rectos que éstas formaban inicialmente.

Aún no se aclaró el por qué de este análisis tan particular del cubo. La respuesta está en el próximo apartado, en el que se estudia la deformación de un segmento de orientación arbitraria en torno a un cierto punto. Resulta que la misma se expresa, justamente, en función de estas seis **COMPONENTES DE LA DEFORMACION** que acabamos de deducir e interpretar físicamente. Es decir, la deformación que experimenta un segmento cualquiera depende de tres deformaciones longitudinales y tres distorsiones angulares calculadas en un cierto sistema de coordenadas.

Deformación longitudinal según el eje X $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$	Deformación longitudinal según el eje Y $e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$	Deformación longitudinal según el eje Z $e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$
Distorsión angular en el plano XY $g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$	Distorsión angular en el plano XZ $g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$	Distorsión angular en el plano YZ $g_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$

Finalmente descubriremos el carácter tensorial de las componentes de la deformación. Esto es, comprobaremos que son componentes de un **TENSOR DE DEFORMACIONES** que define totalmente la deformación de un punto, de manera similar a como el tensor de tensiones define completamente el estado tensional de un punto. En consecuencia, son válidas las reglas de rotación de tensores para obtener sus componentes en otros sistemas de coordenadas y existen **direcciones principales, deformaciones principales** y magnitudes **invariantes**.

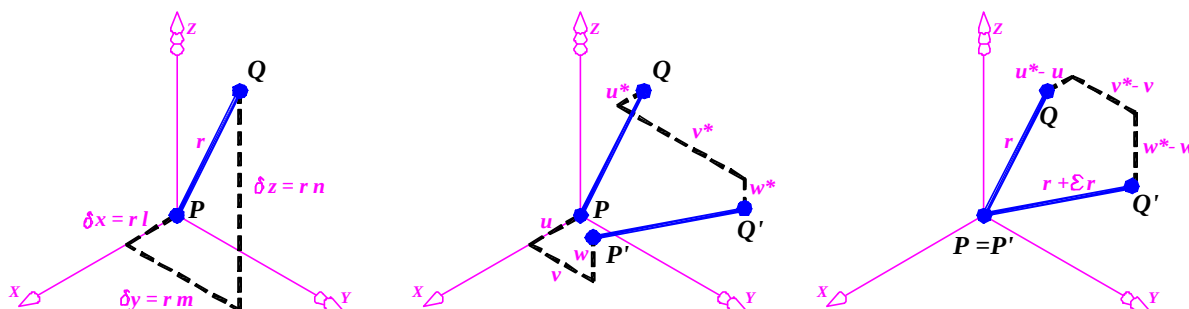
2.2. Deformación en un punto según una dirección “n”

Así como la **Tensión en un punto con referencia a un plano cuya normal es “n”** permitió llegar al concepto de **Tensión en punto** a través de la entidad denominada **Tensor de tensiones**, ahora analizaremos la **Deformación en un punto según una dirección “n”** que permitirá llegar al concepto de **Deformación en un punto** a través del **Tensor de Deformaciones**.

En la vecindad de un punto **P** del cuerpo consideraremos un pequeño segmento **PQ**, de longitud **r**, orientado según un versor $\hat{n}$ de componentes **(l,m,n)** en un cierto sistema coordenado con origen en **P**. Las componentes del segmento serán por tanto:

$$\boxed{dx = rl} \quad \boxed{dy = rm} \quad \boxed{dz = rn} \quad (a)$$

Luego de la deformación el extremo **P** se desplaza **(u,v,w)** hasta **P'** y el extremo **Q** se mueve **(u*,v*,w*)** hasta ocupar la posición **Q'**:



Segmento deformado **P'Q'**:

$$P' = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}; \quad Q' = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} \rightarrow P'Q' = \begin{Bmatrix} dx + u^* - u \\ dy + v^* - v \\ dz + w^* - w \end{Bmatrix}$$

Aproximación lineal de los movimientos en **Q** como función de los correspondientes en **P**:

$$\left. \begin{aligned} u^* &\cong u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v^* &\cong v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w^* &\cong w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \rightarrow P'Q' = \begin{Bmatrix} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{Bmatrix}$$

En virtud de la hipótesis de deformación homogénea en el entorno diferencial del punto **P**, el alargamiento específico en una dirección dada es constante. Por ello la **Longitud Deformada** de un segmento cualquiera es igual a **Long. Inicial + Alargamiento específico * Long. Inicial**.

