0. Resistencia de Materiales y Teoría de la Elasticidad

Tanto la Teoría de la Elasticidad como la Resistencia de Materiales sirven a un mismo propósito: el diseño de elementos de máquinas y construcciones. Ambas disciplinas plantean modelos de la realidad con sus propias hipótesis y de aquellas derivan sus métodos de cálculo y también sus limitaciones. Se recordarán brevemente las hipótesis y la forma de trabajo de la Resistencia de Materiales y luego se plantearán las correspondientes a la Teoría de la Elasticidad, intentando conectarlas para que sirvan como herramientas mutuamente complementarias.

Resistencia de Materiales: hipótesis

*En **resistencia de materiales** se utilizan métodos de cálculo a la resistencia, la rigidez y la estabilidad de los elementos de máquinas y construcciones. La **resistencia** es la capacidad de un elemento o estructura de contrarrestar una carga determinada sin descomponerse. La **rigidez** es la propiedad de oponerse a las cargas exteriores con deformaciones (cambios de forma y dimensiones) de valores prefijados. La **estabilidad** es la capacidad de experimentar pequeñas variaciones en la deformación como respuesta a pequeñas variaciones de las cargas. Para formar la **teoría** de la resistencia de materiales se aceptan una serie de **hipótesis** sobre las propiedades de los materiales (1, 2 y 3), el carácter de las deformaciones (4, 5 y 6) y la estructura (7 y 8):*

1. ***Hipótesis sobre la continuidad del material**: se supone que el material llena totalmente el volumen que ocupa. La teoría atomística de la composición discreta de la materia no se toma en consideración.*
2. ***Hipótesis sobre la homogeneidad e isotropía**: se supone que las propiedades del material son iguales en todos los puntos y, en cada punto, en todas las direcciones. En algunos materiales tales como la madera, el hormigón, los plásticos reforzados y el acero laminado, esta hipótesis es lícita con cierta aproximación.*
3. ***Hipótesis sobre la elasticidad perfecta del material**: se suponen todos los cuerpos absolutamente elásticos, aunque en la práctica los cuerpos reales pueden considerarse elásticos solamente hasta ciertos valores de las cargas.*
4. ***Hipótesis sobre la pequeñez de las deformaciones**: se supone que las deformaciones son pequeñas en comparación con las dimensiones del cuerpo deformado. De este modo los puntos de aplicación de las cargas exteriores no varían significativamente cuando el cuerpo se deforma, y por tanto tales variaciones no se toman en cuenta al deducir las ecuaciones.*
5. ***Hipótesis sobre la dependencia lineal entre las deformaciones y las cargas**: se supone que para la mayoría de los materiales es válida la ley de Hooke que establece la dependencia proporcional directa entre las deformaciones y las cargas (sólidos linealmente deformables).*

6. ***Principio de superposición de cargas****: los esfuerzos (o deformaciones) provocados por diferentes factores (varias fuerzas, acción de la temperatura, etc.) son iguales a la suma de los esfuerzos (o deformaciones) provocados por cada uno de esos factores y no dependen del orden en que se apliquen. Este principio, válido para sólidos rígidos, es aplicable si se cumplen las hipótesis de pequeñez y dependencia lineal de las deformaciones.*
7. ***Hipótesis de las secciones planas****: se supone que las secciones transversales planas (mentalmente trazadas) se mantienen planas y perpendiculares al eje deformado de la pieza luego del proceso de deformación.*
8. ***Principio de Saint-Venant****: el valor de las fuerzas interiores en los puntos del sólido, situados suficientemente lejos de los lugares de aplicación de las cargas, depende muy poco del modo concreto de aplicación de estas cargas. Este principio permite en muchos casos sustituir un sistema de fuerzas complejo (el realmente aplicado a la pieza) por otro más sencillo, estáticamente equivalente, a efectos de simplificar el cálculo.*

