Matemática

Potências

Professor Dudan

POTÊNCIAS

A potenciação indica multiplicações de fatores iguais.

Por exemplo, o produto 3 . 3 . 3 . 3 pode ser indicado na forma 3^4. Assim, o símbolo $\mathbf{a^n}$, sendo **a** um número inteiro e **n** um número natural, n > 1, significa o produto de **n** fatores iguais a **a**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

Exemplo:

$\mathbf{2^6 = 64}$, onde,

2 = base
6 = expoente
64 = potência

Exemplos:

a) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot = 625$
- 5 é a base;
- 4 é o expoente;
- 625 é a potência

b) $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$
- – 6 é a base;
- 2 é o expoente;
- 36 é a potência

c) $(-2)^3 = (-2) . (-2) . (-2) = -8$
- – 2 é a base;
- 3 é o expoente;
- – 8 é a potência

d) $10^1 = 10$
- 10 é a base;
- 1 é o expoente;
- 10 é a potência

Casos especiais:

$a^1 = a$ $1^n = 1$ $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

Exemplo: Calcule as potências.

a) $5^2 =$ b) $-5^2 =$ c) $(-5)^2 =$

d) $-5^3 =$ e) $(-5)^3 =$ f) $-1^8 =$

g) $-(-5)^3 =$ h) $(\sqrt{3})^0 =$ i) $-10^0 =$

j) $-3^3 =$ k) $(-3)^3 =$ l) $-3^2=$

m) $(-3)^2 =$ n) $(-3)^0 =$ o) $-3^0 =$

Potências "famosas"

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	
$2^6 = 64$		
$2^7 = 128$		
$2^8 = 256$		
$2^9 = 512$		
$2^{10} = 1024$		

Potências de base "dez"

"n" inteiro e positivo

$$10^n = \underbrace{10000...0}_{\text{"n" zeros}}$$

"n" inteiro e positivo

$$10^n = \underbrace{0{,}0000...001}_{\text{"n" algarismos}}$$

Exemplos:

a) $10^4 = 10000$

b) $10^6 = 1000000$

c) $10^3 = 1000$

d) $10^{-5} = 0{,}00001$

e) $10^{-2} = 0{,}01$

f) $10^{-1} = 0{,}1$

Exemplo**:** Analise as sentenças abaixo e assinale a alternativa que completa os parênteses corretamente e na ordem correta.

( ) $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 4^5$
( ) $3^{20} + 3^{20} + 3^{20} = 9^{20}$
( ) $2^7 + 2^7 = 2^8$
( ) $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 5^{15}$

a) V – F – F – F
b) V – V – V – V
c) F – V – F – V
d) V – F – V – F
e) F – V – V – F

Exemplo: Qual o dobro de 2^{30}?

a) 4^{30}

b) 2^{60}

c) 4^{60}

d) 2^{31}

e) 4^{31}

Exemplo: Qual a metade de 2^{100}?

a) 2^{50}

b) 2^{99}

c) 1^{100}

d) 1^{50}

e) 2^{25}

Propriedades de potências

Produto de potências de mesma base

Na multiplicação de potências de **bases iguais**, conserva-se a base e **somam-se** os **expoentes**.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Exemplos:

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

b) $5^4 \cdot 5 = 5^{4+1} = 5^5$

c) $2^x \cdot 2^6 = 2^{x+6}$

d) $2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{4+(-3)} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

e) $3^7 \cdot 3^{-7} = 3^{7+(-7)} = 3^{7-7} = 3^0 = 1$

f) $x^n \cdot x^{-n} = x^{n+(-n)} = x^{n-n} = x^0 = 1$

g) $8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{3+x}$

h) $2^x \cdot 2^x = 2^{x+x} = 2^{2x}$

Observação: A propriedade aplica-se no sentido contrário também

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Exemplo:

a) $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 2^x \cdot 4 = 4 \cdot 2^x$

b) $3^{2x} = 3^{x+x} = 3^x \cdot 3^x = (3^x)^2$

c) $5^{m+x} = 5^m \cdot 5^x$

d) $4^{2+n} = 4^2 \cdot 4^n = 16 \cdot 4^n$

Observação: Somente podemos aplicar essa propriedade quando as **bases** são **iguais**.