Analizaremos el alargamiento del segmento PQ, para lo cual escribiremos el cuadrado de su longitud deformada como $|\mathbf{P}'\mathbf{Q}'|^2 = (\mathbf{r} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r})^2$ donde $\mathbf{e}$ es el **alargamiento específico**:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r})^2 = & \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 + \\ & + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)^2 + \\ & + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)^2 \end{aligned}$$

Del miembro izquierdo de esta expresión puede despejarse $\mathbf{r}^2$ y pasarse al miembro derecho, con lo cual aparecerán los cosenos directores (l, m, n) en virtud de las fórmulas (a):

$$\begin{aligned} (1 + e)^2 = & \left(\frac{dx}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{r} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{dy}{r} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{r} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{dz}{r} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{r} \right)^2 \end{aligned}$$

Reemplazando los cosenos directores según las fórmulas (a) se tiene:

$$\begin{aligned} (1 + e)^2 = & \left(l + l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \\ & + \left(m + l \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ & + \left(n + l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

En virtud de la hipótesis de pequeños desplazamientos se hará una “aproximación lineal” de la expresión anterior despreciando los términos que contengan derivadas al cuadrado y productos de derivadas. Para ello conviene tener presente el desarrollo del cuadrado de una sumatoria tal como las tres que aparecen en el segundo miembro. Por ejemplo, en el cuadrado de una sumatoria de cuatro valores genéricos aparecen términos cuadráticos y dobles productos entre cada par de ellos: $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2 + \mathbf{D}^2 + 2\mathbf{AB} + 2\mathbf{AC} + 2\mathbf{AD} + 2\mathbf{BC} + 2\mathbf{BD} + 2\mathbf{CD}$.

A manera de modelo se desarrollará una de las sumatorias del segundo miembro de la expresión anterior y se observarán separadamente sus términos cuadráticos y sus dobles productos para puntualizar cuáles de ellos pueden ser despreciados frente a los términos lineales:

$$\left(l + l \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} + m \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}} + n \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} \right)^2 = (A + B + C + D)^2$$

Términos cuadráticos:

$$l^2 + \underbrace{\left(l \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} \right)^2 + \left(m \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}} \right)^2 + \left(n \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} \right)^2}_{\cong 0} \cong l^2$$

Términos con dobles productos:

$$2 \left(\underbrace{l \cdot l \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}}}_{AB} + \underbrace{l \cdot m \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}}}_{AC} + \underbrace{l \cdot n \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}}}_{AD} + \underbrace{l \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} \cdot m \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}}}_{BC \cong 0} + \underbrace{l \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} \cdot n \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}}}_{BD \cong 0} + \underbrace{m \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}} \cdot n \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}}}_{CD \cong 0} \right) \cong$$

$$\cong 2 \left(l^2 \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} + lm \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}} + ln \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} \right)$$

Con estas consideraciones, el **segundo miembro** completo puede aproximarse linealmente con los siguientes términos:

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \text{ miembro} \cong l^2 + 2 \left(l^2 \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{X}} + lm \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Y}} + ln \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}} \right) + \\ + m^2 + 2 \left(ml \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{X}} + m^2 \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{Y}} + mn \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{Z}} \right) + \\ + n^2 + 2 \left(nl \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{X}} + nm \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{Y}} + n^2 \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{Z}} \right) \end{aligned}$$

