

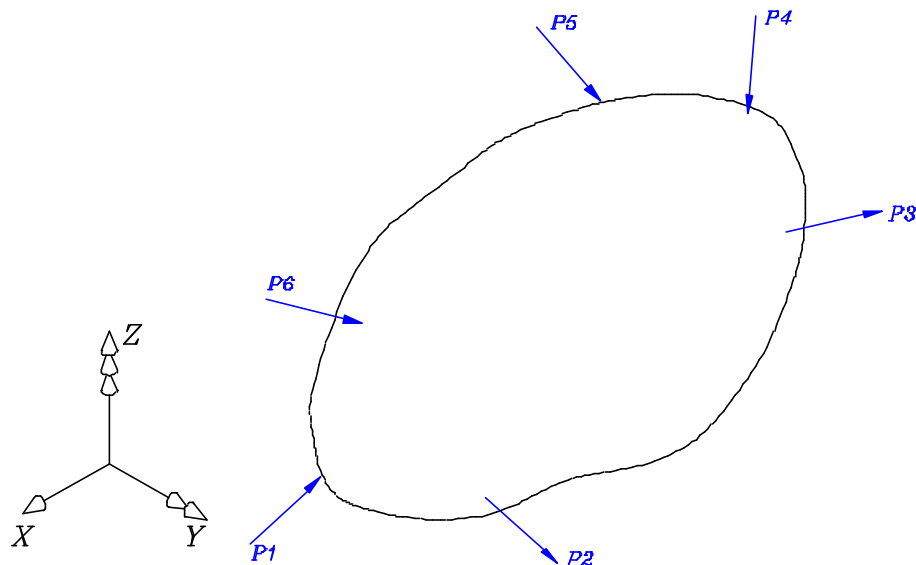
1. Las tensiones en un sólido elástico

El estudio de las tensiones en un sólido elástico es el primer paso en la comprensión de los fenómenos que ocurren en el interior del mismo y de las leyes que los gobiernan. A tal efecto se analizará un sólido genérico solicitado por cargas en su superficie y por fuerzas másicas, y se desarrollarán los siguientes pasos:

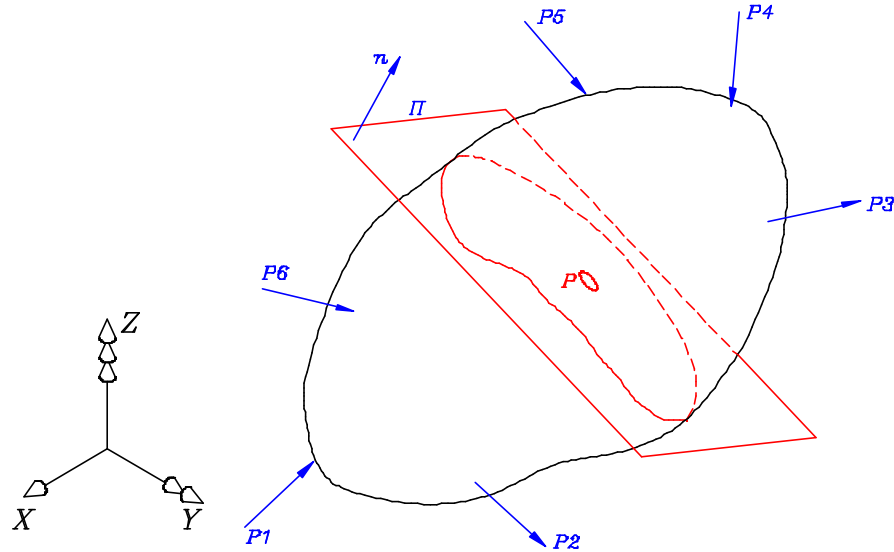
- 1.1. Se definirá el concepto de “Tensión en un punto con referencia a un plano” y se acordará una notación para la misma.
- 1.2. Se planteará el equilibrio de un cubo diferencial alrededor de un punto interior del sólido con el objeto de obtener las “Ecuaciones diferenciales del equilibrio en volumen”.
- 1.3. Se planteará el equilibrio de una porción diferencial de la superficie del sólido con el propósito de deducir las “Ecuaciones del equilibrio en el contorno” del mismo.
- 1.4. Finalmente para llegar al concepto de “Tensión en un punto” se analizará la “Rotación de tensiones”, se definirá en concepto de “Tensor” y se estudiarán las “Tensiones principales”.