$2^5 \cdot 3^2 \neq 6^{5+2}$ (não há propriedade para esses casos)

Não é possível multiplicar as bases quando houver expoente (não há propriedade para esses casos)

Exemplos:

a) $2 \cdot 6^x \neq 12^x$

b) $3^2 \cdot 3^x = 3^{2+x}$

Divisão de potências de mesma base

Na divisão de potências de **bases iguais**, conserva-se a base e **subtraem-se** os **expoentes**.

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

OU

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Exemplos:

a) $7^{10} \div 7^8 = 7^{10-8} = 7^2 = 49$

b) $3^2 \div 3^{-5} = 3^{2-(-5)} = 3^{2+5} = 3^7$

c) $10^{2x} \div 10^x = 10^{2x-x} = 10^x$

d) $2^0 \div 2^5 = 2^{0-5} = 2^{-5}$

e) $\frac{10^{3x}}{10^x} = 10^{3x-x} = 10^{2x}$

f) $13^x \div 13^{x+2} = 13^{x-(x+2)} = 13^{x-x-2} = 13^{-2}$

g) $5^3 \div 5^3 = 5^{3-3} = 5^0 = 1$

h) $4^3 \div 4^8 = 4^{3-8} = 4^{-5}$

i) $11^{-5} \div 11^3 = 11^{-5-3} = 11^{-8}$

j) $\frac{x^{5n}}{x^{10n}} = x^{5n-10n} = x^{-5n}$

A propriedade aplica-se no sentido contrário também.

$$a^{m-n} = a^m \div a^n$$

Exemplos:

a) $2^{x-2} = 2^x \div 2^2 = 2^x \div 4 = 2^x/4$

b) $5^{m-x} = 5^m \div 5^x = 5^m/5^x$

c) $4^{2-n} = 4^2 \div 4^n = 16 + 4^n = 16/4^n$

Potência de potência

Quando uma potência está elevada a algum expoente, conserva-se a **base** e multiplica-se o **expoente**.

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Exemplos:

a) $(2^2)^3 = 2^{2\,.\,3} = 2^6 = 128$

b) $(3^{3x})^2 = 3^{6x}$

c) $(5^{4+x})^3 = 5^{12+3x}$

d) $(7^7)^0 = 7^{7\,.\,0} = 7^0 = 1$

e) $(2^{-3})^2 = 2^{(-3)\,.\,2} = 2^{-6}$

Cuidado!

$$(a^m)^n \neq a^{m^n}$$

Exemplo:

$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$ $\rightarrow$ $2^6 \neq 2^9$ $\rightarrow$ $128 \neq 512$

Potência de mesmo expoente

O produto de dois números quaisquer **a** e **b**, ambos elevados a um expoente **n**, conserva-se o **expoente** e multiplicam-se as **bases.**

$$a^n \,.\, b^n = (a \,.\, b)^n$$

Exemplos:

a) $(3 \cdot 2)^3 = 3^3 \cdot 2^3 = 27 \cdot 8 = 216$

b) $(5x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2$

c) $(-2ab)^4 = (-2)^4 \cdot a^4 \cdot b^4 = 16\, a^4 \cdot b^4$

d) $(x^2y^3)^4 = (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 = x^8 \cdot y^{12}$

e) $5^7 \cdot 2^7 = (5 \cdot 2)^7 = 10^7$

f) $(4 \cdot a^3 \cdot b^5)^2 = 4^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^5)^2 = 16 \cdot a^6 \cdot b^{10}$

<u>**Exemplo:**</u> A soma dos algarismos do produto $4^{21} \cdot 5^{40}$ é:

Divisão de mesmo expoente

A divisão de dois números quaisquer **a** e **b**, ambos elevados a um expoente **n**, conserva-se os **expoentes** e dividem-se as **bases**. ($b \neq 0$)

