Statistik 2

bfw110

10. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Begriffe

1.1. Definitionen

Das Zufallsexperiment
Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ergebnis nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann.

Beispiele für Zufallsexperimente

Zufallsexperiment	Anzahl der möglichen Ergebnisse
Würfelwurf	6 (Seitenanzahl eines Hexaeder)
Ziehung der Lottozahlen 6 aus 49	$>$ 14.000.000
Roulette	37/38
Münze werfen	2 (Kopf oder Zahl)
Karte aus Skatspiel ziehen	32 (Kartenanzahl)
Stichprobe ziehen	2 (brauchbar/defekt)

Ereignisraum
Die Menge Ω der möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man Grundmenge, Ereignisraum oder auch: Menge der Elementarereignisse

z.B.: Roulette: $\Omega = \{00, 0, 1, 2, 3, \ldots, 36\}$

Ereignis
Ein (zufälliges) Ereignis ist eine Teilmenge A des Ereignisraums Ω eines Zufallexperiments

Sicheres Ereignis
Die Durchführung eines Zufallsexperiments liefert nur Ergebnisse, die in Ω enthalten sind. Daher tritt Ω mit Sicherheit ein.

A ist ein sicheres Ereignis $A = \Omega$ Ein Ereignis ist genau dann sicher, wenn es mit Ω übereinstimmt.

Unmögliches Ereignis
Die Menge, die keine Ereignisse enthält (leere Menge), wird als unmögliches Ereignis bezeichnet:

- A ist ein unmögliches Ereignis.
- $A \cap \Omega = \emptyset$

Teilergebnis

- A ist ein Teilereignis von B
- $A \subset B$

komplementäres Ereignis

- $\bar{A}$ ist das zu A komplementäre Ereignis
- $\bar{A} = \Omega - A$

1.2. Beispiel Würfelwurf

- Ereignisraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Sicheres Ereignis
  - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Eine Augenzahl von 1 bis 6 tritt mit Sicherheit ein.
- Unmögliches Ereignis
  - $A = \{7\}$
  - Dies ist ist ein unmögliches Ereignis, da nie 7 Augen mit einem Würfel gewürfelt werden können.
- Teilereignis
  - $B = \{2, 4, 6\}$
  - $A = \{2, 4\}$
  - $A \subset B$
- Komplementäres Ereignis
  - $A = 2, 4, 6$
  - $B = 1, 3, 5$
  - $B = \bar{A}$
  - B ist das komplementäre Ereignis zu A

2. Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Grundlegende Annahmen

- Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich. Das heißt, es hat die selbe Chance des Eintreffens.
- Wir spielen grundsätzlich fair. Die Würfel sind nicht gezinkt o.Ä.

Definition "Wahrscheinlichkeit"

- vgl.: klassische Wahrscheinlichkeit, Laplace 1812
- Berechenbarmachung von Zufall bzw. Sicherheit.
- Die Wahrscheinlichkeit w für das Eintreten des Ereignisses A ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl g der der für das Ereignis günstigen und der Anzahl m der möglichen Fälle.

$$w(A) = \frac{günstige\ Fälle}{mögliche\ Fälle} = \frac{g}{m}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit w

- Die Wahrscheinlichkeit w ist eine rationale Zahl, für die gilt:
  $0 \leq w \leq 1$
- Für das unmögliche Ereignis gilt:
  $w = 0$
- Für das sichere Ereignis gilt:
  $w = 1$

Beispiele für Wahrscheinlichkeiten

- Ziehen einer Herz-Karte aus einem Skatspiel
  $w = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow 25\%$
- Ziehen eines Ass aus einem Skatspiel
  $w = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125 \rightarrow 12,5\%$
- Ziehen einer schwarzen Karte aus einem Skatspiel
  $w = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} = 0,5 \rightarrow 50\%$
- Roulette: Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Zahl getroffen wird
  $w = \frac{18}{37} \approx 0,486486 \rightarrow 48,65\%$

