Mathematikvorlesung am 17.11.2010

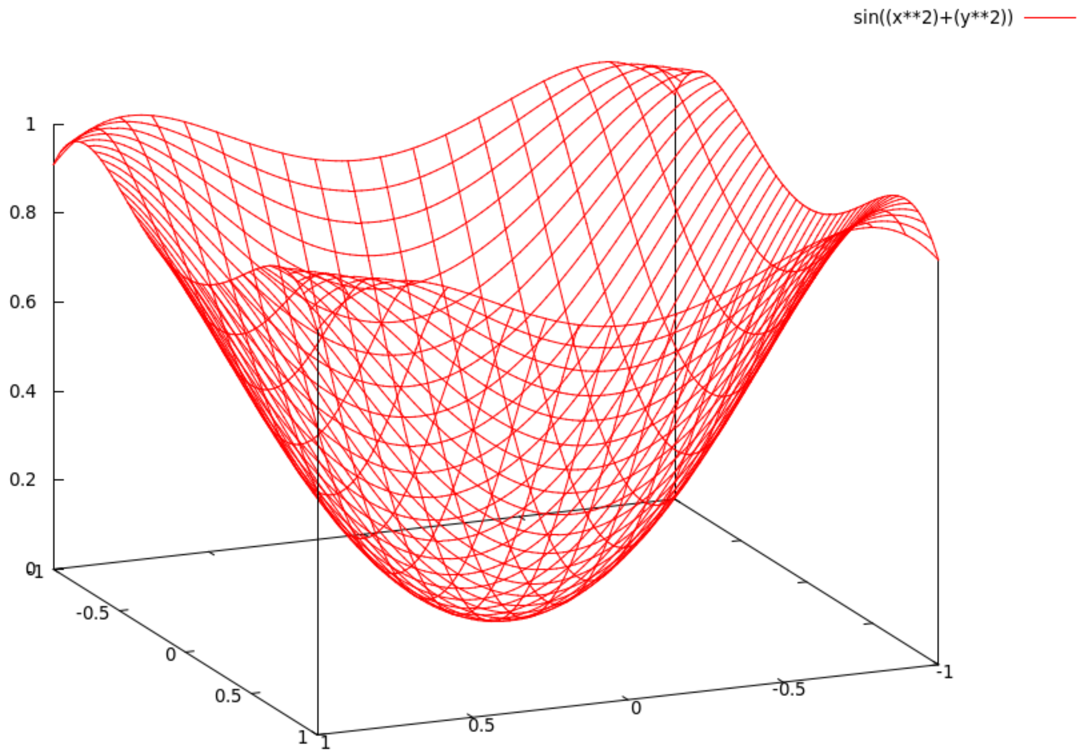
bfw110

18. November 2010

1 Warm-Up-Übung

1.1 Funktionsskizze

Skizziere die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := sin\left(x^2 + y^2\right)$ über den Bereich $[-1, +1] \times [-1, +1]$.



Eigenschaften Folgende Eigenschaften weist der obige Graph auf:

- x-Achse: Achsen-Symmetrie
- y-Achse: Achsen-Symmetrie
- Rotationssymmetrie – Die Funktion hängt nur vom Abstand von (x, y) von $(0, 0)$ ab.

1.2 Eindimensionale Projektionen

Bestimme für die nachfolgenden Funktionen jeweils die beiden Projektionen für die Werte $x_0 := 0$ sowie $y_0 := 1$.

a) $f(x, y) := x^2 * y^2 + 2x * y^3 + y$
   $f(0, y) := y$
   $f(x, 1) := x^2 + 2x + 1$

b) $f(x, y) := \frac{x}{y}$
   $f(0, y) := 0$
   $f(x, 1) := x$

c) $f(x, y) := (x + y)^2$
   $f(0, y) := y^2$
   $f(x, 1) := x^2 + 2x + 1$

2 Höherdimensionale Differentialrechnung

2.1 Allgemein

- m-anzahlige Inputgrößen — etwas n-dimensionales erreichen
- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — $m, n \in \mathbb{N}$
- Beispiel: $m_{Rohstoffe} \to n_{Artikel}$

2.2 Speziell

Wir betrachten nur eine Dimension. Eine komplexe Funktion wird aus mehreren einfachen zusammengebaut.

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

Noch spezieller

$$m = 2$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Definition

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
dann heißt $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$f_i(x) := f(\dots, (x - 1), x, (x + 1), \dots)$$

die i. Position von f.

- Das obige x steht an der i. Position.
- Zu festen Werten von x_j $(j = i)$
- Eine Dimension "läuft frei herum", während die anderen (Index j) fest sind.

Beispiele

- $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x * 3$
- $\to f_1(x, 5, 6) := x + 30$
- $\to f_2(4, x, 7) := 4 + 7x$

2.3 Niveaumenge – Niveaulinie

Definition

Zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ heißt

$$N_c := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid\mid f(x_1, x_2, \dots, x_m) = c\}$$

Niveaumenge von f zum Niveau c.

Beispiel Höhenlinien bei einer Landkarte
Auf Landkarten mit Topographischen Informationen geben Linien in festgelegten Abständen Höhen der jeweiligen Geländelage an.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ "Höhe über N.N."
- $N_{200} \triangleq$ *Höhenlinie zur Höhe* $200m$ *über N.N.*

2.4 Maximum, lokal

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
Dann hat f in $(x_1 \xrightarrow{bis} x_m)$ ein lokales Maximum, falls gilt:
Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $(y_1 \xrightarrow{bis} y_m)$ mit der Eigenschaft

$$|y_1 - x_1| < \delta \ , \ |y_2 - x_2| < \delta, \ \dots \ , \ |y_m - x_m| < \delta$$

gilt:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Man beachte das "≥". Hier wurde kein ">" verwendet, da es den Sonderfall der konstanten Funktion gibt. In unserem Fall würde dies eine flache Ebene beschreiben, die überall das Maximum aufweist.

2.5 Ausblick

Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ wird definiert über sogenannte *partielle Ableitungen* – also klassische Ableitungen der Projektionen.

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

"Partielle Ableitung von f nach x_m"