Problemas en Calculo de Varias Variables: Taller #1

Herman Jaramillo
Universidad de Medellín
www.jaramilloherman.com

11 de diciembre de 2018

Por recomendación del coordinador de Cálculo de varias variables los problemas para los talleres son todos del texto guía. El texto guía es Cálculo de Varias Variables (cuarta edición) por Dennis G. Zill y Warren S. Wright. El texto está disponible electrónicalmente en la biblioteca virtual de la universidad. Como taller (práctica) para el primer parcial les ofrezco la siguiente lista de problemas. Algunos de ellos los podemos resolver en clase la semana anterior al parcial.

Sección 11.8 : Superficies cuadráticas:

En los problemas 1,5,10 identifique y grafique la superficie cuadrática.

1. $x^2 + y^2 = z$
5. $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$
10. $9z + x^2 + y^2 = 0$

Grafique la superficie cuadrática

5. $z = 3 + x^2 + y^2$

La siguiente es una superficie de revolución. Identifique el eje de rotación, encuentre la curva C que se rota.

20. $-9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$

En los problemas 25 y 30, la gráfica de la ecuación dada se rota en torno al eje que se indica. Encuentre la ecuación de la superficie de revolución

25. $z = 9 - x^2 \quad , \quad x \leq 0 \quad ; \quad$ eje x

30. $xy = 1 \quad ; \quad$ eje x

Sección 13.1 : Funciones de Varias Variables

Dominio de una función

En los siguientes problemas halle el dominio de la función dada

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

5. $f(s, t) = s^2 - 2t^2 + 8st$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x - 5}$

Relacione gráfica del dominio con función

En los problemas 11-18 (Figura 1) relacione el conjunto de puntos dados en la figura con el dominio de una de las funciones de (a)-(h).

(a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

(b) $f(x, y) = \ln(x - y^2)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$

(d) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{y} - 1}$

(e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

(f) $f(x, y) = \text{sen}^{-1}(xy)$

(g) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{xy}$

(h) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{y-x}$

Dibuje Dominio

En el problemas 20, dibuje el dominio de la función dada.

20. $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(y^2-4)}$

Dibuje Rango

En los problemas 23-26, determine el rango de la función dada.

23. $f(x,y) = 10 + x^2 + 2\,y^2$

24. $f(x,y) = x + y$

25. $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$

26. $f(x,y,z) = 7 - \mathrm{e}^{xyz}$

Grafique

Describa la gráfica de la función dada

35. $z = \sqrt{36 - x^2 - 3y^2}$

Curvas de Nivel

En los siguiente problema dibuje alguna de las curvas de nivel asociadas con la función dada

40. $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

Superficies de Nivel

En el siguiente problema, describa las superficies de nivel pero no grafique

45. $f(x,y,z) = x^3 + 3y^2 + 6z^2$

11.

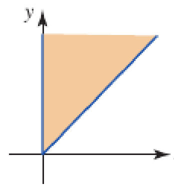


FIGURA 13.1.15 Gráfica del problema 11

12.

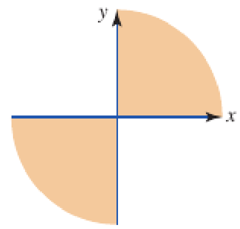


FIGURA 13.1.16 Gráfica del problema 12

13.

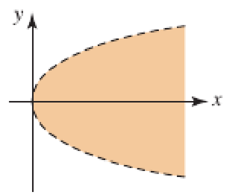


FIGURA 13.1.17 Gráfica del problema 13

14.

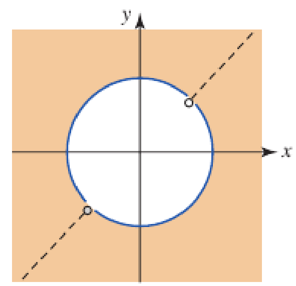


FIGURA 13.1.18 Gráfica del problema 14

15.

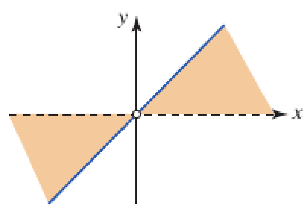


FIGURA 13.1.19 Gráfica del problema 15

16.

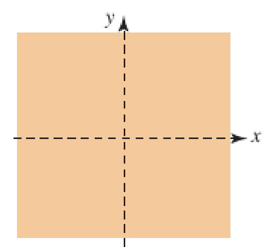
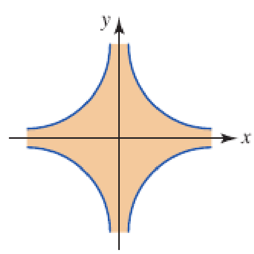


FIGURA 13.1.20 Gráfica del problema 16

17.



18.

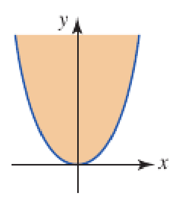


FIGURA 13.1.22 Gráfica del problema 18

Figura 1: Figura para los problemas 11 a 18.

Aplicaciones

50. Exprese la altura de una caja rectangular con una base cuadrada como una función del volumen y de la longitud de un lado de la caja.

Sección 13.1 : Derivadas Parciales

Problemas variados en Derivadas Parciales

En los siguientes problemas, encuentre las primeras derivadas parciales de la función dada.

5. $z = x^2 - xy^2 + 4y^3$

10. $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$

15. $f(x, y) = x\mathrm{e}^{x^3 y}$

20. $h(r, s) = \dfrac{\sqrt{r}}{s} - \dfrac{\sqrt{s}}{r}$

En el siguiente problema suponga que $z = 4x^3y^4$

25. Determine la pendiente de la recta tangente en (1,-1,4) en el plano $x = 1$.

En siguiente problema suponga que $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

30. ¿ A que tasa está cambiando z con respecto a y en el plano $x = \sqrt{2}$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$?

En siguiente problema encuentre la derivada parcial indicada.

35. $w = v^2t^3v^3, \quad w_{tuv}$

En el problema 40, verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

40. $z = \tan^{-1}(2xy)$

Derivación Implícita

En el problema 45, suponga que la ecuación dada define a z como una función de las dos variables restantes. Emplee diferenciación implícita para encontrar las primeras derivadas parciales.

