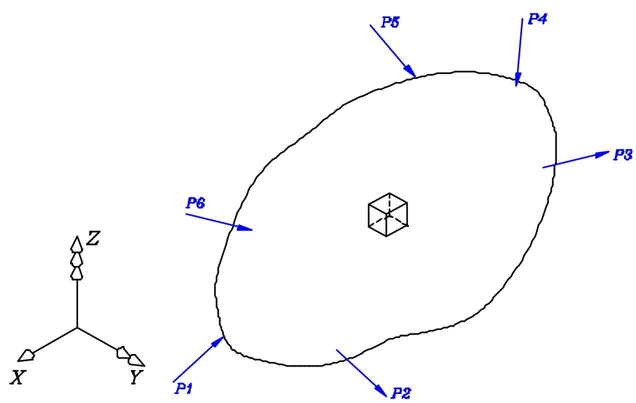
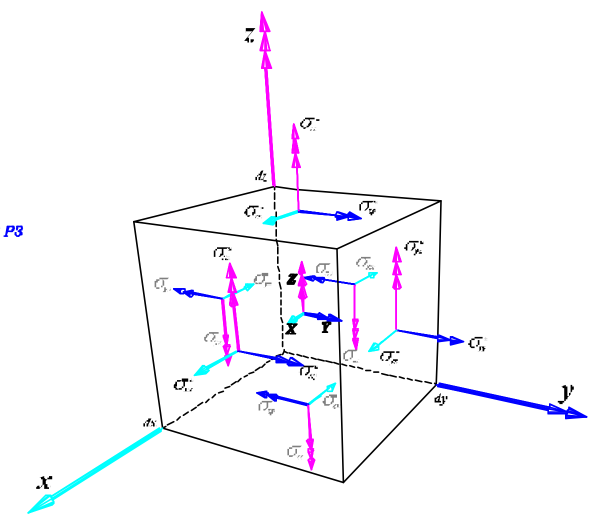
1.4. Tensión en un punto

Hasta el momento se ha utilizado el concepto de Tensión en un punto con referencia a un plano cuya normal es "n", que se ha notado como:

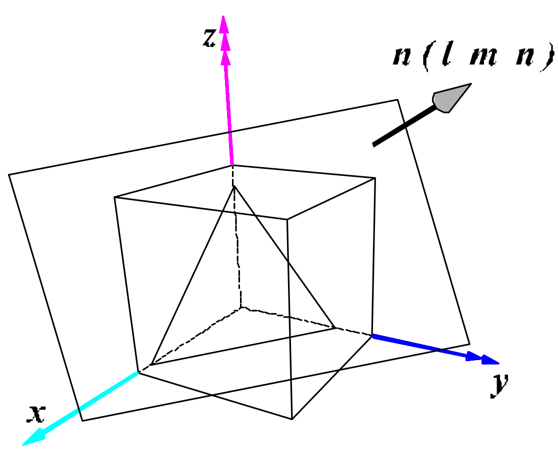
$$S_n \left(S_{nx} \quad S_{ny} \quad S_{nz} \right)$$

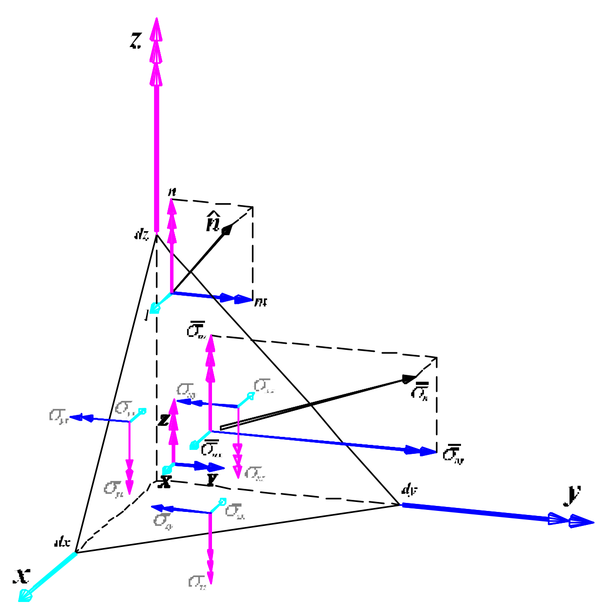
Por otra parte, al analizar el equilibrio en un punto interior del sólido, se consideraron las tensiones actuantes en planos paralelos a los coordenados (las caras del cubo).





Veremos ahora la Tensión en un punto con referencia a un plano cuya normal es "n" expresada en función de las tensiones actuantes en las caras del cubo. A tal efecto se considerará un plano que seccione al cubo en cuestión, con una orientación dada por un versor normal al mismo "n".