***Resistencia de Materiales**: forma de trabajo*

Luego de una etapa básica de definiciones (fuerzas exteriores e interiores, diagramas, reacciones, tensiones en la sección) se llega al planteamiento de las llamadas ***ecuaciones estáticas*** *que establecen las dependencias generales entre las tensiones* $\boldsymbol{S}$ *y* $\boldsymbol{t}$ *, por un lado, y las componentes de las fuerzas interiores* $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ *y* $\boldsymbol{M}$*, por otro:*

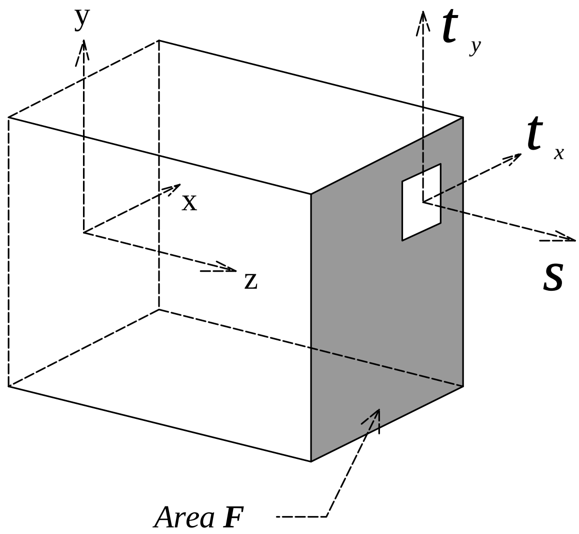
$$N = \int_F \boldsymbol{S} \; dF$$

$$Q_y = \int_F \boldsymbol{t}_y \, dF$$

$$Q_x = \int_F \boldsymbol{t}_x \, dF$$

$$M_y = \int_F x \cdot \boldsymbol{S} \; dF$$

$$M_x = \int_F y \cdot \boldsymbol{S} \; dF$$



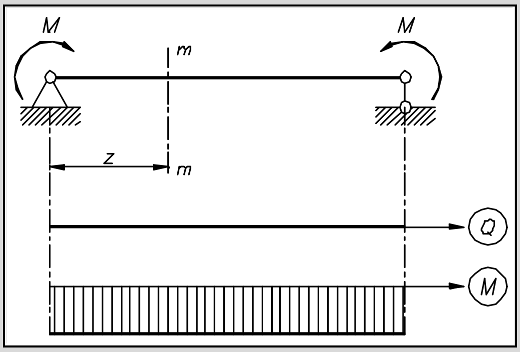
$$M_z = M_t = \int_F \left(y \cdot \boldsymbol{t}_x + x \cdot \boldsymbol{t}_y \right) dF$$

En los casos más simples, denominados ***isostáticos****, es posible obtener los esfuerzos interiores* $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ *y* $\boldsymbol{M}$ *en cualquier sección y las reacciones en los apoyos sencillamente planteando el* *equilibrio de fuerzas y momentos. Pero las ecuaciones estáticas no sirven de mucho si no se conoce la* ***ley de distribución de las tensiones*** *en la sección. Por ejemplo, conociendo el valor del momento flector My en la sección no se pueden hallar las tensiones normales haciendo uso la correspondiente ecuación estática.*

Sin embargo si, valiéndose de unas u otras consideraciones, se logra establecer cómo se distribuyen por la sección las tensiones normales y tangenciales, entonces es posible hallar los valores de las mismas utilizando las ecuaciones estáticas. El ***método general*** *para deducir las fórmulas de* ***cálculo de las tensiones*** *sigue el siguiente esquema:*

1. *Se examina la* ***parte estática del problema****: se escriben aquellas de las ecuaciones estáticas que son necesarias para el caso en estudio, y que establecen las dependencias entre tensiones y esfuerzos en la sección.*
2. *Se examina la* ***parte geométrica del problema****: a base de los datos experimentales se escriben las ecuaciones geométricas que establecen los desplazamientos de los puntos de la barra en función de su posición en la sección.*
3. *Se examina la* ***parte física del problema****: a base de los datos experimentales se escriben las ecuaciones que expresan la dependencia entre las tensiones y las deformaciones (o desplazamientos).*
4. *Se efectúa la* ***síntesis****: se resuelven conjuntamente las ecuaciones obtenidas en los pasos 1 a 3 en las que las incógnitas son las tensiones y las deformaciones, y los datos son los esfuerzos. Eliminando las deformaciones (o desplazamientos) se obtienen las fórmulas que expresan las tensiones en función de los esfuerzos en la sección.*