45. $z^2 + u^2v^3 - uvz = 0$

Aplicaciones

En el problema 50 verifique que la distribución de temperatura indicada satisface la **ecuación de Laplace en 2 dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

50. $u(x,y) = \mathrm{e}^{-(n\pi x/L)}\,\mathrm{sen}(n\pi y/L), \quad n$ y L constantes

En el problema 55, verifique que la función dada satisface la **ecuación de onda unidimensional**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

55. $u(x,t) = \cos at\ \mathrm{sen}\,x$

60. Para la función de área de la piel $S = 0.1091w^{0,425}h^{0.725}$ que se discutió en el ejemplo 3, encuentre $\partial S/\partial h$ en $w = 60$, $h = 36$. Si una niña crece de 36 a 37 pulg, mientras su peso se mantiene en 60 lib, ¿ cuál es el aumento aproximado en el área de la piel ?

Piense En Ello

65. (a) Suponga que $z = f(x,y)$ tiene la propiedad de que $\partial z/\partial x = 0$ y $\partial z/\partial y = 0$ para todo (x,y). ¿ Que puede usted afirmar de la forma de $f(x,y)$?
    (b) Suponga que $z = f(x,y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $\dfrac{\partial z}{\partial x\partial y} = 0$. ¿ Que puede usted afirmar acerca de la forma de f ?.

Sección 13.4 : Linealización y diferenciales

En los problemas 1 y 5 Encuentre la linealización de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^3y; \quad (1, 1)$
5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2); \quad (-1, 1).$

En los problemas 15 y 20 calcule la diferencial total de la función dada

15. $f(s, t) = \dfrac{2s - t}{s + 3t}$
20. $G(\rho, \theta, \phi) = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta.$

En el problema 25 compare los valores de Δz y dz para la función dada cuando (x, y) varía del primero al segundo punto.

25. $z = (x + y)^2 \quad , \quad (3, 1), (3.1, 0.8).$

Aplicaciones

35. Si la longitud, ancho y altura de una caja rectangular cerrada aumentan, respectivamente, en 2, 5 y 8 %. ¿ cuál es el incremento porcentual aproximado en el volumen?

Sección 13.5 : Regla de la cadena

En los problemas 1 y 5, encuentre la derivada indicada.

1. $z = \ln(x^2 + y^2)\ ;\ x = t^2, y = t^{-2}\ ,\ \dfrac{dz}{dt}$
5. $p = \dfrac{r}{2s + t}\ ;\ r = u^2\ ,\ s = \dfrac{1}{u^2}\ t = \sqrt{u}\ ;\ \dfrac{dp}{du}.$

En los problemas 10 y 15, encuentre las derivadas parciales indicadas.

10. $z = \dfrac{x - y}{x + y}\ ,\ x = \dfrac{u}{v}\ ,\ y = \dfrac{v^2}{u}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\ ,\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$

15. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \ln(rs + tu)$, $y = \dfrac{t}{u}\cosh(rs)$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial u}$

En el problema 20 encuentre dy/dx mediante dos métodos:

(a) diferenciación implícita y

(b) el teorema 13.5.3i [1]

20. $(x + y)^{2/3} = xy$.

25. Si F y G tienen segundas derivadas parciales, muestre que $u(x,t) = F(x + at) + G(x - at)$ satisface la **ecuación de onda** .

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

26. Sea $\eta = x + at$ y $\xi = x - at$. Muestre que la ecuación de onda del problema 25 se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

30. Si $u = f(r)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, muestre que la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ se transforma en

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

[1] El teorema 13.5.3i dice: Si $w = F(x, y)$ es diferenciable y $y = f(x)$ es una función diferenciable de x definida implícitamente por $F(x, y) = 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_x(x,y)}.$$

Aplicaciones

35. Un bebé crece a una tasa de 2 pulg/año y gana peso a una tasa de 4.2 lb/año. Utilice $S = 0.109w^{0.425}h^{0.725}$ y la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área superficial del bebé está cambiando cuando éste pesa 25 lb y mide 29 pulg de altura.

Sección 13.6 : Derivada Direccional

2. Calcule el gradiente para la función

$$f(x, y) = y - \mathrm{e}^{-2x^2 y}$$

5. Determine el gradiente para la función en el punto indicado.

$$f(x, y) = x^2 - 4y^2 \; ; \; (2, 4)$$

10. Halle $D_u(f, y)$ dado que $\boldsymbol{u}$ forma el ángulo indicado con el eje positivo.

$$f(x, y) = 3x - y^2 \, ; \, \theta = 45°$$

En los problemas 15 y 20 halle la derivada direccional de la función dada en el punto indicado en la dirección señalada.

15.

$$f(x, y) = (xy + 1)^2 \; ; \; (2, -1) \; , \; 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}.$$

20.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 y + 2y^2 z} \; ; \; (2, 4, -1) \; , \; \mathbf{i} - \mathbf{2j} + \mathbf{k}.$$

25. Encuentre el vector que produzca la dirección en la cual la función dadas aumenta más rápidamente en el punto indicado. Encuentra la tasa máxima de cambio.

$$f(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2 \; ; \; (1, 2, -1).$$

30. Encuentre el vector que produzca la dirección en la cual la función dadas disminuye más rápidamente en el punto indicado. Encuentra la tasa mínima de cambio.

$$f(x, y, z) = \ln \frac{xy}{z} \; ; \; \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$$

35. (a) Si $f(x,y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en el punto (x, y) en la dirección de $\boldsymbol{u} = (1/\sqrt{10})(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

    (b) Si $F(x,y) = D_u f(x,y)$ en el inciso (a), determine $D_u F(x, y)$.

39. Considere la placa rectangular que se muestra en la Figura 2. La temperatura en el punto (x, y) sobre la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección que un insecto seguiría, empezando en $(4, 2)$, con el fin de enfriarse lo más rápidamente posible.

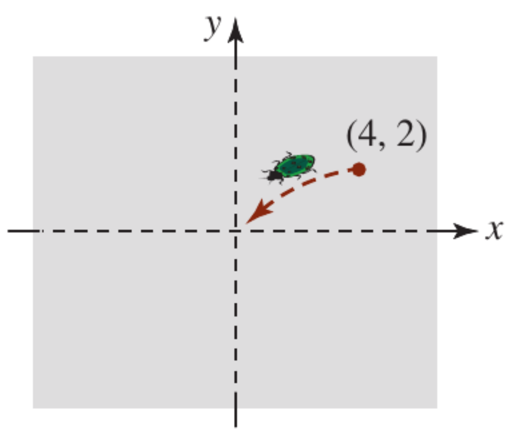


Figura 2: Figura para El problema 39.