En cuanto al **primer miembro**, la hipótesis de pequeñas deformaciones permite despreciar el cuadrado del alargamiento específico e en el desarrollo del binomio al cuadrado:

$$(1 + e)^2 = 1 + e^2 + 2e \underset{\substack{\uparrow \\ e \ll 1}}{\cong} 1 + 2e$$

Al recomponer la expresión original, con estos términos aproximados, se cancelan el sumando "1" del primer miembro con "1" del segundo, y luego el factor 2 que multiplica a ambos.

$$\begin{aligned}
 1 + 2e &\stackrel{l^2+m^2+n^2=1}{\cong} 1 + 2 \left(l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + lm \frac{\partial u}{\partial y} + ln \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\
 &\quad + 2 \left(ml \frac{\partial v}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + mn \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\
 &\quad + 2 \left(nl \frac{\partial w}{\partial x} + nm \frac{\partial w}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Simplificando el sumando "1" y el factor "2", y sacando factores comunes "lm", "ln" y "mn" se tiene:

$$e \cong l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

En esta expresión aproximada pueden reconocerse las cantidades escritas entre paréntesis. Se trata de las denominadas **Componentes de la Deformación** deducidas en el apartado anterior, y cuya interpretación física hemos hecho como ~~alargamientos~~ *alargamientos* de segmentos diferenciales paralelos a los ejes coordenados y ~~distorsiones del ángulo recto~~ *distorsiones del ángulo recto* entre cada par de aquellos segmentos.

$$e = e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{zz} n^2 + g_{xy} lm + g_{xz} ln + g_{yz} mn$$

Entonces, en la TEORIA DE LA ELASTICIDAD LINEAL, la **deformación en un punto** sufrida por un segmento diferencial orientado **según una dirección "n"** es función de seis componentes de la deformación calculadas en un cierto sistema de coordenadas.

2.3. Deformación en un punto - Tensor de deformación

La expresión que permite calcular la deformación en un punto según cualquier dirección dada, puede reescribirse en formato matricial de la siguiente manera (producto escalar de vectores):

$$e = \{l \quad m \quad n\} \cdot \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}g_{xy} & \frac{1}{2}g_{xz} \\ \frac{1}{2}g_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}g_{yz} \\ \frac{1}{2}g_{xz} & \frac{1}{2}g_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \hat{n}^T \cdot (\underline{\underline{e}} \cdot \hat{n})$$

Como dicha deformación es **independiente del sistema coordenado** en el que se evalúe, entonces el resultado debe permanecer invariante ante cambios de sistemas de coordenadas. Plantearemos una rotación del sistema de coordenadas, a través de una matriz de rotación $\underline{\underline{R}}$, y analizaremos lo que sucede con los coeficientes de la **matriz $\underline{\underline{e}}$ de deformaciones**.

Lo que sabemos a priori es que el alargamiento específico $\underline{e}$ es un ~~escalar~~ independiente del sistema de coordenadas y que el versor de dirección $\hat{n}$, también independiente, modifica sus componentes de uno a otro sistema en función de la matriz de rotación $\underline{R}$ según la fórmula:

$$\hat{n}' = \underline{R} \cdot \hat{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Componentes en el nuevo sistema rotado (XYZ)'} \\ \text{en función de las del sistema original (XYZ)} \end{array} \right.$$

Ahora pretendemos establecer lo que sucede con los coeficientes de la matriz $\underline{e}$ ~~en el nuevo sistema~~, que notaremos como $\underline{e}'$. Para ello calcularemos $\underline{e}$ a partir de las componentes de $\hat{n}$ en ambos sistemas, original y rotado, utilizando la fórmula de rotación de vectores. De este modo hallaremos la variación buscada de los coeficientes de la matriz de deformaciones:

Alargamiento específico calculado a partir de las componentes en el sistema original (XYZ):

$$\underline{e} = \hat{n}^T \times \underline{e} \cdot \hat{n} \quad (a)$$

Alargamiento específico calculado a partir de las componentes en el sistema rotado (XYZ)':

$$\underline{e} = \hat{n}'^T \times \underline{e}' \cdot \hat{n}' \quad (b)$$

Reemplazando en (b) las componentes del sistema rotado según la fórmula de rotación de vectores se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \left(\underline{R} \cdot \hat{n} \right)^T \times \underline{e}' \cdot \left(\underline{R} \cdot \hat{n} \right) = \\ &= \hat{n}^T \cdot \underline{R}^T \times \underline{e}' \cdot \underline{R} \cdot \hat{n} = \\ &= \hat{n}^T \times \left(\underline{R}^T \cdot \underline{e}' \cdot \underline{R} \right) \cdot \hat{n} = \xrightarrow{\text{introduciendo (a)}} \\ &= \hat{n}^T \times \underline{e} \cdot \hat{n} \xrightarrow{\text{comparando ambas}} \underline{e} = \underline{R}^T \cdot \underline{e}' \cdot \underline{R} \end{aligned}$$

La última línea de este desarrollo muestra que la matriz de deformaciones varía sus componentes, al rotar el sistema de coordenadas, según las mismas fórmulas deducidas para el tensor de tensiones. Esto permite afirmar que ~~las componentes de la matriz de deformaciones corresponden a un tensor~~, que formalmente hemos definido como una entidad cuyas componentes varían al rotar el sistema de coordenadas según estas fórmulas:

$$\underline{e} = \underline{R}^T \cdot \underline{e}' \cdot \underline{R}$$

Componentes del tensor
en el sistema original (XYZ)
a partir de las del sistema rotado

$$\underline{e}' = \underline{R} \cdot \underline{e} \cdot \underline{R}^T$$

Componentes del tensor
en el sistema rotado (XYZ)'
a partir de las del sistema original

Consecuencias del Carácter Tensorial de las Deformaciones

Como consecuencia del carácter tensorial de las deformaciones se postula directamente la existencia de **direcciones principales** y **deformaciones principales**. Es decir, pueden encontrarse orientaciones de sistemas coordenados en los que el tensor de deformaciones sólo posea elementos en su diagonal (deformaciones principales). En esta situación solamente existen alargamientos según los tres ejes coordenados, y no se presentan distorsiones de los ángulos rectos (elementos no diagonales) sobre ninguno de los planos coordenados.

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}g_{xy} & \frac{1}{2}g_{xz} \\ \frac{1}{2}g_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}g_{yz} \\ \frac{1}{2}g_{xz} & \frac{1}{2}g_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix}$$

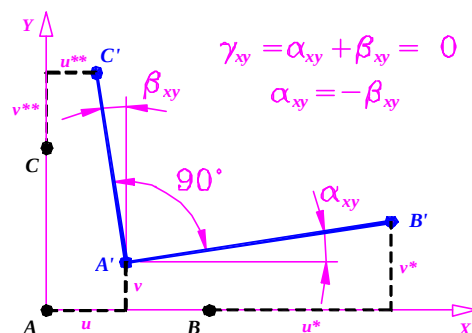
En un sistema (XYZ) cualquiera
hay elementos diagonales (alargamientos)
y elementos no diagonales (distorsiones)

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}$$

En un sistema (XYZ)' paralelo
a las direcciones principales solamente existen
elementos diagonales (deformaciones principales)

Por tanto, un cubo diferencial orientado según los ejes principales mantendrá sus caras, además de planas y paralelas por la deformación homogénea, ortogonales entre sí pues no hay distorsiones. En general, sufrirá una **pequeña rotación** como cuerpo rígido porque la nulidad de la distorsión g no implica que los movimientos que la producen sean nulos:

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{no son necesariamente nulas}}$$