Ejemplo *Para ejemplificar esta metodología de trabajo se aplica a continuación al caso de flexión pura para obtener la clásica fórmula que relaciona la tensión normal con el momento flector (fórmula de Navier):*



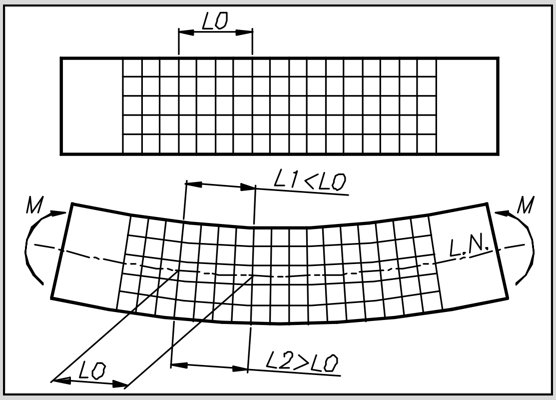
Parte estática del problema*: en la flexión pura, de las seis componentes de los esfuerzos interiores, solamente Mx es distinto de cero:*

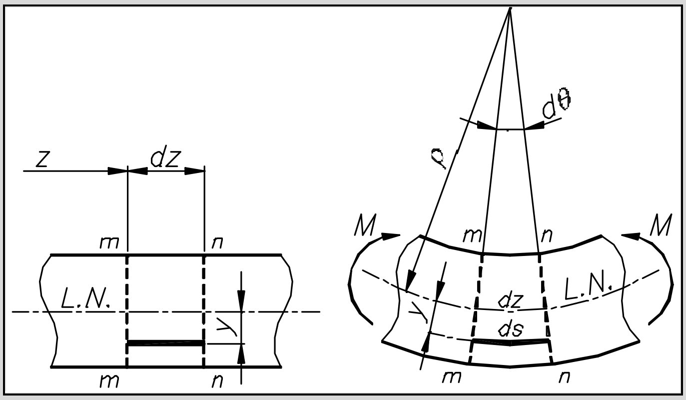
$$N = Qx = Qy = 0, \quad My = Mz = 0$$

Así sólo será necesaria una de las seis ecuaciones estáticas correspondiente al momento en la dirección del eje x:

$$\boxed{M_x = \int_F y s \, dF}$$

***Parte geométrica del problema**: la experiencia práctica de trazar una red sobre la viga a deformar muestra que sus líneas longitudinales se convierten en arcos de círculo concéntricos y las transversales se mantienen rectilíneas, intersecando a las longitudinales bajo ángulos rectos (coinciden con los radios de los arcos de círculo). En la parte superior las fibras se acortan (zona comprimida), mientras que en la inferior se alargan (zona traccionada). Ambas zonas, de compresión y tracción, están separadas por la "capa neutra" que no sufre cambios en su longitud, y que adopta un radio de curvatura r.*





*El alargamiento unitario de cierta fibra que se encuentra a una distancia **y** de la capa neutra se halla examinando la deformación de un tramo de la viga con longitud **dz**:*

Longitud de la fibra neutra $(y=0)$ curvada ....: $dz = r\ dq$

Longitud de la fibra separada "y" de la neutra................................: $ds = \left(r + y\right)\, dq$

Estiramiento de la fibra separada "y" de la neutra ....: $\Delta ds = ds - dz = y\ dq$

Alargamiento unitario de la fibra separada "y" de la neutra...........: $\boxed{e = \dfrac{\Delta ds}{dz} = \dfrac{y\ dq}{r\ dq} = \dfrac{y}{r}}$