40. En el problema 39 observe que para (0,0) es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria de búsqueda de enfriamento del insecto, empezando en (4,2), que el insecto seguirá hacia el origen. Si $(x(t), y(t))$ es la ecuación de la trayectoria, entonces use el hecho de que $-\nabla T(x,y) = (x'(t), y'(t))$. ¿Cuál es la razón de lo anterior?

Sección 13.7 : Planos tangentes y rectas normales

En los problemas 1, 5 y 10 dibuje la curva o superficie de nivel que pasa por el punto indicado. Dibuje el gradiente en el punto.

1. $f(x,y) = x - 2y$; $(6,1)$

5. $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{y^2}{9}$; $(-2,-3)$

10. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$; $(1,1,3)$.

En los problemas 15 y 20, encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto que se indica.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $(-2,2,1)$

20. $xz = 6$; $(2,0,3)$

25. Determine los puntos sobre la superficie dada en la cual el plano tangente es paralelo al plano indicado

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7 \quad ; \quad 2x + 4x + 6z = 1.$$

30. Muestre que la segunda ecuación es la de un plano tangente a la gráfica en la primera ecuación en (x_0, y_0, z_0).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ; \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Sección 13.8 : Extremos de funciones multivariables

En los problemas 1, 5, 10, 15 y 20 encuentre los extremos relativos de la función indicada.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5$

5. $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$

10. $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 5xy - 10x - 5y + 10$

15. $f(x,y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + 8$

20. $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$.

25. Encuentre todos los puntos sobre la superficie $xyz = 8$ que son lo más cercanos al origen. Determine la distancia mínima.

30. Un pedazo de latón de 24 pulg de ancho se dobla de manera tal que su sección transversal es un trapezoide isósceles. Vea la Figura 3. Calcule x y θ de manera que el área de la sección transversal sea un máximo. ¿Cuál es el área máxima?

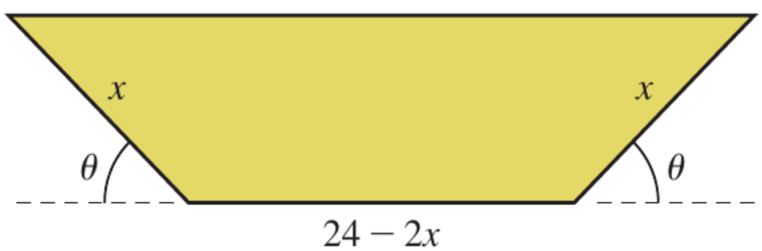


Figura 3: Figura para El problema 30.

35. Encuentre los extremos absolutos de la función continua dada sobre la región cerradas R definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$f(x,y) = x + \sqrt{3}y.$$

40. Encuentre los extremos absolutos de $f(x,y) = xy - 2x - y + 6$ sobre la región triangular cerrada R con vértices $(0,0), (0,8) y (4,0)$.

Sección 13.10 : Multiplicadores de Lagrange

1. Dibuje las gráficas de las curvas de nivel de la función f dada y la ecuación de restricción que se indica. Determine si f tiene un extremo con restricciones

$$f(x, y) = x + 3y \quad \text{sujeta a} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

En los problemas 5,10 y 15, utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontra los extremos con restricciones de la función dada.

5. $f(x, y) = xy \quad \text{sujeta a} \quad x^2 + y^2 = 2$

10. $f(x, y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2 \quad \text{sujeta a} \quad x^2 + y^2 = 10$

15. $f(x, y) = xyz \quad \text{sujeta a} \quad x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1 \quad , \quad x > 0, y > 0, z > 0.$

Aplicaciones

25. El **proceso de Haber-Bosch** produce amníaco mediante una unión directa de nitrógeno e hidrógeno bajo condiciones de presión P y temperatura constantes:

$$N_2 + 3H_2 \overset{\text{catalizador}}{\rightleftharpoons} 2NH_3$$

Las presiones parciales $x, y/$ y z del hidrógeno, nitrógeno y amoníaco satisfacen $x + y + z = P$ y la ley de equilibrio $z^2/xy^3 = k$, donde k es una constante. La cantidad máxima de amonícaco ocurre cuando se obtiene la presión parcial máxima de este mismo. Determine el valor máximo de z.

Solución La función a maximizar es

$$z = f(x, y) = P - x - y$$

sujeto a la restricción $k = z^2/xy^3 = (p - x - y)^2/xy^3$ de donde podemos construir

$$g(x, y) = \frac{(p - x - y)^2}{xy^3} - k \equiv 0. \tag{1}$$

Tenemos entonces el sistema:

$$\nabla f = \lambda \nabla g. \tag{2}$$

Tenemos que

$$\nabla f = (-1, -1)$$

y para el cálculo de ∇g.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{-2xy^3(p-x-y) - (p-x-y)^2 y^3}{x^2y^6} \\
&= \frac{(p-x-y)[-2x-(p-x-y)]}{x^2y^3} \\
&= \frac{(p-x-y)(y-x-p)}{x^2y^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{-2xy^3(p-x-y) - 3(p-x-y)^2 xy^2}{x^2y^6} \\
&= \frac{y(p-x-y)[-2y-3(p-x-y)]}{xy^4} \\
&= \frac{(p-x-y)(y+3x-3p)}{xy^4}
\end{aligned}$$

Usamos la ecuación 2

$$-1 = \frac{\lambda(p-x-y)(y-x-p)}{x^2y^3}$$
$$-1 = \frac{\lambda(p-x-y)(y+3x-3p)}{xy^4}$$

Dividiendo estas dos ecuaciones obtenemos

$$1 = \frac{y(y-x-p)}{x(y+3x-3p)}$$

es decir

$$y(y-x-p)=x(y+3x-3p) \tag{3}$$

y de 1

$$(p-x-y)^2 = kxy^3. \tag{4}$$

La solución a estas ecuaciones se puede hallar usando el sistema simbólico wolframAlpha sin embargo acá mostramos una solución manual.