La metodología para hallar las direcciones y deformaciones principales es similar a la expuesta para el tensor de tensiones, sólo que ahora se buscan orientaciones en las que coincidan el versor de dirección $\hat{n}$ y el vector $\underline{\underline{e}} \cdot \hat{n}$. A la proyección de este vector $e = \hat{n}^T \times \underline{\underline{e}} \cdot \hat{n}$ la hemos denominado “alargamiento específico en la dirección n ”, y resulta muy sencilla de calcular en un sistema de coordenadas orientado según las direcciones principales:

$$e = e_1 l^2 + e_2 m^2 + e_3 n^2$$

Al igual que con el tensor de tensiones, se comienza planteando el determinante del cual deriva el **polinomio característico** cuyas tres raíces son ahora las **deformaciones principales**:

$$\det(\underline{\underline{e}} - l \cdot \underline{\underline{I}}) = 0 \rightarrow l^3 - l^2 \cdot I_1 + l \cdot I_2 - I_3 = 0 \quad \text{con } I_1, I_2 \text{ e } I_3 \text{ constantes}$$

En el mismo aparecen también unas magnitudes **invariantes** cuya forma genérica es:

$$I_1 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}g_{yx} \\ \frac{1}{2}g_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}g_{zx} \\ \frac{1}{2}g_{xz} & e_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{yy} & \frac{1}{2}g_{zy} \\ \frac{1}{2}g_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}g_{xy} & \frac{1}{2}g_{xz} \\ \frac{1}{2}g_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}g_{yz} \\ \frac{1}{2}g_{xz} & \frac{1}{2}g_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

Y, luego de hallar las raíces del polinomio, se resuelven los tres sistemas de ecuaciones cuyas soluciones son las **direcciones principales**:

Problema 1

$$\underline{\underline{e}} \cdot \hat{n}_1 = I_1 \cdot \hat{n}_1$$

Problema 2

$$\underline{\underline{e}} \cdot \hat{n}_2 = I_2 \cdot \hat{n}_2$$

Problema 3

$$\underline{\underline{e}} \cdot \hat{n}_3 = I_3 \cdot \hat{n}_3$$

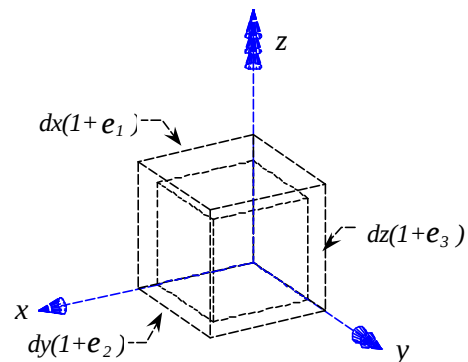
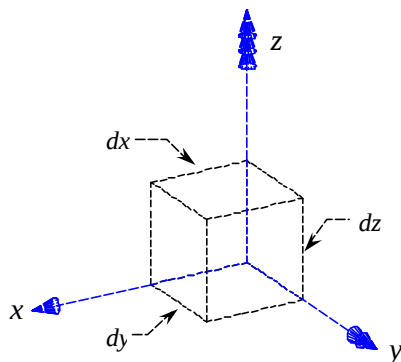
La forma e interpretación física de estos invariantes se facilita al considerar las componentes del tensor de deformaciones en un sistema coordenado orientado según las direcciones principales:

$$I_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & 0 \\ 0 & e_3 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix}$$

Si se observa el cambio de volumen que experimenta un cubo diferencial orientado según las direcciones principales es sencillo dar una interpretación geométrica a los invariantes:



La **deformación volumétrica** e_v asociada (cambio específico de volumen) se calcula como:

Volumen inicial:

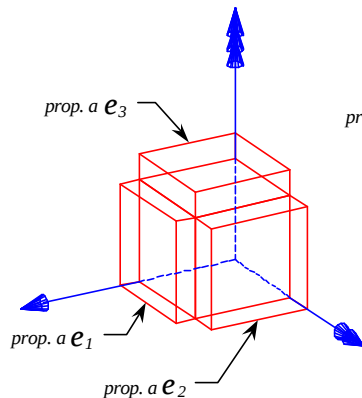
$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz$$