***Parte física del problema**: la experiencia práctica muestra que para muchos materiales se cumple la ley de Hooke que establece la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones a través del módulo de elasticidad **E** (módulo de Young).*

$$\boxed{e = \frac{s}{E}}$$

***Síntesis**: se presenta primeramente un resumen de las ecuaciones obtenidas en los tres pasos previos para luego proceder a su resolución conjunta:*

Parte estática	**Parte geométrica**	**Parte física**
Esfuerzos Vs Tensiones	*Deformaciones Vs Posición*	*Deformaciones Vs Tensiones*
$\boxed{M_x = \int_F y s\ dF}$	$\boxed{e = \dfrac{y}{r}}$	$\boxed{e = \dfrac{s}{E}}$

*Partiendo de ecuación estática e introduciendo primero la física y luego la geométrica se llega a la expresión de la curvatura **1/r** en función del momento flector **Mx**, el módulo **E** y el momento de inercia **I** de la sección:*

$$M_x \overset{\substack{Estatica\\ \downarrow}}{=} \int_F s\ y dF \overset{\substack{Fisica\\ \downarrow}}{=} \int_F E e\, y dF \overset{\substack{Geometrica\\ \downarrow}}{=} \int_F E \frac{y}{r} y dF \overset{\substack{Reordenando\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{r} E \int_F y^2\, dF = \frac{1}{r} E\, I$$

Ecuación de la Curvatura del eje neutro en flexión pura: $\boxed{\dfrac{1}{r} = \dfrac{M_x}{E\, I}}$

Partiendo ahora de la ecuación física e introduciendo primero la geométrica y luego la de la curvatura se llega a la clásica fórmula de cálculo de la tensión normal como función del momento flector, el momento de inercia y la altura respecto de la fibra neutra (fórmula de Navier):

$$s \overset{\substack{Fisica\\ \downarrow}}{=} E e \overset{\substack{Geometrica\\ \downarrow}}{=} E\frac{y}{r} \overset{\substack{Curvatura\\ \downarrow}}{=} E y \frac{M_x}{E I} \overset{\substack{Reordenando\\ \downarrow}}{\cdots\longrightarrow} s = \frac{M_x}{I} y$$

***Comentarios finales**: la fórmula deducida con esta metodología general permite calcular las <u>tensiones</u> en cualquier punto de una sección, conociendo el momento flector y la inercia en la misma. A partir de la ecuación de la curvatura, deducida antes, se obtiene la <u>ecuación diferencial del eje flexionado</u> de la viga, que permite calcular, mediante su integración, el <u>descenso “w” y el giro “q” de la sección</u> en todos los puntos de su eje neutro:*

$$\frac{1}{r} = \frac{M_x}{EI} \overset{\substack{analisis\\ matematico\\ \downarrow}}{=} \frac{\P^2 w \big/ \P z^2}{\left[1+\left(\P w \big/ \P z\right)^2\right]^{3/2}} \overset{\substack{pequeñas\\ deformaciones\\ \downarrow}}{\cong} \P^2 w \big/ \P z^2 \cdots\longrightarrow \frac{\P^2 w}{\P z^2} = \frac{M_x}{EI}$$

$$\frac{\P^2 w}{\P z^2} = \frac{M_x}{EI} \overset{integrando}{\cdots\longrightarrow} \frac{\P w}{\P z} = \int \frac{M_x}{EI}\, dz + C_1 = q \qquad \textit{giro de la seccion}$$

$$\frac{\P w}{\P z} = \int \frac{M_x}{EI}\, dz + C_1 \overset{integrando}{\cdots\longrightarrow} w = \int dz \int \frac{M_x}{EI}\, dz + C_1\, z + C_2 \qquad \textit{descenso de la seccion}$$

*De este modo la resistencia de materiales permite calcular los esfuerzos en una pieza y obtener sus dimensiones de modo que experimente ciertas tensiones de valores admisibles o bien deformaciones prefijadas. En otras palabras: **en casos isostáticos es posible DIMENSIONAR la pieza** conociendo las fuerzas exteriores y las condiciones de vínculo.*