Para resolver el sistema dado por las ecuaciones 3 y 4 hacemos la siguiente substitucin $Q = x+y-p$. De esta forma el sistema se transforma en

$$\begin{aligned} y(Q-2x) &= x(3Q-2y) \\ Q^2 &= kxy^3. \end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones se cancela el término $-2xy$ obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} yQ &= 3xQ \\ Q^2 &= kxy^3. \end{aligned} \tag{5}$$

De aca que $Q=0$ o $y=3x$. Se derivan dos casos:

(I) $Q=0$, reemplazando esto en la segunda equación $Q^2 = kxy^3$ vemos que o $k=0$ o $x=0$ o $y=0$. Este caso no es interesante, pues se asumen que las cantidades (presiones) son positivas.

(II) : $y=3x$, Reemplazando este resultado en la segunda ecuación 5 encontramos

$$\sqrt{27}\sqrt{k}x^2 = x+3x-p$$

es decir $3\sqrt{3k}x^2 - 4x + p = 0$. Usamos la fórmla cuadrática para obtener

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-(4)(3)\sqrt{3k}p}}{2(3\sqrt{3k}}$$

Simplificando por 2 tenemos

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3\sqrt{3k}p}}{3\sqrt{3k}}$$

y de $y = 3x$ tenemos que

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3\sqrt{3k}p}}{\sqrt{3k}}$$

Encontramos entonces que:

$$z = p - x - y = p - 4x = p - 4\frac{2 \pm \sqrt{4 - 3\sqrt{3k}p}}{3\sqrt{3k}}$$

Dado que queremos maximizar z escojemos el valor mayor:

$$z = p - x - y = p - 4x = p - 4\frac{2 - \sqrt{4 - 3\sqrt{3k}p}}{3\sqrt{3k}}$$

Note que esta solución difiere de la del texto gua en el signo entre los dos trminos. Yo pienso que el error est en el texto y no acá. Si encuentran un error en esta solución les dar un punto para el parcial.

Sección 14.2 : Integrales iteradas

En los problemas 1,5 y 10 evalúe la integral parcial dada.

1. $\int dy$

5. $\int \frac{1}{x(y+1)} dy$

10. $\int (2x+5y)^6 dy$

En los problemas 15 y 20, evalúe la integral parcial definida dada.

15. $\int_0^{2x} \frac{xy}{x^2+y^2} dy$

20. $\int_{1/2}^{1} y \cos^2 xy dx$

En los problemas 25,30,35,40, evalúe la integral iterada dada.

25. $\int_0^{\pi} \int_y^{3y} \cos(2x+y) dx dy$

30. $\int_0^{1} \int_0^{y} x(y^2-x^2)^{3/2} dx dy$

35. $\int_0^{6} \int_0^{\sqrt{25-y^2}/2} \frac{1}{\sqrt{(25-y^2)-x^2}} dx dy$

40. $\int_1^{3} \int_0^{1/x} \frac{1}{x+1} dy dx$

45. Dibuje la región de integración R para la integral iterada que se indica.

$$\int_{-1}^{3} \int_0^{16-y^2} f(x,y) dx dy.$$

50. Verifique la igualdad que se indica.

$$\int_{-2}^{2} \int_2^{4} (2x+4y) dx dy = \int_2^{4} \int_{-2}^{2} (2x+4y) dy dx$$

Sección 14.3 : Evaluación de integrales dobles

En los problemas 1, 5 y 10 evalúe la integral doble sobre la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Elija el orden de integración más conveniente.

1. $\displaystyle\iint_R x^3y^2dA \quad ; \quad y=x\ ,\ y=0\ ,\ x=1$

5. $\displaystyle\iint_R 2xydA \quad ; \quad y=x^2\ ,\ y=8\ ,\ x=0$

10. $\displaystyle\iint_R 2xdA \quad ; \quad y=\tan^{-1}x\ ,\ y=0\ ,\ x=1$

15. Emplee la integral doble para calcular el área de la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones que se indican

$$y=\mathrm{e}^x \quad , \quad y=\ln x \quad , \quad x=1 \quad , \quad x=4$$

20. El sólido acotado por los cilindros $x^2+y^2=r^2$ y $y^2+z^2=r^2$ recibe el nombre de **bicilindro** . Un octavo del sólido se muestra en la Figura 4. Elija y evalúe la integral correcta correspondiente al volumen V del bicilindro.

    (a) $\displaystyle 4\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}(r^2-y^2)^{1/2}dydx$

    (b) $\displaystyle 8\int_{0}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}}(r^2-y^2)^{1/2}dxdy$

    (c) $\displaystyle 8\int_{0}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}(r^2-x^2)^{1/2}dxdy$

En los problemas 25 y 30, determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

25. $z=1+x^2+y^2\ ,\ 3x+y=3\ ,\ x=0\ y=0\ ,\ z=0\,$, primer octante

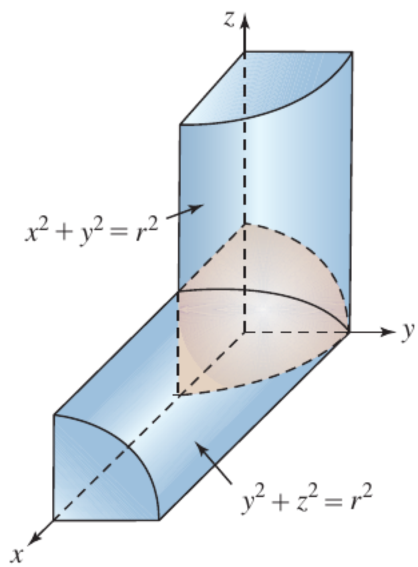


Figura 4: Figura para El problema 20.

30. $z = 1 - x^2$, $z = 1 - y^2$, $x = 0$ $y = 0$, $z = 0$, primer octante

En los problemas 35 y 40, invierta el orden de integración.

35. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)dxdy$

40. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dxdy$

Evalúe la siguiente integral iterada invirtiendo el orden de integración.

45. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+y^4}dydx$

Sección 14.4 : Centro de masa y momentos

En los problemas 1, 5, 10 encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidades indicadas.