Volumen final:

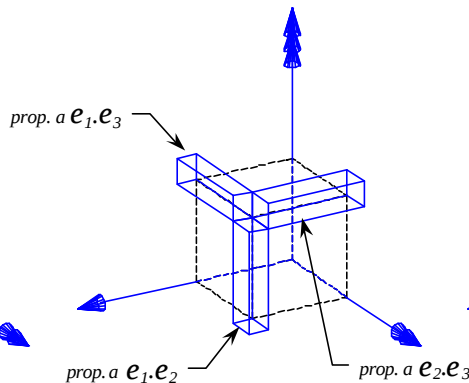
$$V = dx(1+e_1) \cdot dy(1+e_2) \cdot dz(1+e_3) = V_0(1+e_1) \cdot (1+e_2) \cdot (1+e_3)$$

Deformación volumétrica:

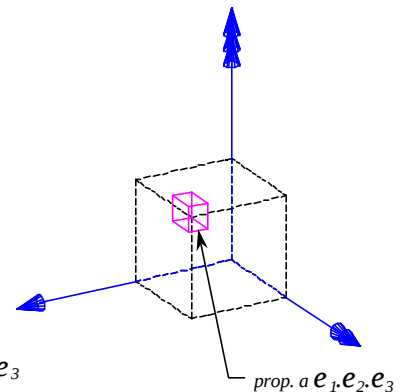
$$\begin{aligned} e_v &= \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0(1+e_1) \cdot (1+e_2) \cdot (1+e_3) - V_0}{V_0} = \\ &= (1+e_1) \cdot (1+e_2) \cdot (1+e_3) - 1 = \\ &= \underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{I_1 \text{ primer orden}} + \underbrace{e_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_3 + e_2 \cdot e_3}_{I_2 \text{ segundo orden}} + \underbrace{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3}_{I_3 \text{ tercer orden}} \cong e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$



Cambios de volumen de primer orden



Cambios de volumen de segundo orden



Cambio de volumen de tercer orden

Así, los invariantes del tensor de deformaciones se relacionan con cambios de volumen del cubo diferencial, de los cuales el más relevante es el primero de ellos I_1 (la deformación volumétrica).

Otra notación: las componentes del tensor de deformaciones pueden escribirse más genéricamente como:

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos tienen la forma:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Donde $i, j = x, y, z$ con $u_x = u$, $u_y = v$, $u_z = w$ (componentes del movimiento) y $x_x = x$, $x_y = y$, $x_z = z$ (coordenadas):

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

2.4. Compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones

Sumario

En el capítulo introductorio se planteó que la Teoría de la Elasticidad posee como incógnitas a las tensiones, las deformaciones y los desplazamientos, y que aquellas están vinculadas entre sí. La primera de estas incógnitas se estudió “aisladamente” en el capítulo denominado: las tensiones en un sólido elástico. En el actual capítulo se habló de desplazamientos y deformaciones (las restantes dos incógnitas del problema) y se estableció cómo encontrar las componentes de la deformación a partir del campo de desplazamientos. Ahora se analizará el problema inverso: dadas unas componentes de la deformación... ¿cómo asegurar que corresponden a un campo de desplazamientos en un sólido continuo?. Este análisis conduce a que las COMPONENTES DE LA DEFORMACIÓN deben cumplir unas CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD entre ellas a fin de corresponderse con un campo de desplazamientos continuo. Finalmente, en el próximo capítulo, se cerrará el estudio de estas tres incógnitas exponiendo las relaciones entre tensiones y deformaciones o desplazamientos.