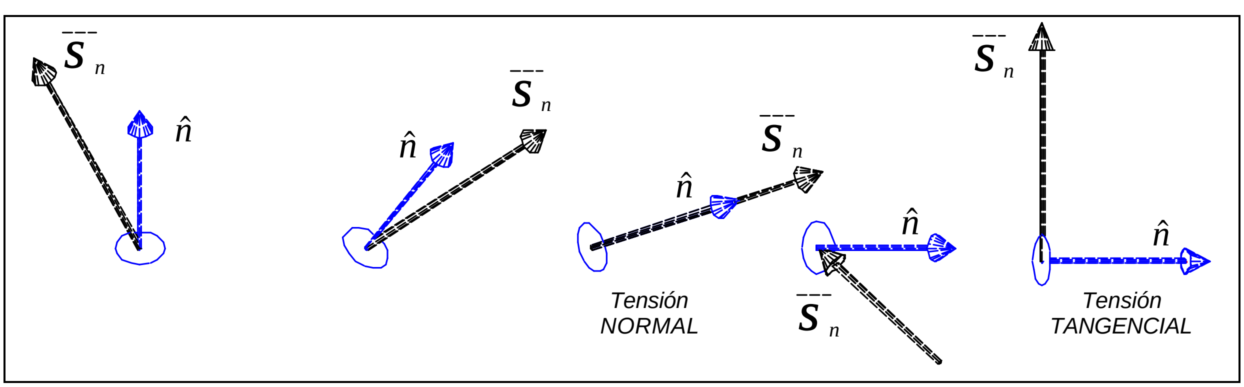
En la sección definida por el plano aparece una tensión $\overline{S}_n$, de componentes $\overline{S}_{nx}$; $\overline{S}_{ny}$; $\overline{S}_{nz}$, que depende de las tensiones que actúan en las tres caras restantes del cubo. La situación es análoga a la estudiada para una porción de la superficie del sólido, de modo que las expresiones buscadas serán idénticas a las del equilibrio en el contorno, cuya forma matricial hemos escrito de la siguiente manera:

$$\boxed{\overline{S}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}}$$

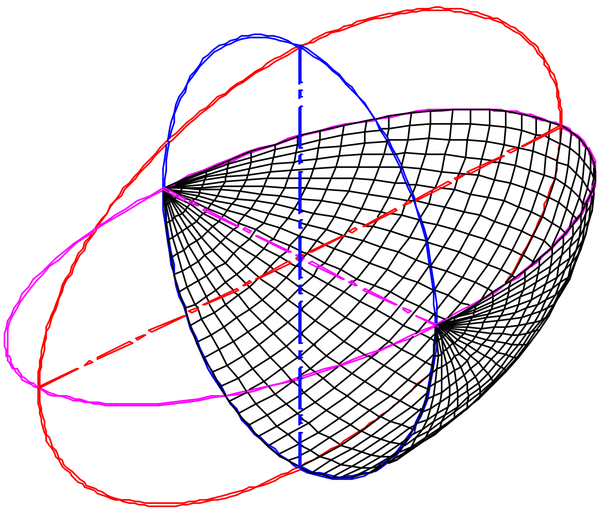
$$\boxed{\overline{S}_n = \begin{Bmatrix} \overline{S}_{nx} \\ \overline{S}_{ny} \\ \overline{S}_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}}$$

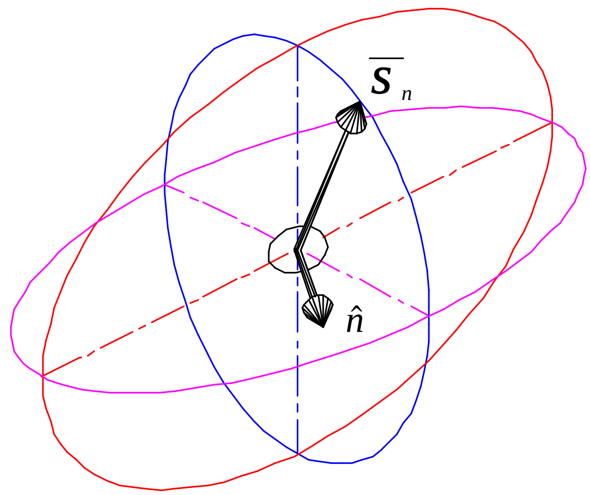
La ecuación anterior expresa una <u>relación funcional</u> entre vectores: <u>dado un vector</u> $\hat{n}$ (unitario y normal a un plano) <u>devuelve otro vector</u> $\overline{S}_n$ (tensión con respecto a dicho plano). Los vectores poseen un significado geométrico concreto (segmentos orientados) e independiente del sistema de coordenadas utilizado, el cual sólo define a "sus componentes". Por tanto, la relación funcional entre los vectores $\hat{n}$ y $\overline{S}_n$, expresada por los coeficientes de la matriz $\underline{\underline{S}}$, debe también ser independiente del sistema de coordenadas que se utilice.