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

b) $\frac{5^7}{5^7} = \left(\frac{5}{5}\right)^7 = 1^7 = 1$

c) $\left(\frac{2x^4z^2}{3y^3}\right)^3 = \frac{2^3\left(x^4\right)^3\left(z^2\right)^3}{3^3\left(y^3\right)^3} = \frac{8x^{12}z^6}{27y^9}$

d) $\frac{8^8}{2^8} = \left(\frac{8}{2}\right)^8 = 4^8$

e) $\frac{9^{2x}}{3^{2x}} = \left(\frac{9}{3}\right)^{2x} = 3^{2x}$

Potência de expoente negativo

O expoente negativo indica que se deve trabalhar com o **inverso multiplicativo** dessa base.

Expoente – 1

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

Expoente qualquer

$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ ou $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exemplos:

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

b) $x^{-2} = {\frac{1}{x}}^{2} = \frac{1}{x^2}$

c) $2^{-3} = {\frac{1}{2}}^{3} = \frac{1}{8}$

d) $y^{-1} = \frac{1}{y}$

Casos especiais:

$${\frac{a}{b}}^{-n} = {\frac{b}{a}}^{n} \qquad {\frac{a}{b}}^{-1} = \frac{b}{a}$$

Exemplos:

a) ${\frac{2}{3}}^{-1} = \frac{3}{2}$

b) ${\frac{5}{3}}^{-2} = {\frac{3}{5}}^{2} = \frac{9}{25}$

c) ${\frac{1}{2}}^{-4} = {\frac{2}{1}}^{4} = 2^4 = 16$

d) ${-\frac{3}{x}}^{-2} = {-\frac{x}{3}}^{2} = \frac{x^2}{9}$

Regras importantes

Base NEGATIVA elevada a expoente ÍMPAR resulta em NEGATIVO

Exemplo:

a) $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
c) $(-5)^1 = -5$

Base NEGATIVA elevada a expoente PAR resulta em POSITIVO

Exemplo:

a) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
b) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = +49$
c) $(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$

Caso especial para BASE = – 1

Exponente PAR

$(-1)^0 = \mathbf{+1}$
$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = \mathbf{+1}$
$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{+1}$
$(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{+1}$
.
.
.
$(-1)^{PAR} = +1$

Exponente ÍMPAR

$(-1)^1 = \mathbf{-1}$
$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{-1}$
$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{-1}$
$(-1)^7 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = \mathbf{-1}$
.
.
.
$(-1)^{ÍMPAR} = -1$

Exemplos:

a) $(-1)^{481} = -1$
b) $(-1)^{1500} = +1$
c) $(-1)^{123} \cdot (-1)^{321} = (-1)^{123+321} = (-1)^{444} = +1$
d) $(-1)^{2n} = +1$ pois "2n" é um número par
e) $(-1)^{6n-1} = -1$ pois "6n – 1" é um número ímpar

Exemplos: Calcule as potências:

a) $8^3 . 16^5 =$

b) $7^7 \div 7^{-4} =$

c) $5^{-3} =$

d) $(3^3)^5 =$

e) $(-5)^0 =$

f) $-5^0 =$

g) ${-\frac{3}{4}}^{2} =$

h) ${-\frac{3}{4}}^{-3} =$

i) ${-\frac{1}{2}}^{-4} =$

j) $0{,}25^{-3} =$

k) ${\frac{7}{4}}^{-1} =$

l) $\pi^0 =$

m) $10^5 =$

n) $10^{-3} =$

o) $(0{,}001)^3 =$

p) $(0{,}001)^{-3} =$

q) $4^{10} \div 2 =$

r) $1000^3 =$

Exemplo: Relacione a coluna da esquerda com a coluna da direita.

( ) 0^5	
( ) 5^0	a) 1
( ) $(-1)^7$	b) – 1
( ) $(-1)^{10}$	c) 0
( ) 1^0	

A alternativa que completa corretamente os parênteses, de cima para baixo é:

a) a – b – c – b – a
b) c – a – b – a – a
c) c – b – b – b – a
d) c – b – a – b – c
e) a – a – a – a – c