Das Komplementärereignis

- Die Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des Ereignisses A ist:
  $w(\bar{A}) = 1 - w$
- Beispiel "die Pick-Ass-Karte"
  - Zufallsexperiment: Pick-Ass-Karte aus Skatspiel ziehen.
  - Eintreten: $w = \frac{1}{32}$
  - Nicht-Eintreten: $1 - w = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$
- Beispiel: "die Herzkarte"
  - Zufallsexperiment: Eine Herzkarte aus Skatspiel ziehen.
  - Eintreten:

$$w = \frac{8}{32} = 0,25 \rightarrow 25\%$$

– Nicht-Eintreten:

$$1 - \frac{8}{32} = \frac{24}{32} = 0,75 \rightarrow 75\%$$

3. Elementare Kombinatorik

3.1. Das Urnenexperiment

- Ausgangspunkt ist das sogenannte Urnenexperiment. Hierbei verwendet man eine Urne, die gleichartige, je nach Problemstellung mit verschiedenen Merkmalen (Farbe, Nummer, ...) versehene, Kugeln enthält.
- Man zieht nun bis zu einer festgelegten Anzahl Kugeln und notiert die Merkmale.
- Dabei gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Vorgehensweise:
  1. Ziehen ohne zurücklegen (vgl. Lottoziehung)
  2. Ziehen mit zurücklegen (vgl. Würfel)
- Weiterhin muß man auch unterscheiden, ob es bei den gezogenen Kugeln auf die Reihenfolge der Anordnung ankommt, oder nicht.

3.1.1. Ziehen mit Zurücklegen

- Anzahl der Ziehungen: r
- Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass das gleichzeitige Werfen von n Würfeln gleichbleibend damit ist, dass man aus einer Urne mit 6 Kugeln n-mal (mit zurücklegen) zieht.
- Der Begriff "Würfel" steht für den Hexa-eder (6-flächiger Würfel)
- Beispiel
  - Frage Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn man drei Würfel wirft?
  - Antwort: Wenn man diese Frage als Urnenexperiment auffasst, gilt im 1. Zug, dass man 6 Möglichkeiten hat. Nach dem Zurücklegen der Kugel hat man im 2. Zug ebenfalls 6 Möglichkeiten, ebenso beim 3. Zug.
    Möglichkeiten: $6 * 6 * 6 = 6^3 = 216$
- Satz
  - Beim r-maligen Ziehen mit zurück legen aus einer Urne mit n Kugeln gibt es n^r verschiedene Ergebnisse.
  - $Kugelanzahl\ n \rightarrow Möglichkeiten\ n^r$

Übung Sie werfen jeweils 3 Würfel. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

1. $w(Pasch\ aus\ Fünfen)$

$$w = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

2. $w(genau\ eine\ 1\ f\ddot{a}llt)$
$$w = \frac{1}{6} * \frac{5}{6} * \frac{5}{6} * 3 = \frac{75}{216}$$
3. $w(Augenzahlen\ 1\ 1\ 2)$
Es gibt 3 Möglichkeiten, wie diese Kombination fallen kann (da drei Würfel vorhanden).
$$w = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * 3 = \frac{3}{216}$$
4. $w(Augenzahl < 18)$
Wir berechnen die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, eine $Augenzahl \geq 18$ zu werfen. Diese wird anschließend von 1 subtrahiert. Hinweis: 18 ist die maximale Augenzahl bei drei Würfeln (dreimal Augenzahl sechs).
$$w = 1 - w(18)$$
$$w = 1 - (\frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6}) = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$$

Definitionen

n-Fakultät
Wir definieren für jedes $n \in \mathbf{N}$:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 1 * 2 * 3 ... * n & \text{falls } n \geq 1 \end{cases}$$

Beispiele zur Fakultät
$0! = 1$
$1! = 1$
$3! = 1 * 2 * 3 = 6$
$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$

Permutation
Eine Verteilung von r Objekten auf r Plätze (*ohne* Wiederholung) heißt "Permutation von r Objekten".

Objekte	Permutationen	Anzahl
$\{\}$	$\{\}$	$0! = 1$
A	(A)	$1! = 1$
A, B	$(A, B)(B, A)$	$2! = 2$
A, B, C	$(A, B, C)(A, C, B)(B, A, C)(B, C, A)(C, A, B)(C, B, A)$	$3! = 6$

Satz Permutation
Es gibt $r!$ viele Permutationen von r Objekten.