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3; \rho(x,y) = xy$

5. $y = x^2, x = 1, y = 0; \rho(x, y) = x + y$

10. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0, y = 0; \rho(x, y) = x^2$

Encuentre el momento de inercia alrededor alrededor del eje y de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas por las siguientes ecuaciones:

15.

$$y = x^2, x = 0, y = 4, \text{ primer cuadrante} \quad ; \quad \rho(x, y) = y.$$

Encuentre el radio de giro alrededor del eje indicado de la lámina que tiene la forma y densidad dadas a continuación

20.

$$x + y = a \quad , \quad a > 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad ; \quad \rho(x, y) = k \text{ constante.}$$

Encuentre el momento de inercia polar I_0 de la lámina que tiene la forma y densidad dadas. El **momento de inercia polar** de una lámina con respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint\limits_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA = I_x + I_y$$

25.

$$x = y^2 + 2 \quad , \quad x = 6 - y^2.$$

Densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir del origen.

Sección 14.5 : Integrales dobles en coordenadas polares

Emplee la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares que se indican

1.

$$r = 3 + 3\sin\theta.$$

En los problemas 5 y 10 Encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas

5. Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta \quad , \quad z = 0 \quad , \quad z = 4$

10. $r = \cos\theta \quad , \quad z = 2 + x^2 + y^2 \quad , \quad z = 0.$

15. Encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad dadas: Fuera de $r = 2$ y dentro de $r = 2 + 2\cos\theta, y = 0$, primer cuadrante; densidad ρ en el punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen.

20. Encuentre el momento de inercia indicado de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas: Fuera de $r = 1$ y dentro $r = 2\sin 2\theta$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2\theta$; I_y.

25. Determine el **momento polar de inercia** $I_0 = \int\int_R r^2 \rho(r, \theta) dA = I_x + I_y$ de la lámina que tiene la forma y la densidad dadas.

$$\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$$

En los problemas 25 y 30, evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares.

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

30. $\displaystyle\int_{-5}^{5} \int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y) dy dx$

35. El tanque de hidrógeno líquido en el transbordador espacial tiene la forma de un cilindro circular recto con una tapa semielipsoidal en cada extremo. El radio de la parte cilíndria del tanque es 4.2 m. Determine el volumen del tanque que se muestra en la Figura 5

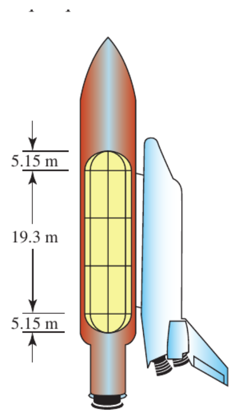


Figura 5: Figura para El problema 35.

Sección 14.7 : La integral triple

En los problemas 1 y 5 evalúe la integral que se indica.

1. $\displaystyle\int_2^4 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x+y+z)dxdydz.$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{y^2} \int_0^y \cos\left(\frac{x}{y}\right) dzdxdy.$

En los problemas 15,20 dibuje la región D cuyo volumen V está dado por la integral iterada.

15. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} dxdzdy.$

20. $\displaystyle\int_1^3 \int_0^{1/x} \int_0^3 dydzdx.$

25. Encuentre el centro de masa del sólido dado en la figura 6 si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distance desde el plano xy.

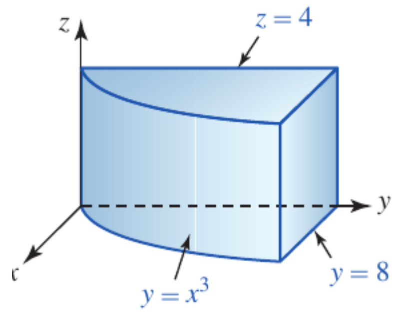


Figura 6: Figura para El problema 25.

30. Plantee, pero no evalúe, las integrales iteradas que producen la masa m del sólido que tiene la forma y densidad

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad , \quad z = -1 \quad , \quad z = 2 \quad ; \quad \rho(x, y, z) = z^2.$$

[*Sugerencia:* No use $dzdydz$].

35. Plantee, pero no evalúe, la integral iterada que produce el momento de inercia indicado del sólido que tiene la forma y densidad dados por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad z = 5.$$

La densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distance desde el origne; I_z.

Sección 14.8 : Integrales triples en otros tipos de coordenadas

En lor problemas 1 y 5, conveirta el punto dado de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

1. $(10, 3\pi/4, 5)$

5. $(5, \pi/2, 1)$

10. Convierta $(1, 2, 7)$ de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

15. Convierta la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a coordenadas cilíndricas.

20. Convierta la ecuación $\theta = \pi/6$ a coordenadas rectangulares.

25. Emplee una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar el centroide del sólido homogéneo acotado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$..

30. Convierta $(5, 5\pi/4, 2\pi/3)$ de coordenadas esféricas a

    a) coordenadas rectangulares y

    b) coordenadas cilíndricas.

En los problemas 35 y 40, convierta los puntos dados de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

35. $(-5, -5, 0)$

40. $(1, 1, -\sqrt{6})$

45. convierta $r = 10$ a coordenadas rectangulares.

50. Emplee la integral triple y coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad , \quad y = x \quad , \quad y = \sqrt{3}x \quad , \quad z = 0,$$

    en el primer octante.

55. Emplee una integral triple y coordenadas esféricas para encontrar la masa del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 4$, donde la densidad de un punto P es inversamente proporcional a la distancia desde el origen [*Sugerencia:* Exprese el límite ϕ superior de integración como el coseno inverso.]

Sección 14.9 : Cambio de variables en integrales múltiples

1. Considere una transformación T definida por $x = 4u - v$, $y = 5u + 4v$. Encuentre las imágenes de los puntos $(0,0)$, $(0,2)$, $(4,0)$, $(4,2)$ en el plano uv bajo T.

5. Encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación

$$S : 0 \leq u \leq 1 \quad , \quad 0 \leq v \leq 2 \quad ; \quad x = u^2 - v^2 \quad , \quad y = uv$$

10. Determine el jacobiano J de la transformación T del plano uv al plano xy donde

$$u = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad , \quad v = \frac{-2y}{x^2 + y^2}$$

En los problemas 15 y 20, evalúe la integral dada por medio de los cambios de variable que se indican

15. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x} dA$ donde R es la región acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = y^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$; $u = x^2/y$, $v = y^2/x$.

20. $\displaystyle\iint_R y dA$ donde R es la región triangular con vértices $(0,0)$, $(2,3)$ y $(-4,1)$; $x = 2u - 4v$, $y = 3u + v$.