*Cuando la cantidad de vínculos o barras de una estructura excede la indispensable para su equilibrio (sistema **hiperestático**) ya no es posible determinar los esfuerzos planteando solamente el equilibrio (hay más incógnitas que ecuaciones). Se requieren ecuaciones de deformación en las que entran en juego las dimensiones de las piezas (áreas y momentos de inercia) y esto obliga a **PROPONER LA GEOMETRIA** de antemano y proceder a verificarla.*

<u>Teoría de la Elasticidad</u>: generalidades

*En la **Teoría de la Elasticidad Lineal** se aceptan **hipótesis** similares a las mencionadas para la resistencia de materiales en lo referente a las propiedades de los materiales (continuos, homogéneos, isótropos y perfectamente elásticos), como así también sobre el carácter de las deformaciones (pequeñas y lineales con las cargas) y principios como el de Superposición y Saint-Venant. Sin embargo no se plantean restricciones a la manera en que se deformará la estructura tales como la hipótesis de las secciones planas.*

*Tal vez la mayor diferencia esté dada por el planteamiento matemático general del problema donde las **incógnitas** son las **tensiones**, las **deformaciones** y los **desplazamientos** de la pieza, y los **datos** son la **geometría**, los **vínculos** y las **solicitaciones**.*

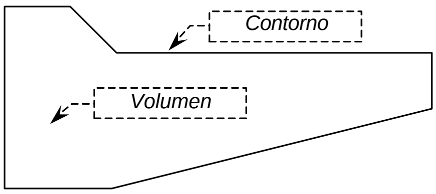
Matemáticamente la pieza en estudio es un dominio en cuyo volumen (puntos interiores) deben verificarse ciertas ecuaciones diferenciales (que involucran a las incógnitas y sus derivadas) que provienen, básicamente, de plantear el equilibrio de una porción interior del sólido. Además, en el contorno del dominio (puntos sobre la superficie) deben verificarse otras ecuaciones similares a las anteriores, que derivan de las diferentes condiciones de contorno del problema particular en estudio. Tales condiciones, por ejemplo, establecen que los desplazamientos son nulos (o conocidos) en los contornos donde existen vínculos y que las cargas son conocidas en todo el resto de la superficie (son las solicitaciones dadas como datos del problema, eventualmente nulas en muchas partes del contorno). Adicionalmente, el planteamiento completo del problema exige datos acerca de cargas en el interior (cargas de volumen tales como el peso) y las propiedades del material (como los módulos de Young y de Poisson).

Con todo lo expuesto se tiene correctamente planteado el problema y es posible proceder a su resolución para obtener las tensiones, deformaciones y desplazamientos "en todos los puntos" del sólido en estudio. Existen dos grandes caminos a seguir para encontrar tales soluciones:

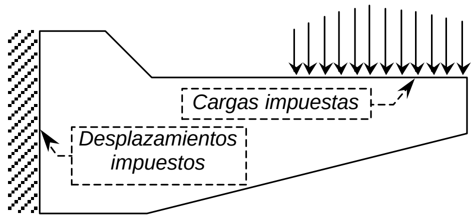
- ***La vía ANALITICA**: se basa en encontrar funciones (de tensión, deformación y desplazamiento) que verifiquen todas las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad. Para ello se proponen funciones genéricas, tales como polinomios, con coeficientes desconocidos a priori, que se van determinando a medida que se exige el cumplimiento de dichas ecuaciones. Esto es óptimo ya que proporciona explícitamente una función que es "la solución exacta al problema" y que puede demostrarse que es única. Como contrapartida, resulta un método muy complicado y aplicable sólo a unos pocos casos sencillos. Por tanto, no es adecuada como herramienta para usos prácticos en ingeniería (sí para fines teóricos).*