1.1. Tensión en un punto con referencia a un plano cuya normal es “n”

Consideremos un sólido de forma genérica en equilibrio con un grupo de cargas cualquiera, descrito en un sistema coordenado (X;Y;Z) como el mostrado en la figura:

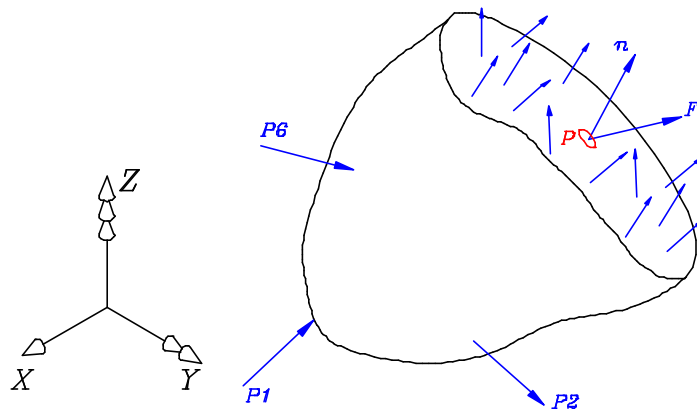


A fin de analizar lo que sucede en un punto interior “P” del sólido, seccionémoslo imaginariamente con un plano “ Π ” que pase por el citado punto y cuya orientación esté dada por un vector normal al mismo “ n ”.



Una pequeña área “S” alrededor del punto “P” está sometida a un esfuerzo interno resultante “F” que genera una tensión media calculable como:

$$S_{media} = \frac{F}{S}$$



Definimos como **Tensión en un punto** (x_p ; y_p ; z_p) con referencia a un plano cuya normal es “ n ” al siguiente límite:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{F}{S} = S_{n(x_p; y_p; z_p)}$$

Notación: en la notación de la tensión prescindiremos de las coordenadas $(x_p; y_p; z_p)$ del punto considerado, y a sus componentes las identificaremos con un subíndice adicional que indique el eje coordenado al que pertenecen:

$$S_n \begin{pmatrix} S_{nx} & S_{ny} & S_{nz} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: componente según el eje “y”:

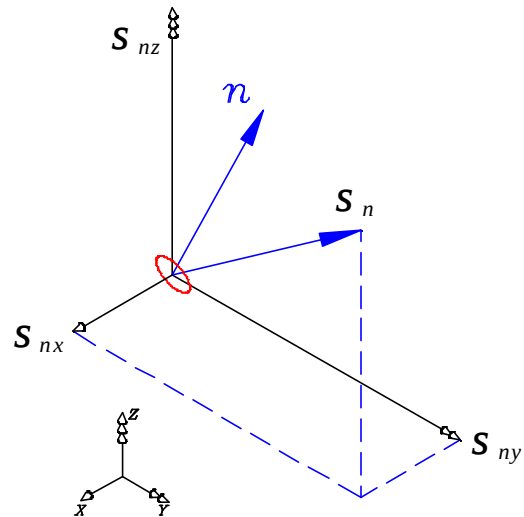
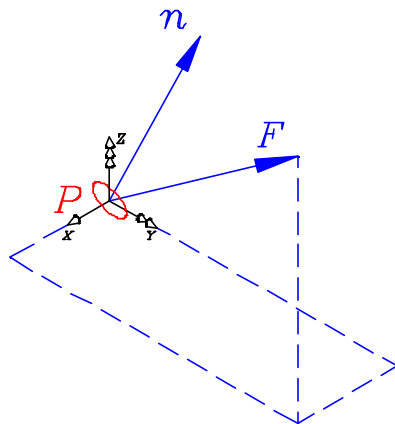
S_{ny}

Primer subíndice:

Indica la normal al plano respecto del cual se considera la tensión.

Segundo subíndice :

Indica el eje coordenado al que corresponde la componente.