*Resulta que estos 9 valores S_{ij}, de los cuales tan sólo 6 son distintos por las relaciones de Cauchy, son las **COMPONENTES** de una nueva entidad que denominaremos **TENSOR** y que goza de independencia respecto a los sistemas de coordenadas. Para empezar a conocerla intentaremos descubrir su aspecto geométrico a través del siguiente experimento: darle como entradas todas las direcciones $\hat{n}$ del espacio y observar los vectores $\overline{S}_n$ de salida. Se presentarán diversos tipos de situaciones como algunas de las mostradas a continuación:*

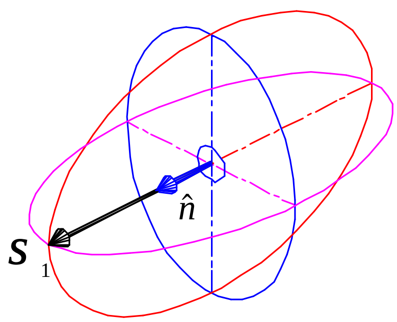


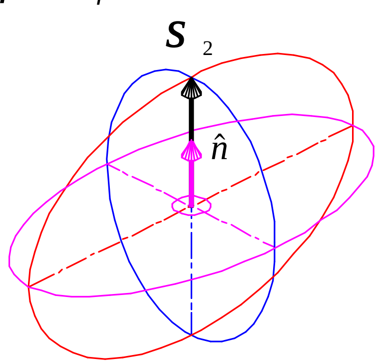
Al recorrer todas las direcciones del espacio, nos encontraremos con que los extremos del vector de salida recorren la superficie de un elipsoide denominado ***Elipsoide de Lamé****.*

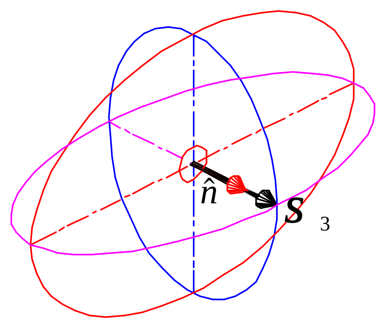




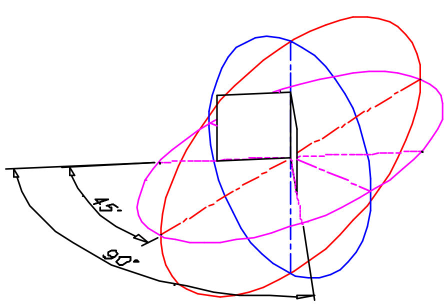
*Los tres semiejes del elipsoide se orientan según las denominadas "****direcciones principales****" y en ellas actúan las "****tensiones principales****" que son normales a los respectivos planos:*

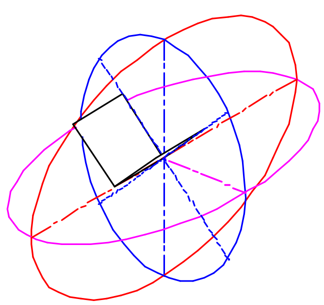


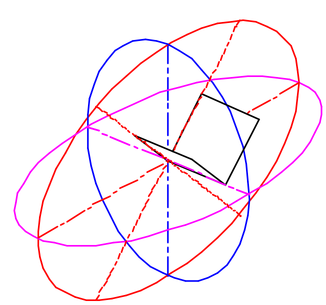




Para estas orientaciones las tensiones de corte son nulas y no existen, en general, direcciones en cuyos planos sólo actúen ***tensiones cortantes*** *(componentes normales nulas). Sin embargo, existen planos en las que aquellas resultan* ***máximas****: son los que contienen a una dirección principal y bisectan a los ángulos formados por las otras dos direcciones principales:*







$t = \frac{1}{2}(s_1 - s_3)$ $\qquad$ $t = \frac{1}{2}(s_2 - s_3)$ $\qquad$ $t = \frac{1}{2}(s_1 - s_2)$

Motivación para el estudio de las Tensiones y Direcciones Principales

Al estudiar una pieza con métodos analíticos o numéricos de elasticidad se obtienen ***en cada punto*** *las* ***componentes del tensor de tensiones*** *correspondientes al* ***sistema de coordenadas*** *utilizado para el análisis. En general, el sistema adoptado no coincide con las direcciones principales dado que aquellas varían de un punto a otro de la pieza. La simple observación de las componentes obtenidas <u>no alcanza</u> para definir si el material fallará o no en alguno de esos puntos. A tal efecto se aplican* ***criterios de resistencia*** *para predecir el* ***comportamiento del material*** *analizado. Los criterios varían si el material es dúctil o frágil, si posee o no igual resistencia en tracción que en compresión, etc. y* ***se expresan en función de las tensiones principales****, razón por la cual aquellas son motivo de estudio.*