Beispiel Permutation
In einer Urne befinden sich 12 Kugeln. Es wird 4 mal *mit Zurücklegen* gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der Zahlen 3,5,6 und 12.
a) In genannter Reihenfolge

$$w = \frac{1}{12} * \frac{1}{12} * \frac{1}{12} * \frac{1}{12} = \frac{1}{20736}$$

b) Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$w = \frac{4}{12} * \frac{3}{12} * \frac{2}{12} * \frac{1}{12} = \frac{1}{864}$$

3.1.2. Ziehen ohne Zurücklegen

Motivation Wie viele dreistellige Zahlen kann mit mit den Ziffern $1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$ bilden, wobei jede Ziffer nur einmal auftreten darf?

$$7 * 6 * 5 = 210$$

Diese Möglichkeiten lassen sich auch anders beschreiben:

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} = 7*6*5 = 210$$

Satz Das Zufallsexperiment "r-maliges Ziehen *ohne* Zurücklegen unter Betrachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit n Kugeln" hat $\frac{n!}{(n-r)!}$ verschiedene Ergebnisse.

Definition der Variation Ein aus n Elementen ausgewähltes, geordnetes r-Tupel heißt:

- Variation von n Elementen zur r-ten Klasse
- Die geordnete Stichprobe vom Umfang r aus n Elementen
- $V(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Taschenrechner-Operation: $V(n, r) \rightarrow n$ $\boxed{\text{nPr}}$ r

Bemerkung Permutationen sind Variationen von n Elementen zur n-ten Klasse. Permutation benutzt alle Elemente, die Variation betrachtet einen Teil.

Beispiel – 12 Kugeln In einer Urne sind 12 Kugeln. Es wird viermal *ohne* zurürcklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugeln 3,5,6 und 12 in *genau dieser* Reihenfolge gezogen werden?

$$w = \frac{1}{\frac{12!}{(12-4)!}} = \frac{1}{11880} \approx 0.000084$$

Beispiel Lotto Spezial Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, wenn es bei der Ziehung der Lottozahlen 6 aus 49 auf die Reihenfolge ankäme, 6 richtige zu ziehen?

$$w = \frac{1}{V(49|6)} = \frac{1}{\frac{49!}{(49-6)!}} = \frac{1}{10068347520}$$

Bekanntlich kommt es bei der echten Ziehung der Lottozahlen nicht auf die Reihenfolge an – das heißt 6 KUgeln auf 6 Plätze zu verteilen ist in $6! = 720$ verschiedene Konstellationen sind möglich. Daher erhalten wir als "reale" Wahrscheinlichkeiten für 6 richtige:

$$w = \frac{6!}{V(49|6)} = \frac{720}{10068347520} = \frac{1}{13983816}$$

$$w = \frac{6!}{\frac{49!}{(49-6)!}} = \frac{1}{\frac{49!}{6!*(49-6)!}}$$

Definition Binomialkoeffizient
Wir definieren den Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!*(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases}$$

Satz Beim r-maligen Ziehen aus n Elementen ohne zurürcklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! * (n-r)!}$$

verschiedene Ergebnisse.
Die Fallunterscheidung fällt weg, da r nicht kleiner als n sein kann.$_{citation\ needed,\ chris}$

Definition der Kombination Ein aus n Elementen ausgewähltes, ungeordnetes r-Tupel heißt:

- Kombination von n Elementen zur r-ten Klasse
- Oder: Die ungeordnete Stichprobe vom Umfang r aus n Elementen
- Bezeichnung: C(n,r)
- $C(n,r) = (\binom{n}{r})\frac{n!}{(n-r)!}$
- Taschenrechner-Operation: $C(n,r) \rightarrow n$ $\boxed{\text{nCr}}$ r

Beispiel – 12 Kugeln In einer Urne sind 12 Kugeln. Es wird viermal *ohne* zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln 3,5,6 und 12 in *beliebiger* Reihenfolge gezogen werden?

$$w = \frac{1}{C(12|4)} = \frac{1}{\frac{12!}{4!*(12-4)!}} = \frac{1}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{495} \approx 0,002$$

Übung

Ausschuß Auf wie viele Arten kann man aus 9 Personen einen Ausschuß von 5 Personen bilden?

Banknoten Sie haben je eine 10/20/50-EUR-Banknoten. Wie viele Geldbeträge können Sie glatt (d.h. ohne Wechselgeld) bezahlen?

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Vergleich Pascal'sches Dreieck.