Casos particulares: frecuentemente se mencionarán tensiones con referencia a planos cuyas normales son los propios ejes coordenados. Si la normal al plano coincide con uno de los ejes coordenados, entonces una de las componentes de la tensión es “Normal” al plano y las otras dos resultan “Contenidas en el plano” (cortantes). Según la notación acordada se tiene:

Tensión con referencia a un plano cuya normal es:

Notación de la tensión y sus componentes

Tensión Normal al plano

Tensiones contenidas en el plano

X

$$S_x \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \end{pmatrix}$$

S_{xx}

$S_{xy} \quad S_{xz}$

Y

$$S_y \begin{pmatrix} S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \end{pmatrix}$$

S_{yy}

$S_{yx} \quad S_{yz}$

Z

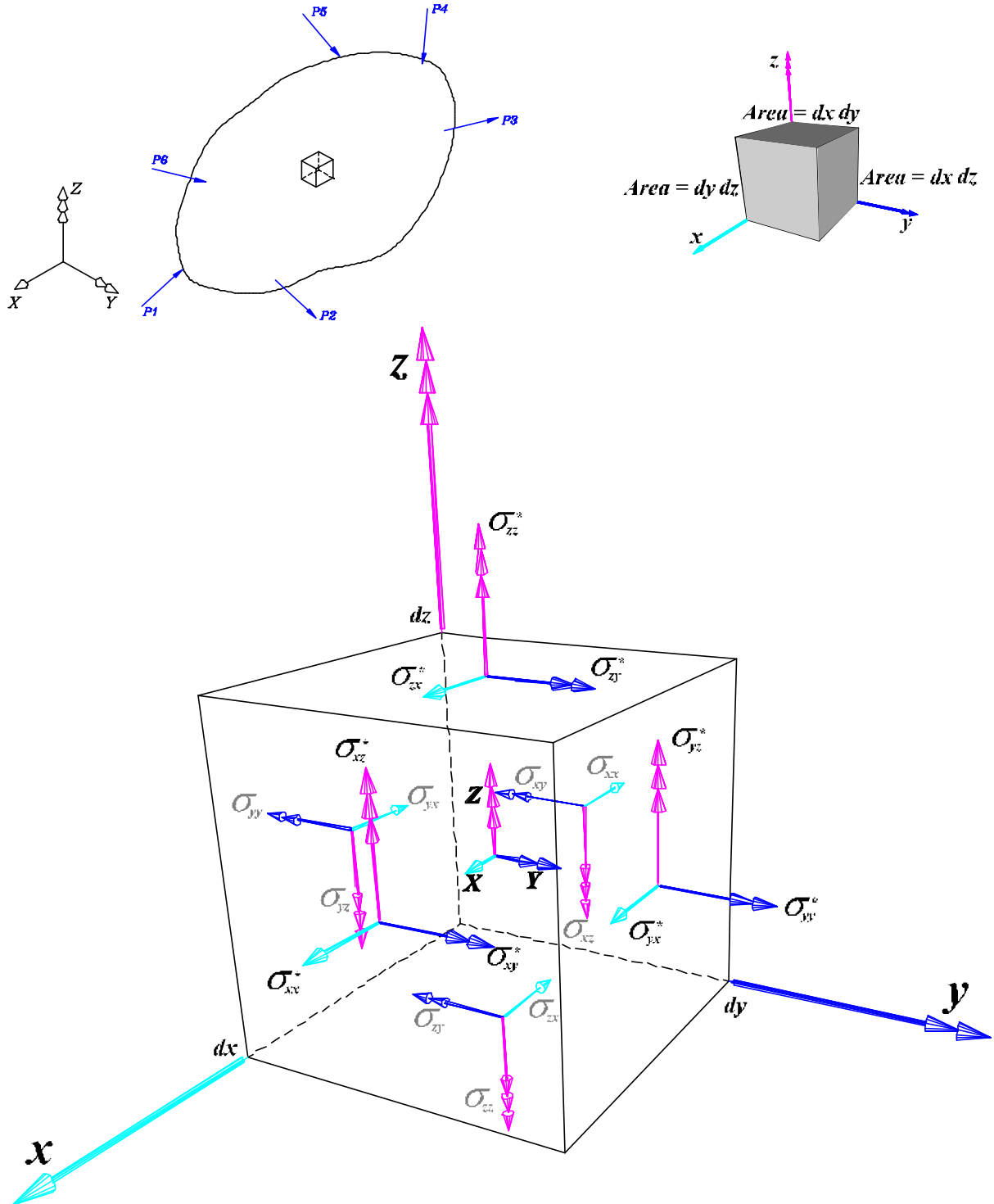
$$S_z \begin{pmatrix} S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}$$