<u>Nota</u>: *Para un estado tensional simple (tal como la tracción uniaxial) es posible diseñar un ensayo (como el tradicional de tracción) que lo reproduzca y permita establecer a qué nivel de tensión puede trabajar cada material. De ese modo el analista se limita a verificar que la tensión en la pieza sea inferior a dicho valor con un cierto margen de seguridad. En otros casos es difícil encontrar un ensayo general y normalizable que reproduzca el estado tensional. Aparecen entonces diversas* ***teorías de resistencia*** *que postulan las condiciones en las que fallan los distintos materiales (criterios) y suelen involucrar el concepto de* ***tensión equivalente****: una tensión uniaxial que provoca efectos similares a los de la tensión realmente aplicada. Así es posible seguir utilizando los datos de los ensayos tradicionales para evaluar si el nivel tensional es o no aceptable. Las expresiones para calcular la tensión equivalente se simplifican mucho cuando están escritas en función de las tensiones principales, por ello interesa aprender a calcularlas. A modo de ejemplo se mencionan algunos criterios de resistencia comunmente utilizados:*

1. ***Criterio de las tensiones normales máximas (Galileo-Leibnitz)*** *aplicable a materiales bastante frágiles y homogéneos tales como el vidrio, yeso y algunos tipos de cerámica:*

$$\boxed{s_{eq} = s_1}$$

2. ***Criterio de las tensiones tangenciales máximas (Coulomb)*** *aplicable a materiales plásticos de poco endurecimiento tales como aceros revenidos, que presentan localización de las deformaciones plásticas:*

$$\boxed{s_{eq} = s_1 - s_3}$$

3. ***Criterio de Coulomb-Mohr*** *aplicable a materiales bastante homogéneos que contrarrestan diferentemente la tracción y la compresión (donde X=tensión límite a tracción/tensión límite a compresión):*

$$\boxed{s_{eq} = s_1 - c\, s_3}$$

4. ***Criterio de las tensiones tangenciales octaédricas (Von Mises)*** *aplicable a una amplia gama de materiales plásticos tales como el cobre, niquel, aluminio, aceros al carbono y al cromoniquel:*

$$\boxed{s_{eq} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2\right]}}$$

***Tensiones y Direcciones Principales
Planteo general para su determinación***

El problema de hallar las tensiones y las direcciones principales se expresa matemáticamente recordando que se buscan vectores de salida $\overline{S}_n$ *con igual dirección que los vectores de entrada* $\hat{n}$ *(o sea tensiones normales). Como* $\hat{n}$ *es de módulo unitario,* $\overline{S}_n$ *puede escribirse como producto de* $\hat{n}$ *por un escalar* l *igual al módulo de* $\overline{S}_n$ *y de signo positivo en caso que coincidan los sentidos de ambos vectores o negativo en caso contrario.*

$$\overline{S}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} = l \cdot \hat{n} \quad \textit{con } l \in R$$

Problema 1	Problema 2	Problema 3
$S_1 = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}_1 = l_1 \cdot \hat{n}_1$	$S_2 = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}_2 = l_2 \cdot \hat{n}_2$	$S_3 = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}_3 = l_3 \cdot \hat{n}_3$

Cada uno de estos problemas posee ***4 incógnitas*** **“** l, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ **”** *por lo que se requieren* ***4 ecuaciones*** *para su resolución. A tal efecto se reescriben bajo la forma de sistemas de ecuaciones homogéneos:*

$$\overline{S}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} = l \cdot \hat{n} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} - l \cdot \hat{n} = \overline{0} \qquad \textit{" es un sistema de ecuaciones homogeneo 3x3"}$$

A continuación, para poder extraer un factor común, se introduce la matriz identidad sin que ello altere la ecuación:

$$\underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} - l \cdot \hat{n} = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} - l \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \hat{n} = \left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right) \cdot \hat{n} = \overline{0} \rightarrow \left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right)_{3x3} \quad \textit{" es la matriz del sistema"}$$

Este ***sistema homogéneo de ecuaciones*** *$3x3$ tiene la clásica forma* $\underline{\underline{A}} \cdot \overline{x} = \overline{0}$ *donde la* ***matriz del sistema*** *es* $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}$ *y el* ***vector de incógnitas*** *es* $\overline{x} = \hat{n}$ *. La incógnita restante* l *ha quedado incluida dentro de los coeficientes de la matriz* $\underline{\underline{A}}$ *y por tanto es necesario obtenerla previamente a la resolución del sistema. Como todo sistema homogéneo posee una solución trivial* $\hat{n} = \overline{0}$ *que no es de interés e infinitas soluciones no triviales siempre y cuando el* ***determinante de la matriz sea igual a cero****. Justamente esta condición permite el planteo de una ecuación que resulta ser un polinomio cúbico en* l *cuyas 3 raíces son los valores buscados* l_1, l_2 *y* l_3 *(o sea los módulos de las tensiones principales).*

$$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = \det\left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad l^3 - l^2 \cdot I_1 + l \cdot I_2 - I_3 = 0 \quad \textit{con } I_1,\ I_2 \textit{ e } I_3 \textit{ constantes}$$

A partir de allí los “Problemas 1,2 y 3” planteados sólo tienen 3 incógnitas ($\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$*) cada uno, de manera que pueden resolverse como cualquier sistema homogéneo $3x3$.*