25. Evalúe la siguiente integral doble por medio de un cambio de variables apropiado

$$\iint_R (6x + 3y) dA,$$

donde R es la región trapezoidal en el primer cuadrante con vértices $(1,0)$, $(4,0)$, $(2,4)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

Aplicaciones:

30. Un problema en termodinámica consiste en determinar el trabajo realizado por una máquina de Carnot. Este trabajo se define como el área de la región R en el primer cuadrante acotado por las isotermas $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$ y las adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, $0 < c < d$. Emplee $A = \int\int_R dA$ y una substitución apropiada para calcular el área que se muestra en la Figura 7

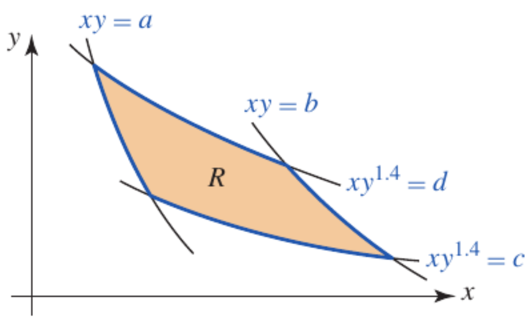


Figura 7: Figura para El problema 30.

Sección 12.2 : Cálculo de funciones vectoriales

1. Evalúe el límite

$$\lim_{t\to 2}(t^3, t^4, t^5)$$

o enuncie que éste no existe.

5. Asuma que

$$\lim_{t\to a} \boldsymbol{r}_1(t) = t \to a(1, -2, 1) \quad , \quad \lim_{t\to a} \boldsymbol{r}_2(t) = (2, 5, 7)$$

encuentre el límite, dado que

$$\lim_{t \to a} [-4\boldsymbol{r}_1(t) + 3\boldsymbol{r}_2(t)]$$

10. Encuentre los dos vectores indicados para la función vectorial.

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{1+5t}(1, 3t^2 + t, (1-t)^3) \quad , \quad \boldsymbol{r}'(0) \quad , \quad \frac{\boldsymbol{r}(0.05) - \boldsymbol{r}(0)}{0.05}.$$

En los problemas 25 y 30, determine la derivada indicada. Suponga que todas las funciones vectoriales son diferenciables.

25. $\dfrac{d}{dt}[\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{r}'(t)]$

30. $\dfrac{d}{dt}[t^2 \boldsymbol{r}(t^2)]$.

35. Encuentre la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ que satisfaga las condiciones

$$\boldsymbol{r}'(t) = (6, 6t, 3t^2) \quad , \quad \boldsymbol{r}(0) = (1, -2, 1).$$

40. Encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial dada en el itnervalo que se indica:

$$\boldsymbol{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

45. Emplee la ecuación

$$s(t) = \int_a^t \|\boldsymbol{r}'(u)\| du$$

y la integración de $u = 0$ a $u = t$ para determinar una parametrización de longitud de arco $\boldsymbol{r}(s)$ para la curva dada. Verifique que $\boldsymbol{r}'(s)$ es un vector unitario en la función vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = (1 + 2t, 5 - 3t, 2 + 4t)$$

Sección 12.3 : Movimiento sobre una curva

En los problemas 1 y 5, $\boldsymbol{r}(t)$ es el vector posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo indicado. Encuentre la rapidez en ese tiempo.

1. $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2, \frac{1}{4}t^4\right) \quad , \quad t = 1$

5. $\boldsymbol{r}(t) = (2, (t-1)^2, t) \quad , \quad t = 2$

10. Suponga que una partícula se mueve en el espacio de manera que $\boldsymbol{a}(t) = \mathbf{0}$ para todo el tiempo t. Describa su trayectoria.

15. Un mariscal de campo de futbol americano lanza una "bomba" de 100 yardas a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿ Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto de lanzamiento?

Aplicaciones

20. Para dar abasto a las víctimas de un desastre natural, se dejan caer simplemente equipo sólido y resistente así como paquetes de suministros de alimentos/medicinas desde aviones que vuelan horizontalmente a baja rapidez y altura. Un avión de suministros viaja horizontalmente sobre un blanco a una altura de 1024 pies y una rapidez constange de 180 mi/h. Halle la distancia horizontal que recorre un paquete de suministros con relación al punto desde el cual se dejó caer. ¿ A qué ángulo de la línea visual α debe soltarse el paquete de suministro para que dé en el blanco indicado en la Figura 8

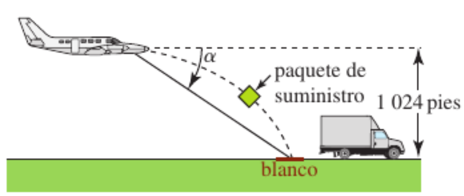


Figura 8: Figura para El problema 20.

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio de un **campo de velocidades** $\mathbf{v}$=(v_1, v_2, v_3), donde las componentes v_1, v_2, v_3 son funciones de x, y,z y el tiempo t. Si la velocidad de la partícula es $\boldsymbol{v}(t) = (6t^2x, -4ty^2, 2t(z+1))$, determine $\boldsymbol{r}$. [*Sugerencia* : Emplee separación de variables.]

Sección 12.4 : Curvatura y aceleración

1. Encuentre el vector tangente unitario $\boldsymbol{T}$ para la función

$$\boldsymbol{r}(t) = [t\cos t - \sin t, t\sin t + \cos t, t^2) \quad , \quad t > 0.$$

5. Encuentre la ecuación de los planos

   a) osculante

   b) normal

   c) rectificación

   para la función $(-2\sin t, 2\cos t, 3)$ con $t = \pi/4$.

10. $\boldsymbol{r}(t)$ es el vector posición de una partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la acelaración en el tiempo t para la función

$$\boldsymbol{r}(t) = (t^2, t^2 - 1, 2t^2).$$

En los problemas 10 y 15, $\boldsymbol{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t.

10. $\boldsymbol{r}(t) = (t^2, -t^3, t^4)$

15. $\boldsymbol{r}(t) = \mathrm{e}^{-t}(1,1,1)$

20. Encuentre la curvatura de la curvatura de la cicloide que se describe mediante

$$\boldsymbol{r}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)] \quad , \quad a > 0 \text{ en } t = \pi$$

25. Dibuje la gráfica de la curvatura $y = \kappa(x)$ para la parábola $y = x^2$; $(0,0)$, $(1,1)$. Determine el comportamiento de $y = \kappa(x)$ cuanto $x \to \pm\infty$. En otras palabras, describa este comportamiento en términos geométricos.