S_{zz}

$S_{zx} \quad S_{zy}$

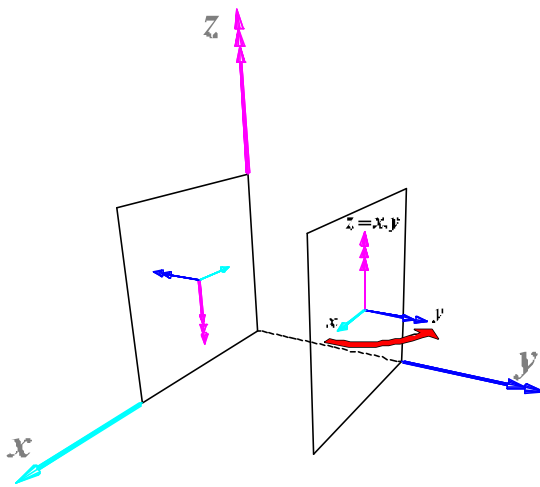
1.2. Ecuaciones diferenciales del equilibrio en volumen

Consideremos un cubo de dimensiones diferenciales, orientado según los ejes coordenados, alrededor de un punto interior del sólido y construyamos un diagrama de cuerpo libre para el mismo:

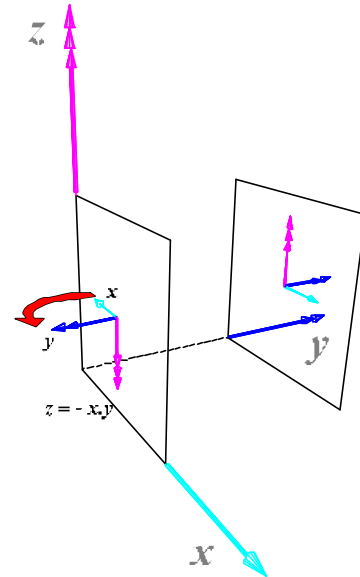


Convención para los sentidos de las tensiones: Todas las tensiones “Normales”, de subíndices “xx”, “yy” o “zz”, apuntan hacia afuera del cubo. Cuando el sentido de estas tensiones coincide con el positivo del eje coordenado respectivo, las tensiones de “Corte” en esa cara también lo hacen, formando una terna destrógiara. Cuando el sentido de las tensiones “Normales” es opuesto al del eje coordenado respectivo, las tensiones de “Corte” en esa cara también lo son y la terna resultante no es destrógiara.

Tensiones normales y de corte positivas
terna destrógiara



Tensiones normales y de corte negativas
terna no destrógiara



Para verificar el equilibrio del cubo diferencial considerado se debe cumplir que las sumatorias de fuerzas y de momentos sobre el mismo son nulas. De la sumatoria de fuerzas se obtendrán las “Ecuaciones diferenciales del equilibrio en volumen”, y de la sumatoria de momentos se deducirán las “Relaciones de Cauchy”.

Sumatoria de fuerzas según el eje X:

$$\sum_{i=1}^7 F_{x_i} = \sum_{i=1}^6 S_{nx_i} dA + X dV = 0$$

$$-S_{xx} dydz + S_{xx}^* dydz - S_{yx} dx dz + S_{yx}^* dx dz - S_{zx} dx dy + S_{zx}^* dx dy + X dx dy dz = 0$$

En la sumatoria el término “X” corresponde a la componente homóloga de las fuerzas másicas (por unidad de volumen) de origen gravitatorio, inercial, magnético, etc.