4. Anwendung der Kombinatorik auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Situation Wir ziehen *ohne* Zurücklegen aus einem Skatspiel (32 Karten) fünf Karten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen 5 Karten, *genau ein Ass* ist?

$$w = \frac{q}{m} = \frac{C(4|1) * C(28|4)}{C(32|5)} = \frac{\binom{4}{1} * \binom{28}{4}}{\binom{32}{5}} = \frac{4 * 20475}{201376} = \frac{81900}{201376} = 0,4067 \approx 40\%$$

4.1. Sätze über die Wahrscheinlichkeit

Wir erweitern die obige Frage Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen 5 Karten, *mindestens ein Ass* ist?
Um die Frage zu beantworten, zerlegen wir die Fragestellung "Mindestens ein Ass" in die Teilfragen:

- genau ein Ass: $g_1 = \binom{4}{1} * \binom{28}{4} = 81\,900$
- genau zwei Asse: $g_1 = \binom{4}{2} * \binom{28}{3} = 19\,656$
- genau drei Asse: $g_1 = \binom{4}{3} * \binom{28}{2} = 1\,512$
- genau vier Asse: $g_1 = \binom{4}{4} * \binom{28}{1} = 28$

Insgesamt sind

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 81\,900 + 19\,656 + 1\,512 + 28 = 103\,096$$

Ergebnisse günstig.

Die Anzahl der Möglichkeiten, 5 Karten aus 32 zu ziehen, ist mit $\binom{32}{5} = 201\,376$ unverändert.
Damit erhalten wir:

$$w = \frac{103\,096}{201\,376} = 0,51196 \approx 51,2\%$$

Da sich die Anzahl der günstigen Möglichkeiten additiv zusammensetzt, kann man auch die Wahrscheinlichkeit additiv kombinieren.

$$w = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \frac{g_3}{m} + \frac{g_4}{m} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$$

4.2. Satz

Als Resultat erhalten wir:
Ist ein Ereignis E darstellbar in der Form $E = E_1 \vee E_2 \vee \cdots E_n$ und schließen sich die Teilergebnisse $E_1, \cdots, E_n$ gegenseitig aus, so gilt:

$$w(E) = w(E_1) + w(E_2) + w(E_3) + \cdots + w(E_n)$$

weiterhin gilt

4.3. Satz 2

Sind die Ereignisse $E_1, \cdots, E_n$ paarweise unabhängig und gilt $E = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge \cdots \wedge E_n$ (gleichzeitiges Eintreten der Ereignisse $E_1, E_2, \cdots E_n$), so gilt:

$$w(E) = w(E_1) * \cdots * w(E_n)$$

4.3.1. Beispiel: Werfen von drei Würfeln

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch aus 6 (6,6,6) zu werfen?
Das Ereignis $E : (Werfen\ von\ (6,6,6))$ läst sich zerlegen in die Teilereignisse:

- E_1: Der 1. Wurf ist eine Sechs: $w(E_1) = \frac{1}{6}$
- E_2: Der 2. Wurf ist eine Sechs: $w(E_2) = \frac{1}{6}$
- E_3: Der 3. Wurf ist eine Sechs: $w(E_3) = \frac{1}{6}$

Diese drei Teilereignisse müssen gleichzeitig eintreten. Damit folgt

$$w(E) = w(E_1) * w(E_2) * w(E_3) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

4.4. Satz 3 – Komplementärergebnis

Für ein Ereignis E und das zugehörige Komplementärergebnis $\bar{E}$ gilt stets:

$$w(E) + w(\bar{E}) = 1$$

4.4.1. Beispiel

Die Situation "Kein Ass unter den fünf Karten" können wir als Komplement von "mindestens ein Ass" auffassen. Für die Wahrscheinlichkeit gilt also:

$$w(kein\ Ass) = 1 - 0,51196 = 0,48804$$

Probe:

$$w(kein\ Ass) = \frac{\binom{4}{0} * \binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = \frac{1 * 98\,280}{201\,376} = 0,488$$

4.4.2. Satz 4

Sind A und B Ereignisse – und ist A ein Teilergebnis von B, so gilt

$$w(A) \leq w(B)$$

4.4.3. Beispiel – Skatspiel

A: "Ziehen einer Dame"
B: "Ziehen einer Bildkarte (Bube,Dame,König)"

$$\frac{1}{8} \leq \frac{3}{8}$$
$$w(A) \leq w(B)$$

5. Unabhängigkeit von Ereignissen

Die Unabhängigkeit von Ereignissen soll hier nur intuitiv erklärt werden.