Sección 15.1 : Integrales de línea

1. Evalúe $\int_C f(x,y)dx$ con

$$f(x,y) = 2xy.$$

5. Evalúe $\int_C (x^2 - y^2)ds$, donde C está dada por $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

10. Evalúe $\int_C (2x + y)dx + xydy$, sobre la curva $y = x^2 + 1$ entre $(-1,2)$ y $(2,5)$.

15. Evalúe $\int_C ydx + xdy$ donde C consiste en los segmentos de recta $(0,0)$ a $(0,1)$ y $(0,1)$ a $(1,1)$.

20. Evalúe $\int_C 4xdx + 2ydy$ donde C está dada por $x = y^3 + 1$ de $(0,-1)$ a $(9,2)$.

25. Evalúe $\int_{-C} ydx + xdy$, donde C está dada por $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

30. Evalúe $\int_C ydx + zdy + xdz$, sobre las trayectoria de segmentos rectilíneos $(0,0,0)$ a $(6,8,0)$, $(6,8,0)$ a $(6,8,5)$.

Aplicaciones:

30. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (mas por longitud unitaria), entonces $m = \int_C \rho(x, y)ds$ es la masa del alambre. Calcule la mas de un alambre que tiene la forma del semicírculo $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distance desde el eje y.

Sección 15.2 : Integrales de línea de campos vectoriales

En los problemas 1 y 5 grafique algunos vectores representativos en el campo vectorial

1.

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (x, y).$$

5.

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (0, y).$$

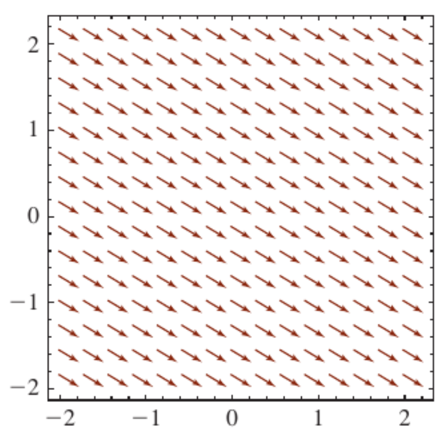


FIGURA 15.2.15 Campo vectorial del problema 10

Figura 9: Figura para El problema 10.

10. Asocie la Figura 9 con uno de los campos:

a) $\boldsymbol{F}(x,y) = (-3,2)$.

b) $\boldsymbol{F}(x,y) = (3,2)$.

c) $\boldsymbol{F}(x,y) = (3,2)$.

d) $\boldsymbol{F}(x,y) = (-3,-2)$.

En los problemas 15 y 20 evalúe la integral de línea $\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$

15. $\boldsymbol{F}(x,y) = (y^3, -x^3y)$ con $\boldsymbol{r}(t) = (\mathrm{e}^{-2t}, \mathrm{e}^t)$ y $0 \leq t \leq \ln 2$.

20. $\boldsymbol{F}(x,y) = (\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^{xy}, 3t)$ con $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ y $0 \leq t \leq 1$.

25. Calcule el trabajo realizado por una fuerza constante $\boldsymbol{F}(x,y) = (a,b)$ que actúa una vez en el sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

30. Suponga que una curva suave C es descrita por la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ para $a \leq t \leq b$. Sean la aceleración, la velocidad y la rapidez dadas por $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt, \boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ y $v = \|v\|$, respectivamente. Empleando la segunda ley de Newton $F = m\boldsymbol{a}$, demuestre ue, en la ausencia de fricción, el trabajo realizado por $\boldsymbol{F}$ al mover una partícula de masa constante m desde el punto A en $t = a$ hasta el punto B en $t = b$ es el mismo que el cambio de energiía cinética:

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a).$$

(*Sugerencia:* considere $\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$.)

35. Encuentre el campo gradiente de $f(x,y,z) = y + z - x\mathrm{e}^{-y^2}$.

40. Asocie el campo vectorial conservativo $\boldsymbol{f}(x,y) = (x, y^2)$ con una de las funciones potenciales

a) $\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - 5$

b) $\phi(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$

c) $\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 4$

d) $\phi(x,y) = 2x + \frac{y^2}{2} + 1$

Sección 15.3 : Independencia de la trayectoria

En los problemas 1, 5 y 10, demuestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe de dos maneras:

(a) encuentre una función potencial ϕ, y

(b) integre a lo largo de cualquier trayectoria conveniente entre los puntos.

1. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2dx + y^2dy.$

5. $\displaystyle\int_{(4,1)}^{(4,4)} \frac{-ydx + xdy}{y^2}$ en cualquier trayectoria que no cruce el eje x.

10. $\displaystyle\int_{(-2,0)}^{(1,0)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F} = (2x - y\sin xy - 5y^4, -(20xy^3 + x\sin xy))$.

15. Determine si el campo vectorial dado es un campo conservativo Si es así, encuentre la función potencial ϕ para $\boldsymbol{F}$.

20. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}(x, y) = (2x + \mathrm{e}^{-y}, 4y - x\mathrm{e}^{-y})$ a lo largo de la elipse $x^4/4 + y^2/9 = 1$ con $y \geq 0$ entre los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

25. Muestre que la integral

$$\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \quad , \quad \boldsymbol{F} = (\mathrm{e}^{2z}, 3y^2, 2x\mathrm{e}^{2z})$$

es independiente de la trayectoria y evalúela.

30. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (8xy^3z, 12x^2y^2z, 4x^2y^3)$ que actúa a lo largo de la hélice $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ de $(2, 0, 0)$ a $(1, \sqrt{3}, \pi/3)$. De $(2, 0, 0)$ a $(0, 2, \pi/2)$ [*Sugerencia* : Demuestre que $\boldsymbol{F}$ es conservativo.]

Sección 15.4. Teorema de Green

1. Verifique el teorema de Green evaluando ambias integrales:

$$\oint_C (x-y)dx + xydy = \int\int_R (y+1)dA$$

   donde C es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,3)$.

En los problemas 5 y 10 emplee el teorema de Green para evaluar la Integral de línea dada.