Tal como se planteó hasta el momento, las 3 componentes del desplazamiento “ u, v, w ” (continuas pero incluso arbitrarias) definen sin equívocos a las 6 componentes de la deformación “ $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}$ ” según las ecuaciones:

Deformación longitudinal según X

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Deformación longitudinal según Y

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Deformación longitudinal según Z

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Distorsión angular sobre XY

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Distorsión angular sobre XZ

$$g_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

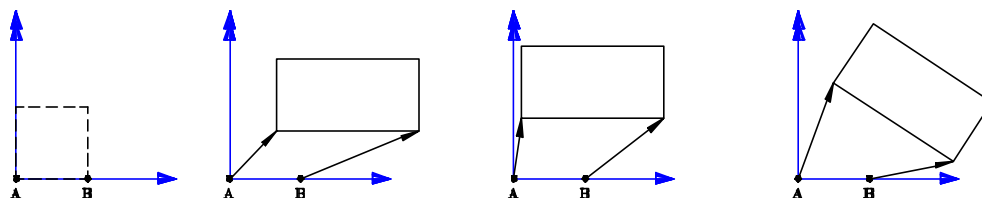
Distorsión angular sobre YZ

$$g_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Sin embargo, la inversa no es cierta ya que **no se pueden dar arbitrariamente 6 componentes de la deformación** (aunque sean funciones continuas) y asegurar que se correspondan con 3 componentes de un desplazamiento continuo. Sucede que las 6 componentes de la deformación no son independientes entre sí, como lo son las 3 del desplazamiento, y por tanto deben verificar unas ecuaciones denominadas **CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD** que establecen ciertas relaciones entre ellas (a través de sus derivadas).

Este problema tiene un **planteo matemático formal** bastante complejo para “demostrar” bajo qué condiciones un grupo de funciones de deformación se corresponde con un campo de desplazamientos continuo, pero no es imprescindible en esta etapa del estudio de la elasticidad. En su lugar se presentará una metodología sencilla para obtener las 6 ecuaciones de compatibilidad en el volumen del sólido, aceptando que proviene de un análisis matemático riguroso que no se desarrollará.

Lo que sí resulta interesante es darle una **interpretación geométrica** al problema para entender por qué unas funciones “arbitrarias” de deformación provocan en general desplazamientos no continuos, violando la hipótesis fundamental acerca de la continuidad del material. Como consideración preliminar puede observarse que: dado un campo de desplazamientos existe una y sólo una deformación asociada, calculable por derivación de aquel. Pero dada una deformación existen infinitos desplazamientos que pueden generarla, como se muestra a continuación:



A fin de ilustrar la necesidad de que las componentes de la deformación “sean compatibles” analicemos un cuerpo bidimensional, imaginariamente dividido en pequeños cubitos a los cuales pretendemos “imponer arbitrariamente” las deformaciones e_{xx} , e_{yy} , g_{xy} :

Digamos que cada cubito sufre una deformación e_{xx} que depende cuadráticamente de su coordenada “y”:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = a \cdot y^2 \quad \text{donde el coeficiente } a \text{ es constante}$$

Digamos también que la deformación e_{yy} de los cubitos es nula:

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Y finalmente “impongamos” que la distorsión g_{xy} también sea nula:

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Si esto fuese cierto los cubitos deberían “estirarse horizontalmente”, tanto más cuanto mayor sea su coordenada “y”, permaneciendo “sin estiramiento en el sentido vertical”. Pero además, y a aquí está el problema, “sin sufrir ninguna distorsión en el plano XY”. No es posible deformar así el cuerpo sin romperlo (observar en la figura del medio cómo se separarían los vértices de los cubos contiguos). Esto indica que la distorsión no puede darse de manera arbitraria, sino que se relaciona con las demás componentes de la deformación (todas deben ser compatibles).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sólido
sin
deformación

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sólido discontinuo
por estiramientos y
distorsiones arbitrarias

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sólido continuo
con iguales estiramientos
pero con distorsiones compatibles