5.1. Definition

Man kann zwei Ergeignisse E_1 und E_2 als *unabhängig* ansehen, wenn sich das Eintreten des einen Ereignisses nicht auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses auswirkt und umgekehrt.

5.2. Beispiel – Zufallsexperiment sei das Würfeln von zwei Würfeln

- A sei das Ereignis: "Der erste Wurf ist eine 5"
- B sei das Ereignis: "Der zweite Wurf ist eine 6"
- C sei das Ereignis: "Die Summe der beiden Augenzahlen ist ≥ 10"

Die Ereignisse A und B sind offensichtlich voneinander unabhängig (disjunkt).

Anders ist dies bei den Ereignissen A und C:
Für sich alleine betrachtet ist $w(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Günstige Fälle: (4,6)(5,5)(5,6)(6,4)(6,5)(6,6)

Ist aber A eingetreten, ändert sich die Wahrscheinlichkeit für Ereignis C auf $\frac{2}{6}$
Denn jetzt sind (5,5) und (5,6) günstig. Möglich sind (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) und (5,6). Ebenfalls wirkt sich das Eintreten von C auf die Wahrscheinlichkeit von A aus. Analog überlegt man, dass auch B und C abhängig sind.

6. Aufgaben zur Kombinatorik[1]

6.1. Permutationen

Schwarze: 5.2.1 – Paul Paul hat 5 Briefe und 5 Briefumschläge geschrieben. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese 5 Briefe in die 5 Briefumschläge zu stecken?
Antwort: $5! = 120$

Schwarze: 5.2.2 – Produkt P Ein Produkt P wird auf insgesamt 6 Maschienen $M1, \cdots, M6$ bearbeitet. Dabei besteht die Vorschrift, dass das Produkt auf den Maschienen $M2, M4undM5$ immer in dieser Reihenfolge und direkt hintereinander bearbeitet werden muss – im übrigen ist die Bearbeitungsreihenfolge beliebig. Wie viele Bearbeitungsmöglichkeiten gibt es?
Hinweis: M2,M4 und M5 zu einer Maschiene zusammenfassen.
Antwort: $4!$

Schwarze: 5.2.3 – 5 Personen in 5 Büros Auf wie viele Weisen können 5 Personen auf Büros verteilt werden, wenn:

a) es fünf Büros gibt und in jedem Büro eine Person sitzen soll?
b) drei Büros vorhanden sind und in zwei Büros jeweils zwei Personen sitzen und in einem Büro eine Person alleine sitzt?
c) zwei Büros vorhanden sind, eins für zwei Personen und eins für drei Personen?

Antwort

a) $5! = 120$
b) $\binom{5}{2} * \binom{3}{2} * \binom{1}{1} = 10 * 3 * 1 = 30$
c) $\binom{5}{3} * \binom{2}{2}$

Schwarze: 5.2.4 – Übung Wäscheleine

Aufgabe Der Produktionsleiter einer Werbefirma soll einen Werbefilm über ein bestimmtes Waschmittel drehen. Dazu will er Wäsche auf einer Leine in folgender Weise aufhängen:

- 4 weiße Teile
- 3 rote Teile

[1] vgl. Aufgabensammlung zur Statistik von Jochen Schwarze

- 2 bunte Teile
- 2 blaue Teile

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die genannten Teile anzuordnen?

Lösung $\binom{11}{4} * \binom{7}{3} * \binom{4}{3} * \binom{2}{2} = 69\,300$

$$= \frac{11!}{\frac{4!*(11-4)!}{7!}} * \frac{7!}{\frac{3!*(7-3)!}{4!}} * \frac{4!}{\frac{2!*(4-2)!}{2!}} * \frac{2!}{2! * (2-2)!}$$

$$= \frac{11!}{4! * 3! * 2! * 2!}$$

Wie man sieht, können die Dublette weggekürzt werden.