La particularidad de los sistemas homogéneos con determinante nulo es que se satisfacen con infinitas soluciones, en este caso vectores $\hat{n}$ del espacio R^3, que sólo difieren entre sí en una constante: ***son infinitos vectores contenidos en una misma dirección****. De todos ellos nos interesa aquel que sea de módulo unitario y que por tanto verifique que:* $\boldsymbol{l^2+m^2+n^2=1}$. *La forma típica de resolución de estos sistemas consiste en:*

- *Dar arbitrariamente un valor a una de las incógnitas, por ejemplo a “$\boldsymbol{n=1}$”*
- *Reemplazarla en 2 de las ecuaciones conformando un nuevo* **sistema reducido 2x2**
- *Resolver el sistema 2x2 para obtener las incógnitas restantes, por ejemplo “$\boldsymbol{l,m}$”*
- *Calcular el módulo de esta solución:* ***Módulo =*** $\boldsymbol{(l^2+m^2+n^2)^{1/2}}$
- *Normalizar la solución (dividir $\boldsymbol{l,m,n}$ por el Módulo) para que cumpla con* $\boldsymbol{l^2+m^2+n^2=1}$

El siguiente esquema resume las ideas fundamentales aplicadas al problema de determinación de las tensiones principales y las direcciones principales:

Se buscan vectores de tensión paralelos a los versores normales:

$$\overline{S}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n} = l \cdot \hat{n}$$

Se escribe un sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right) \cdot \hat{n} = \overline{0}$$

Se determinan las TENSIONES PRINCIPALES

$$\left|\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right| = l^3 - l^2 \cdot I_1 + l \cdot I_2 - I_3 = 0$$

Hay que calcular las raíces de este polinomio cúbico que son los módulos de las tensiones principales

Se determinan las DIRECCIONES PRINCIPALES

$$\left(\underline{\underline{S}} - l_1 \cdot \underline{\underline{I}}\right) \cdot \hat{n}_1 = \overline{0} \qquad \left(\underline{\underline{S}} - l_2 \cdot \underline{\underline{I}}\right) \cdot \hat{n}_2 = \overline{0} \qquad \left(\underline{\underline{S}} - l_3 \cdot \underline{\underline{I}}\right) \cdot \hat{n}_3 = \overline{0}$$

Hay que resolver los 3 sistemas para obtener las direcciones principales

Cálculo de las TENSIONES PRINCIPALES:

Veamos la matriz del sistema planteado para hallar las tensiones y direcciones principales:

$$\boxed{\left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right) \cdot \hat{n} = \overline{0}}$$

$$\left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right) = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} - l \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} - l & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{bmatrix}$$

Escribamos la condición de determinante nulo para obtener el **polinomio característico** *en l:*

$$\det\left(\underline{\underline{S}} - l \cdot \underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} S_{xx} - l & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} = 0$$

Para desarrollar el determinante se aplicará sucesivamente una ***propiedad*** *que dice: si la fila "i" de una matriz es de la forma Aij = A'ij + A"ij, entonces su determinante puede descomponerse como suma de otros dos: |A|=|A'|+|A"| donde las matrices A' y A" se obtienen reemplazando el elemento Aij por el A'ij y el A"ij respectivamente.*

En primer lugar se aplica la citada propiedad a la primera fila del determinante:

$$\begin{vmatrix} S_{xx} - l & S_{yx} + 0 & S_{zx} + 0 \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -l & 0 & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix}$$

Al resultado anterior se aplica nuevamente la propiedad a la segunda fila del primer determinante y se desarrolla el segundo determinante por su primera fila (contiene 2 ceros):

$$\begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} + 0 & S_{yy} - l & S_{zy} + 0 \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -l & 0 & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ 0 & -l & 0 \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} - l \cdot \begin{vmatrix} S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} = 0$$

Ahora se aplica la propiedad al primer determinante (tercera fila) y al tercero (primera fila) y se desarrolla el segundo determinante por su segunda fila (contiene 2 ceros):

$$= \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ 0 & 0 & -l \end{vmatrix} - l \cdot \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{zx} \\ S_{xz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} - \quad \dots$$

$$\dots \quad - l \cdot \left\{ \begin{vmatrix} S_{yy} & S_{zy} \\ S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -l & 0 \\ S_{yz} & S_{zz} - l \end{vmatrix} \right\} = 0$$

Ahora la propiedad es aplicable a las segundas filas del tercer y cuarto determinante, se desarrolla el segundo determinante por su tercer fila y se resuelve el último:

$$= \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} - l \cdot \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{vmatrix} - l \cdot \left\{ \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{zx} \\ S_{xz} & S_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{zx} \\ 0 & -l \end{vmatrix} \right\} - \quad \dots$$

$$\dots \quad - l \cdot \left\{ \begin{vmatrix} S_{yy} & S_{zy} \\ S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{yy} & S_{zy} \\ 0 & -l \end{vmatrix} + l^2 - l \cdot S_{zz} \right\} = 0$$