Las tensiones con superíndice (*) corresponden a las caras del cubo alejadas de los planos coordenados (xz, yz, xy) a distancias dx , dy o dz y se expresan en función de las tensiones en aquellos y del gradiente de tensión en esa dirección. Estas expresiones figuran entre paréntesis en las siguientes líneas que, para mayor claridad, se han escrito de a pares con un subtotal que muestra el resultado de la cancelación de algunos de sus términos:

$$-S_{xx} dydz + \left(S_{xx} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz = \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} dx dydz$$

$$-S_{yx} dx dz + \left(S_{yx} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz = \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dx dydz$$

$$-S_{zx} dx dy + \left(S_{zx} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} dx dydz$$

A continuación se reescribe la ecuación original a partir de los tres resultados parciales anteriores y el término de la fuerza másica:

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} dx dydz + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} dx dydz + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} dx dydz + X dx dydz = 0$$

El resultado final, tras la cancelación del diferencial de volumen $dx dydz$, es la primera de las ecuaciones diferenciales del equilibrio en volumen:

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Sumatoria de fuerzas según el eje Y:

De manera similar se deduce la segunda ecuación:

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

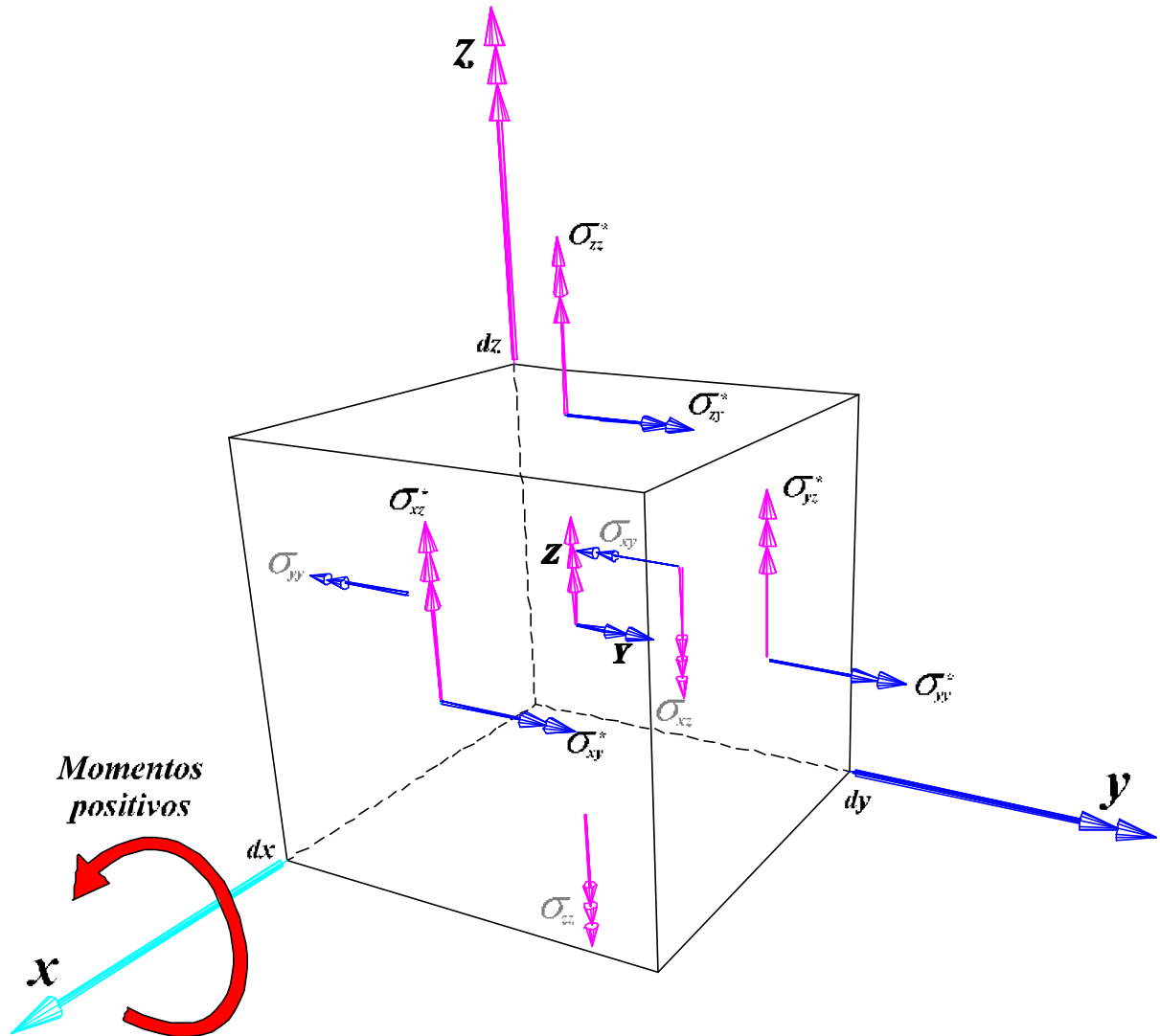
Sumatoria de fuerzas según el eje Z:

Y análogamente la tercera ecuación diferencial del equilibrio en volumen resulta:

$$\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + Z = 0$$

Sumatoria de momentos respecto al eje X:

La figura siguiente es parte del diagrama de cuerpo libre ya visto, en la misma sólo se muestran las fuerzas que tienen momento respecto del eje "X":



$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{12} M_i^x &= \sum_{i=1}^{12} F_i \cdot \text{dist} = \sum_{i=1}^{10} S_i \cdot dA \cdot \text{dist} + \sum_{i=1}^2 X_i \cdot dV \cdot \text{dist} = 0 \\
 &+ S_{yy} dx dz \frac{dz}{2} - S_{yy}^* dx dz \frac{dz}{2} + S_{yz}^* dx dz dy - S_{zz} dx dy \frac{dy}{2} + S_{zz}^* dx dy \frac{dy}{2} - \\
 &- S_{zy}^* dx dy dz + S_{xy} dy dz \frac{dz}{2} - S_{xy}^* dy dz \frac{dz}{2} - S_{xz} dy dz \frac{dy}{2} + S_{xz}^* dy dz \frac{dy}{2} - \\
 &- Y dx dy dz \frac{dz}{2} + Z dx dy dz \frac{dy}{2} = 0
 \end{aligned}$$

A continuación las expresiones entre paréntesis reemplazan a las tensiones con superíndice (*). Para mayor claridad se han escrito agrupando en cada fila las fuerzas actuantes en caras opuestas del cubo. Notar que poseen términos que se cancelan mutuamente y también diferenciales que se anulan por resultar de orden superior, como los que multiplican a las derivadas de las tensiones. Finalmente las fuerzas másicas también se anulan por estar multiplicadas por diferenciales de orden superior:

Caras paralelas al plano XZ:

$$+ S_{yy} dx dz \frac{dz}{2} - \left(S_{yy} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dz}{2} + \left(S_{yz} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz dy = S_{yz} dx dy dz$$

Caras paralelas al plano XY:

$$- S_{zz} dx dy \frac{dy}{2} + \left(S_{zz} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dy}{2} - \left(S_{zy} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy dz = -S_{zy} dx dy dz$$

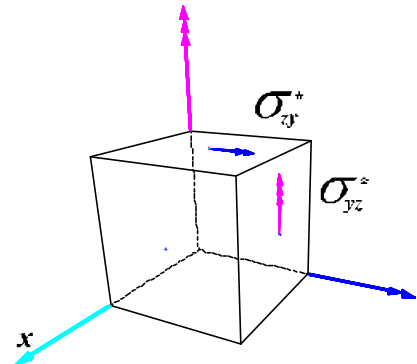
Caras paralelas al plano YZ:

$$+ S_{xy} dy dz \frac{dz}{2} - \left(S_{xy} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dz}{2} = 0$$

$$- S_{xz} dy dz \frac{dy}{2} + \left(S_{xz} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dy}{2} = 0$$

Fuerzas másicas:

$$- Y dx dy dz \frac{dz}{2} + Z dx dy dz \frac{dy}{2} = 0$$



Recomponiendo la ecuación original el resultado es la primera de las relaciones de Cauchy:

$$S_{yz} = S_{zy}$$

Sumatoria de momentos respecto al eje Y:

De manera similar se deduce la segunda relación:

$$S_{xz} = S_{zx}$$

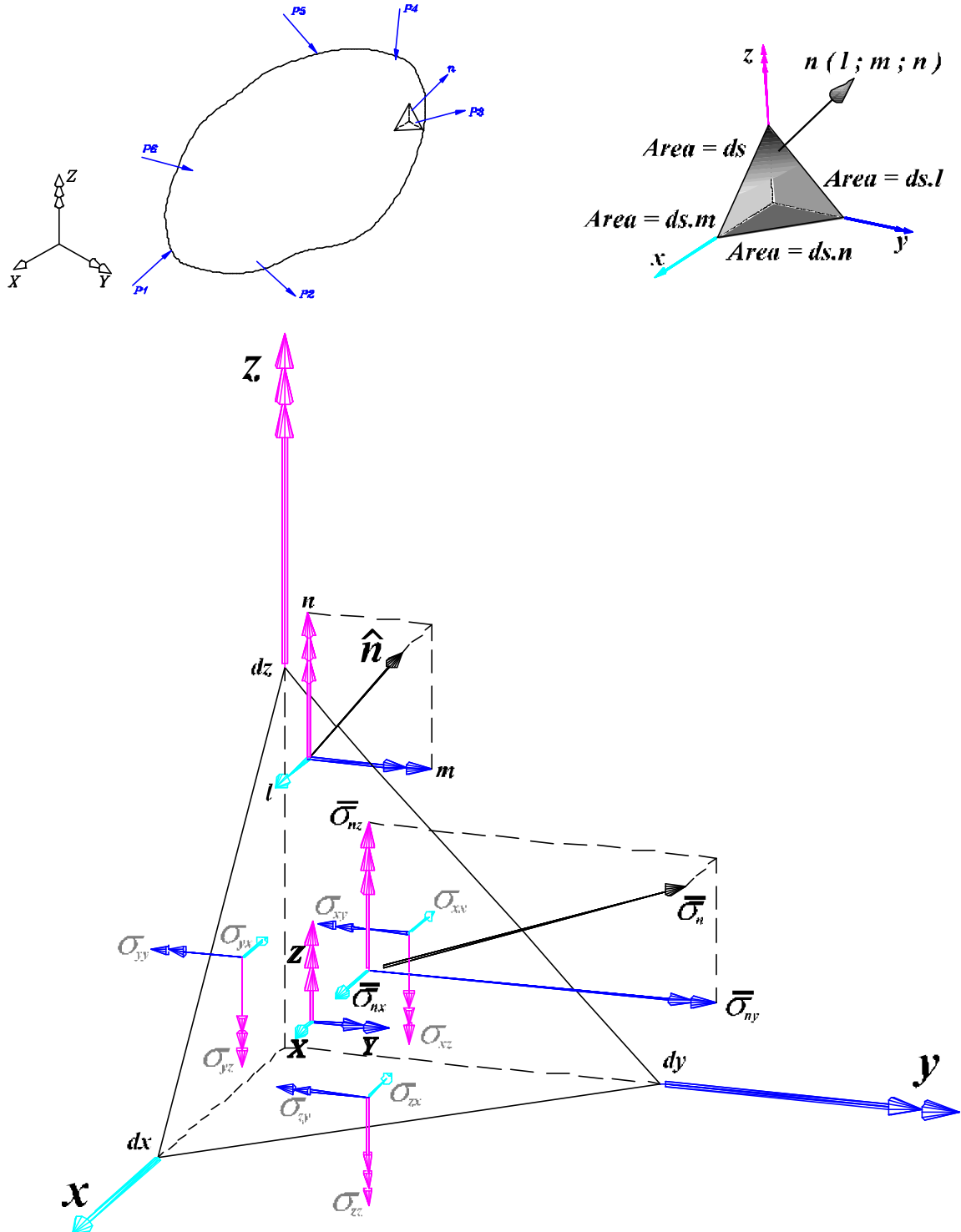
Sumatoria de momentos respecto al eje Z:

Y análogamente la tercera relación de Cauchy resulta:

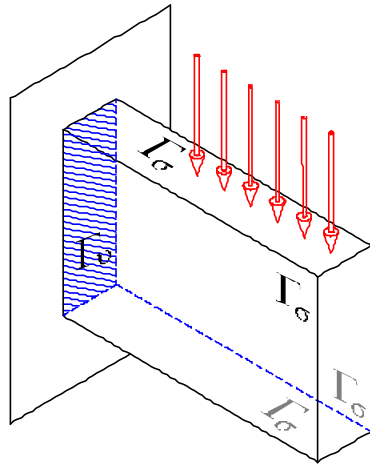
$$S_{xy} = S_{yx}$$

1.3. Ecuaciones del equilibrio en el contorno

Consideremos un elemento de dimensiones diferenciales, orientado según los ejes coordenados, alrededor de un punto de la superficie del sólido y construyamos un diagrama de cuerpo libre para el mismo:



Convención para la superficie de un sólido: la superficie G del sólido en estudio se considerará, por comodidad, dividida en dos partes:



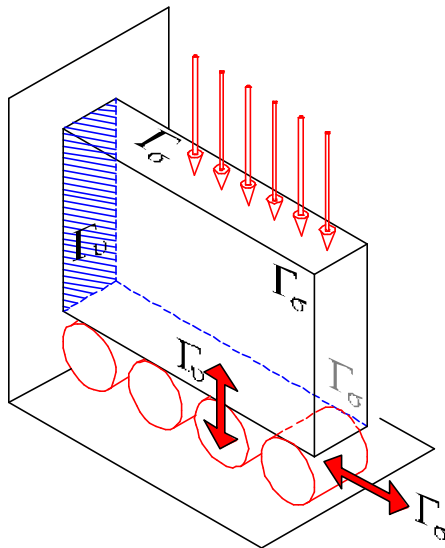
- una llamada G_s donde hay cargas externas aplicadas (datos del problema), eventualmente nulas.
- y otra llamada G_u donde se encuentran los vínculos, es decir donde los desplazamientos están impuestos.

De esta forma la superficie total es:

$$G = G_s \cup G_u$$

y suponemos que:

$$G_s \cap G_u = \emptyset.$$



En el caso mostrado en la primer figura las superficies G_s y G_u se encuentran perfectamente separadas, pero existen situaciones en las que una misma superficie se considerará G_s en un sentido y G_u en el otro. Tal es el caso de la superficie en contacto con el apoyo de rodillos de la segunda figura, la cual se considera G_u en sentido vertical pero G_s en sentido horizontal.

Notación para las tensiones en el contorno: las citadas tensiones y sus componentes se escribirán con una raya superior para indicar que se trata de datos del problema:

$$\overline{\mathbf{S}}_n \left(\overline{\mathbf{S}}_{nx} \quad \overline{\mathbf{S}}_{ny} \quad \overline{\mathbf{S}}_{nz} \right)$$

Para verificar el equilibrio del elemento diferencial considerado deben resultar nulas las sumatorias de fuerzas y de momentos sobre el mismo. De la sumatoria de fuerzas se obtendrán las "Ecuaciones del equilibrio en el contorno", y de la sumatoria de momentos podrían deducirse nuevamente las "Relaciones de Cauchy" (no se desarrollará).

Sumatoria de fuerzas según el eje X:

$$\sum_{i=1}^n F_{x_i} = 0$$

$$\overline{S}_{nx} ds - S_{xx} ds \cdot l - S_{yx} ds \cdot m - S_{zx} ds \cdot n + X dv = 0$$

En la sumatoria la fuerza másica "X" está multiplicada por el diferencial de volumen "dv" que resulta de orden superior a los de superficie "ds" por lo cual puede despreciarse:

$$\overline{S}_{nx} ds - S_{xx} ds \cdot l - S_{yx} ds \cdot m - S_{zx} ds \cdot n = 0$$

Tras simplificar en todos los términos el "ds" y reordenar se obtiene la primera de las "Ecuaciones del equilibrio en el contorno":

$$\overline{S}_{nx} = S_{xx} \cdot l + S_{yx} \cdot m + S_{zx} \cdot n$$

Sumatoria de fuerzas según el eje Y:

De manera similar se deduce la segunda ecuación:

$$\overline{S}_{ny} = S_{xy} \cdot l + S_{yy} \cdot m + S_{zy} \cdot n$$

Sumatoria de fuerzas según el eje Z:

Y análogamente la tercera ecuación del equilibrio en el contorno resulta:

$$\overline{S}_{nz} = S_{xz} \cdot l + S_{yz} \cdot m + S_{zz} \cdot n$$

Expresión matricial de las ecuaciones del equilibrio en el contorno:

Resultará útil para desarrollos posteriores la expresión matricial que se muestra a continuación para las ecuaciones del equilibrio en el contorno:

$$\underline{\underline{\overline{S}_n}} = \underline{\underline{S}} \cdot \hat{n}$$

$$\overline{S}_n = \begin{Bmatrix} \overline{S}_{nx} \\ \overline{S}_{ny} \\ \overline{S}_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$