5. $\oint_C 2ydx + 5xdy$, donde C es el círculo $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

10. $\oint_C \mathrm{e}^{x^2} dx + 2\tan^{-1} xdy$, donde C es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$.

15. Evalúe la integral dada sobre cualquier curva cerrada simple suave por partes C.

$$\oint_C aydx + bxdy.$$

En los problemas 17 y 18, sea R la región acotada por una cuarva cerrada simple suave por partes C. Demuestre el resultado que se indica

17. $\displaystyle\oint_C xdy = -\oint_C ydx =$ área de R.

18. $\frac{1}{2}\displaystyle\oint_C -ydy + xdy =$ área de R.

20. Emplee los resultados de los problemas 17 y 18 para determinar el área de la región acotada por la elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

25. Evalúe la integral

$$\oint_C \frac{-y^3dx + xy^2dy}{(x^2+y^2)^2},$$

   donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

30. Emplee el teorema de Green para evaluar el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}$ dada alrededor de la curva cerrada en la Figura 10

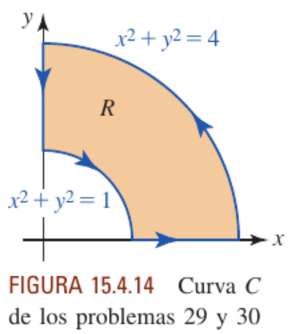


Figura 10: Figura para El problema 30.

Sección 15.5. Superficies paramétricas y áreas

1. Encuentre una ecuación paramétrica del plano $4x + 3y - z = 2$.

5. Encuentre una función de valores vectoriales $\boldsymbol{r}(u, v)$ para el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, $-2 \leq x \leq x$ y $-8 \leq z \leq 1$.

10. Identifique la superficie dada eliminando los parámetros.

$$\boldsymbol{r}(\phi, \theta) = (2 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \operatorname{sen} \theta, 4 \cos \phi).$$

En los problemas 15 y 20 encuentre una ecuación del plano tangente en el punto sobre la superficie que corresponde a los valores del parámetro dado.

15. $x = 10 \sin u, y = 10 \cos z, z = v, u = \pi/6, v = 2$.

20. $\boldsymbol{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, u)$, $u = 1, v = \pi/4$.

En los problemas 25 y 30, encuentre el área de la superficie dada.

25. La porción del plano $\boldsymbol{r} = (2u - v, u + v + 1, u)$ para $0 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$.

30. La esfera $x = a \sin \phi \cos \phi, y = a \sin \phi \sin \theta, z = a \cos \phi$ para $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Sección 15.6. Integrales de superficie

En los problemas 1,5 y 10 evalúe $\int\int_S f(x, y, z)dS$.

1. $f(x, y, z) = x$; S es la porción de cilindro $z = 2 - x^2$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

5. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el primer octante

10. $f(x, y, z) = (1 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}$; S es la porción del paraboloide de $x = 4 - y^2 - z^2$ en el primer octante fuera del cilindro $y^2 + z^2 = 1$.

En los problemas 15 y 20, sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial. Encuentre el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie dada. Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba.

15. $\boldsymbol{F} = (x, 2z, y)$; S la porción del cilindro $y^2+z^2 = 4$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$.

20. $\boldsymbol{F} = (\mathrm{e}^y, \mathrm{e}^x, 18y)$; S es la porción del plano $x + y + z = 6$ en el primer octante.

Aplicaciones:

25. La ley de Coulomb establece que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ debido a una carga puntual q en el origen está dado por $\boldsymbol{E} = kq\boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|^2$, donde k es una constante y $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Determine el flujo fuera de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Sección 15.7. Rotacional y Divergencia

En los problemas 1,5,10, determine el rotacional y la divergencia del campo vectorial dado.

1. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, yz, xy)$

5. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3x^2y, 2xz^3, y^4)$

10. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 \sin yz, z \cos xz^3, y\mathrm{e}^{5xy})$

15. Considere que $\boldsymbol{a}$ es un vector constante y $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Verifique

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 0.$$

20. Verifique $\nabla \times (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla \times \boldsymbol{G}$.

25. Verifique $\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \nabla \times \boldsymbol{G}$.

Sección 15.8. Teorema de Stokes

1. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\boldsymbol{F} = (5y, -5x, 3)$ donde S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

En los problemas 5 y 10 emplee el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Suponga que C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

5. $\boldsymbol{F} = (2z+x, y-z, x+y)$; C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

10. $\boldsymbol{F} = (x^2y, x + y^2, xy^2z)$; C C es la frontera de la superficie que se muestra en la Figura 11.

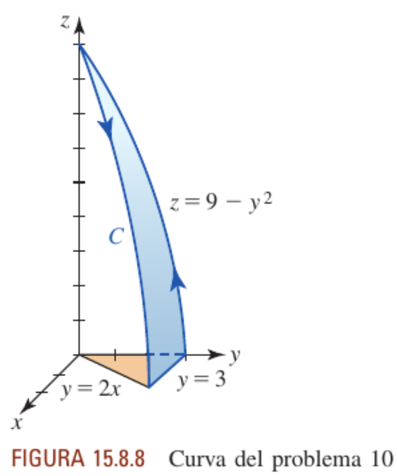


Figura 11: Figura para El problema 30.

15. Emplee el teorema de Stokes para evaluar $\int\int_S \nabla \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$. Suponga que la superficie S está orientada hacia arriba.

$$\boldsymbol{F} = (3x^2, 8x^3y, 3x^2y)$$

S es la porción de l plano $z = x$ que yace dentro del cilindro rectangular definido por los planos $x = 0, y = 0, x = 2, y = 2$.

Sección 15.9. Teorema de la Divergencia

1. Verifique el teorema de la divergencia para $\boldsymbol{F} = (xy, yz, xz)$; D la región acotada por el cubo unitario definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

En los problemas 5 y 10, emplee el teorema de la divergencia para determinar el flujo hacia afuera del campo $\int\int_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS$ del campo vectorial dado $\boldsymbol{F}$.

1. $\boldsymbol{F} = (y^2, xz^3, z - 1)$; D la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 1$, $z = 5$.

10. $\boldsymbol{F} = (2yz, x^3, xy^2)$; D la región acotada por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

15. Si $\boldsymbol{a}$ es un vector constante, demuestre que $\int\int_S \nabla \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$.