Finalmente, reagrupando términos se tiene:

$$\begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} - l \cdot \left\{ \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{zx} \\ S_{xz} & S_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{yy} & S_{zy} \\ S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} \right\} + \quad \dots$$

$$\dots \quad + l^2 \left\{ S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \right\} - l^3 = 0$$

El resultado final es un polinomio cúbico en l *(denominado* ***polinomio característico****) que suele escribirse de la siguiente forma:*

$$\boxed{l^3 - l^2 \cdot I_1 + l \cdot I_2 - I_3 = 0}$$

El cálculo de las tensiones principales (sus módulos) concluye cuando se encuentran las raíces l_1, l_2, l_3 *de este polinomio, para lo cual se aplican diversos métodos numéricos. Convencionalmente estos valores se ordenan de mayor a menor y se asignan a las tensiones principales* S_1, S_2 *y* S_3.

*En el polinomio característico los coeficientes I_1, I_2 e I_3 dependen de las componentes del tensor de tensiones S_{ij} pero resultan constantes para el punto en cuestión, sin importar el sistema de coordenadas utilizado, por lo que se denominan **INVARIANTES DE TENSIÓN**:*

$$I_1 = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{zx} \\ S_{xz} & S_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{yy} & S_{zy} \\ S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix}$$

> *<u>Nota</u>: El polinomio característico es único para el punto en cuestión pues sus raíces l son las tensiones principales y ellas no dependen del sistema coordenado. Por tanto, sus coeficientes deben ser también independientes (invariantes) respecto del sistema de coordenadas.*

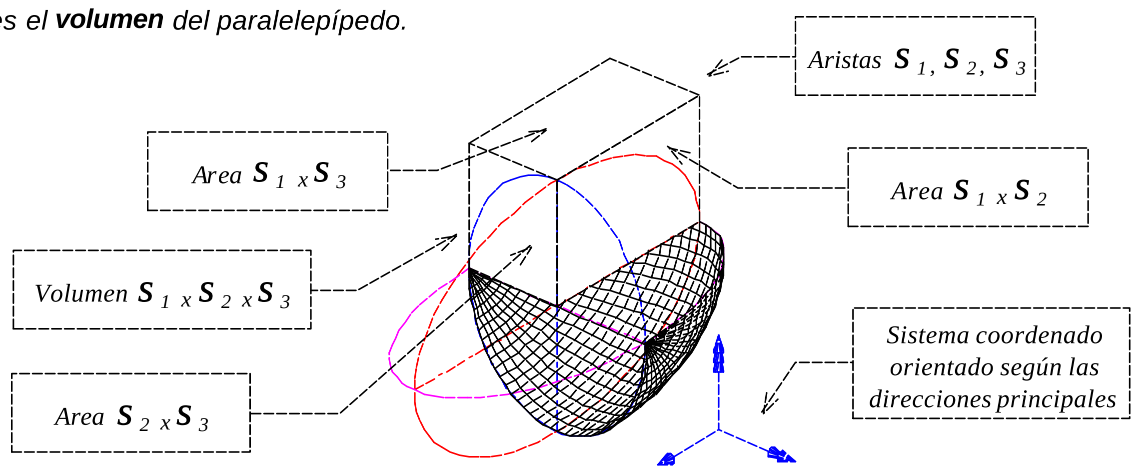
Con base en esta invariabilidad, podemos escribir directamente las formas que adoptarían los tres invariantes de tensión en un sistema coordenado orientado según las direcciones principales:

$$I_1 = S_1 + S_2 + S_3$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_3 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{vmatrix}$$

*Con estas expresiones es sencillo hacer una **interpretación geométrica** de los invariantes de tensión considerando a un paralelepípedo cuyas aristas sean las tensiones principales. Para el mismo: I_1 es la suma de tres de sus **aristas**, I_2 es la suma de las **áreas** de tres de sus caras e I_3 es el **volumen** del paralelepípedo.*



Cálculo de las DIRECCIONES PRINCIPALES:

A partir de los valores de l previamente obtenidos se determinan las matrices de los 3 sistemas a resolver para hallar las direcciones principales:

$$\boxed{\left(\underline{\underline{S}} - l_1 \cdot \underline{\underline{I}}\right)\cdot \hat{n}_1 = \overline{0}} \qquad \boxed{\left(\underline{\underline{S}} - l_2 \cdot \underline{\underline{I}}\right)\cdot \hat{n}_2 = \overline{0}} \qquad \boxed{\left(\underline{\underline{S}} - l_3 \cdot \underline{\underline{I}}\right)\cdot \hat{n}_3 = \overline{0}}$$

Para cualquiera de ellos se comienza dando arbitrariamente un valor a una de las incógnitas e introduciéndola en dos ecuaciones del sistema, de modo que el mismo quede reducido a 2x2:

Sistema genérico de partida (3x3) expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} - l & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} - l & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} - l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones del sistema en forma desarrollada:

$$\begin{aligned} \left(S_{xx} - l\right)\cdot l + S_{yx}\cdot m + S_{zx}\cdot n &= 0 \quad \textit{Ecuacion 1} \\ S_{xy}\cdot l + \left(S_{yy} - l\right)\cdot m + S_{zy}\cdot n &= 0 \quad \textit{Ecuacion 2} \\ S_{xz}\cdot l + S_{yz}\cdot m + \left(S_{zz} - l\right)\cdot n &= 0 \quad \textit{Ecuacion 3} \end{aligned}$$

Asignación de un valor arbitrario a una incógnita, por ejemplo, n=1:

$$\begin{aligned} \left(S_{xx} - l\right)\cdot l + S_{yx}\cdot m + S_{zx}\cdot 1 &= 0 \quad \textit{Ecuacion 1} \\ S_{xy}\cdot l + \left(S_{yy} - l\right)\cdot m + S_{zy}\cdot 1 &= 0 \quad \textit{Ecuacion 2} \\ S_{xz}\cdot l + S_{yz}\cdot m + \left(S_{zz} - l\right)\cdot 1 &= 0 \quad \textit{Ecuacion 3} \end{aligned}$$

Sistema reducido (2x2), por ejemplo, a partir de las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned} \left(S_{xx} - l\right).l + S_{yx}\cdot m &= -S_{zx} \quad \textit{Ecuacion 1} \\ S_{xy}.l + \left(S_{yy} - l\right)\cdot m &= -S_{zy} \quad \textit{Ecuacion 2} \end{aligned}$$

Expresión matricial del sistema reducido (2x2):

$$\begin{bmatrix} \left(S_{xx} - l\right) & S_{yx} \\ S_{xy} & \left(S_{yy} - l\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{zx} \\ -S_{zy} \end{bmatrix}$$

*Al resolver el sistema reducido se obtienen los valores de las dos incógnitas restantes, por ejemplo **l** y **m**, y se procede finalmente a normalizar la solución (convertirla en un versor):*

$$\boxed{\bar{n} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad \textit{modulo} \quad s = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \quad \cdots \xrightarrow{\textit{normalizando}} \quad \hat{n} = \begin{bmatrix} l/s \\ m/s \\ n/s \end{bmatrix} \quad \textit{modulo = 1}}$$

Vectores y cambios de coordenadas

*Un **vector** es un ente geométrico autónomo (un segmento orientado), no así sus **componentes** ya que varían según el sistema de coordenadas utilizado para describirlo. Se analizará esta variación para sistemas de coordenadas rotados entre sí y con un mismo origen. Estos conceptos se aplicarán luego al estudio de los tensores y los cambios de coordenadas.*

*Las componentes se obtienen por **producto escalar** del vector con los versores paralelos a los ejes del sistema coordenado correspondiente y son escalares que tienen sentido para ese sistema en particular. También, permiten descomponer al vector en suma de otros tres vectores (paralelos a los ejes) lo cual sí tiene un significado autónomo:*

$$\overline{v}=\underbrace{\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\hat{i}\times\overline{v}\\\hat{j}\times\overline{v}\\\hat{k}\times\overline{v}\end{Bmatrix}}_{\text{valido para el sistema coordenado (XYZ)}}=\underbrace{\hat{i}\cdot x+\hat{j}\cdot y+\hat{k}\cdot z}_{\text{independiente}}=\underbrace{\begin{Bmatrix}x'\\y'\\z'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\hat{i}'\times\overline{v}\\\hat{j}'\times\overline{v}\\\hat{k}'\times\overline{v}\end{Bmatrix}}_{\text{valido para el sistema coordenado (XYZ)'}}=\underbrace{\hat{i}'\cdot x'+\hat{j}'\cdot y'+\hat{k}'\cdot z'}_{\text{independiente}}$$

Para encontrar una expresión que relacione a las componentes de un mismo vector en dos sistemas diferentes, se reemplazará al vector por la suma de vectores relacionados al sistema original (XYZ) en las expresiones de las componentes del sistema rotado (XYZ)':

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}x'\\y'\\z'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\hat{i}'\times\overline{v}\\\hat{j}'\times\overline{v}\\\hat{k}'\times\overline{v}\end{Bmatrix}}_{\text{valido para el sistema coordenado (XYZ)'}}=\underbrace{\begin{Bmatrix}\hat{i}'\times\hat{i}\cdot x+\hat{i}'\times\hat{j}\cdot y+\hat{i}'\times\hat{k}\cdot z\\\hat{j}'\times\hat{i}\cdot x+\hat{j}'\times\hat{j}\cdot y+\hat{j}'\times\hat{k}\cdot z\\\hat{k}'\times\hat{i}\cdot x+\hat{k}'\times\hat{j}\cdot y+\hat{k}'\times\hat{k}\cdot z\end{Bmatrix}}_{\text{reemplazando } \overline{v}=\hat{i}\cdot x+\hat{j}\cdot y+\hat{k}\cdot z}=\begin{bmatrix}\hat{i}'\times\hat{i}&\hat{i}'\times\hat{j}&\hat{i}'\times\hat{k}\\\hat{j}'\times\hat{i}&\hat{j}'\times\hat{j}&\hat{j}'\times\hat{k}\\\hat{k}'\times\hat{i}&\hat{k}'\times\hat{j}&\hat{k}'\times\hat{k}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}$$