- ***La vía NUMERICA**: se trata de la aplicación de alguno de los denominados "métodos numéricos" como el de diferencias finitas, elementos finitos y otros, diseñados para su uso en ordenadores. A grandes rasgos, estos métodos reformulan el problema de solución de ecuaciones diferenciales que, por vía analítica, implica encontrar funciones que las verifiquen exactamente. En cambio, proponen "soluciones aproximadas" que dependen de ciertos parámetros a determinar y cuya cantidad se decide en función del grado de aproximación deseado. Mayor cantidad de parámetros implica una mejor aproximación pero también un mayor costo computacional, que se refleja en el tiempo requerido para alcanzar la solución. Se obtiene una "cantidad finita de valores aproximados de la solución" en ciertos puntos del dominio, y en los restantes se hallan valores por interpolación de aquellos. La simplificación* *desde el punto de vista matemático está en convertir un complejo problema de* ***matemática continua*** *en uno más simple y puramente* ***algebraico*** *de determinación de un conjunto de valores aproximados de la solución, lo cual casi siempre implica la resolución de un gran sistema de ecuaciones (lineal o no lineal) cuya solución es el citado conjunto.*

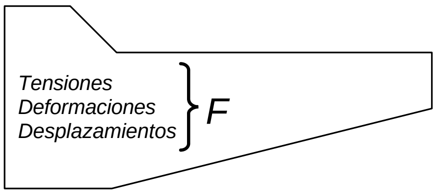
***Dominio**:*
Geometría de la pieza
que se desea verificar



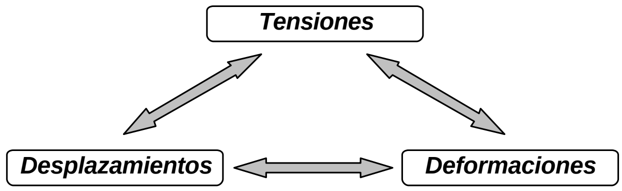
***Condiciones de contorno**:*
Vínculos y Solicitaciones
para el problema en estudio



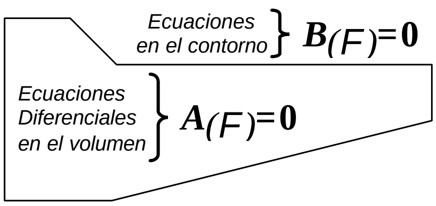
***Incógnitas del problema**:*
Tensiones, deformaciones y
desplazamientos en todo el dominio



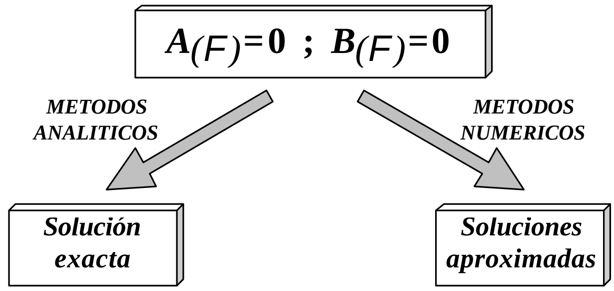
***Relaciones entre las incógnitas**:*
Las incógnitas no son independientes,
sino que existen relaciones entre ellas



***Ecuaciones diferenciales**:*
Las funciones incógnitas deben cumplir
ecuaciones en el volumen y el contorno



***Resolución de las ecuaciones**:*
La vía analítica proporciona la solución exacta,
la vía numérica provee soluciones aproximadas



<u>Nota</u>**: la teoría de la elasticidad* ***REQUIERE SIEMPRE tener definida de antemano LA GEOMETRÍA de la pieza *que se verificará. Como contrapartida ofrece la posibilidad de conocer estados tensionales y deformacionales imposibles de reproducir con la resistencia de materiales, tales como tensiones de contacto entre piezas o concentración de tensiones alrededor de entallas o cambios bruscos de sección. Por tanto, la teoría de la elasticidad no excluye a la resistencia de materiales sino que se utiliza para percibir más finamente lo que sucede con los estados de tensión y deformación, permitiendo notables mejoras en el diseño de elementos de máquinas y estructuras. De hecho, lo más común en el proceso de diseño consiste primeramente en* ***DIMENSIONAR utilizando métodos de la resistencia de materiales*** *y luego* ***VERIFICAR y OPTIMIZAR LA GEOMETRIA con métodos de la teoría de la elasticidad**.*