La expresión inversa se obtiene partiendo de las expresiones de las componentes en el sistema original (XYZ):

$$\begin{Bmatrix}x'\\y'\\z'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i}'\times\hat{i}&\hat{i}'\times\hat{j}&\hat{i}'\times\hat{k}\\\hat{j}'\times\hat{i}&\hat{j}'\times\hat{j}&\hat{j}'\times\hat{k}\\\hat{k}'\times\hat{i}&\hat{k}'\times\hat{j}&\hat{k}'\times\hat{k}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i}\times\hat{i}'&\hat{i}\times\hat{j}'&\hat{i}\times\hat{k}'\\\hat{j}\times\hat{i}'&\hat{j}\times\hat{j}'&\hat{j}\times\hat{k}'\\\hat{k}\times\hat{i}'&\hat{k}\times\hat{j}'&\hat{k}\times\hat{k}'\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x'\\y'\\z'\end{Bmatrix}$$

*Las componentes del vector en uno y otro sistema se relacionan a través de una matriz que contiene productos escalares entre versores, es decir, los cosenos de los ángulos entre sus direcciones (cosenos directores). Se trata de una **matriz ortogonal** (su inversa es igual a su traspuesta) denominada **matriz de rotación** y permite calcular las componentes de un vector en otro sistema rotado conociendo los cosenos directores de sus ejes en el sistema original:*

$$\boxed{\begin{Bmatrix}x'\\y'\\z'\end{Bmatrix}=\underline{\underline{R}}\cdot\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\underline{\underline{R}}^{-1}\cdot\begin{Bmatrix}x'\\y'\\z'\end{Bmatrix}\quad donde\quad\underline{\underline{R}}^{-1}=\underline{\underline{R}}^{T}}$$

Tensores y cambios de coordenadas

A partir de la fórmula de transformación de componentes de los vectores se deduce la correspondiente a la transformación de componentes del tensor de tensiones. Se parte de la expresión de la tensión en un punto con referencia a un plano, escrita para dos sistemas de coordenadas distintos:

Componentes en el sistema rotado (XYZ)'

(a) $\boxed{\overline{S}'_n = \underline{\underline{S}}' \cdot \hat{n}'}$

Componentes en el sistema original (XYZ)

(b) $\boxed{\overline{S}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}}$

Reemplazando en ***(a)*** *las componentes rotadas* $\overline{S}'_n$ *y* $\hat{n}'$ *por sus expresiones en función de las correspondientes al sistema original (a través de la matriz de rotación) se tiene:*

$$\underline{\underline{R}} \cdot \overline{S}_n = \underline{\underline{S}}' \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \hat{n}$$

Premultiplicando la expresión anterior por la traspuesta de la matriz de rotación (que es su inversa):

(c) $\boxed{\overline{S}_n = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{S}}' \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \hat{n}}$

Comparando ***(c)*** *con* ***(b)*** *se observa que tienen la misma forma y que por tanto las siguientes son las relaciones buscadas para transformar las componentes del tensor de tensiones entre dos sistemas de coordenadas rotados entre sí:*

$$\boxed{\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{S}}' \cdot \underline{\underline{R}}}$$

Componentes del tensor en el sistema original (XYZ) a partir de las del sistema rotado

$$\boxed{\underline{\underline{S}}' = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{R}}^T}$$

Componentes del tensor en el sistema rotado (XYZ)' a partir de las del sistema original

Definición formal de TENSOR: *las fórmulas anteriores permiten definir formalmente al tensor como un ente geométrico cuyas componentes varían según aquellas al rotar el sistema de coordenadas.*

Autovalores y Autovectores del tensor de tensiones: *así como para un vector puede hallarse un sistema de coordenadas donde dos de sus componentes resulten nulas, para un tensor es posible encontrar un sistema en el cual sean nulas todas sus componentes no diagonales (cortantes). En tal sistema el tensor sólo posee componentes en su diagonal (normales) que hemos llamado tensiones principales y el sistema está orientado según las direcciones principales. En términos del álgebra lineal se dice que esas tensiones principales son los AUTOVALORES de la matriz de tensiones y que las direcciones principales son sus AUTOVECTORES.*

Formas particulares del tensor de tensiones: *el elipsoide que representa al tensor de tensiones puede resultar de revolución (si dos tensiones principales son iguales) o una esfera (si las tres son iguales). Eventualmente puede convertirse en una elipse o círculo cuando una de las tensiones principales es nula (estado plano de tensiones).*