Schwarze: 5.2.5 – Übung NEVADA

Aufgabe Wie viele verschiedene Buchstabenkombinationen sind durch das Wort $\boxed{\text{NEVADA}}$ möglich? Es sollen immer alle 6 Buchstaben verwendet werden. Man beachte, dass der Buchstabe A doppelt vorkommt.

Lösung Ergebnis: 360

Schwarze: 5.2.6 – Perlenaufgabe

Aufgabe Wie viele Möglichkeiten gibt es

a) 9 verschiedenfarbige Perlen anzuordnen?
b) 2 rote, 3 schwarze und 4 weiße Perlen aneinanderzureihen?

Lösung

a) $9! = 362\,880$
b) $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$

7. Aufgaben am 6.12.2010

Schwarze: 5.3.3 – Morseaufgabe
Lösung: 8 Möglichkeiten(?).

Schwarze: 5.4.1 – Straßennamen

Lösung: $\binom{12}{8} = 495$
Rechnung: 12 $\boxed{\text{nCr}}$ $8 = 495$

Schwarze: 5.4.2 – Lottoschein

Lösung: $\binom{2}{2} * \binom{8}{4} = 70$
Rechnung: $(2$ $\boxed{\text{nCr}}$ $2) * (8$ $\boxed{\text{nCr}}$ $4) = 70$

Schwarze: 5.4.3 – Übungsaufgaben wählen

Wähle 3 von 10 Aufgaben aus. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese auszuwählen

Lösung: $\binom{10}{3} = 120$

Schwarze: 5.4.4 – Der Münfwurf

Eine Münze wird fünf mal geworfen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass drei mal das Wappen und zwei mal Zahl geworfen wird?

$\binom{5}{3} = 10$

$\binom{5}{2} = 10$

Schwarze: 5.4.6 – Kartenspiel

$\binom{32}{5} = 201\,376$

Schwarze: 5.4.7 – Produktionsstätten

$\binom{8}{2} = 28$

Schwarze: 5.5.1 – Gewerkschafter

Ein Ausschuß besteht aus 5 Gewerkschaftern und 4 freie Mitglieder.
Neue Gruppe aus 3 Gewerkschaftern und 2 freien gestalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Hinweis: Kommt es auf die Reihenfolge an? Nein.

Geschieht ein zurücklegen? Nein.
Daher handelt es sich um eine *Kombination*. Die Bedingungen müssen gleichzeitig gelten, daher wird malgenommen.

Lösung: $\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = 60$

Schwarze: 5.5.3

Wie viele vierstellige Zahlen gibt es?
$9000 = 9 * 10 * 10 * 10$

Wie viele Zahlen weisen genau zwei mal die Eins auf?

$\boxed{\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times 9 \times 9} = 81$
$\boxed{\mathbf{1} \times 9 \times \mathbf{1} \times 9} = 81$
$\boxed{\mathbf{1} \times 9 \times 9 \times \mathbf{1}} = 81$

$\boxed{8 \times \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times 9} = 72$
$\boxed{8 \times \mathbf{1} \times 9 \times \mathbf{1}} = 72$
$\boxed{8 \times 9 \times \mathbf{1} \times \mathbf{1}} = 72$

Gesamtzahl: $81 + 81 + 81 + 72 + 72 + 72 = 459$
Bei wie vielen Zahlen kommt keine Ziffer doppelt vor?
3b)
$9 * 9 * 8 * 7 = 4536$

Aufgabe 5.5.4

Möglichkeiten für den ersten Spieler: $\binom{32}{10} = 64\,512\,240$
$[\cdots]$

Aufgabe 5.5.6

$\binom{20}{10} \times \binom{10}{10}$

Reihenfolge egal:

$$(20 \boxed{\text{nCr}}\ 10) \times (10 \boxed{\text{nCr}}\ 10) = 184\,756$$

Reihenfolge beachten:

$$(20 \boxed{\text{nPr}}\ 10) \times (10 \boxed{\text{nPr}}\ 10) = 2,4 * 10^{18}$$

Aufgabe 5.5.7

Aufgabe 5.5.8
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf Personen in einer Reihe anzuordnen?
Antwort: Es gibt $5! = 120$ Möglichkeiten, diese anzuordnen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Personen an einem runden Tisch anzuordnen?
Antwort: Es gibt $\frac{5!}{5} = (5-1)! = 24$ Möglichkeiten, 5 Personen an einem runden Tisch anzuordnen.
b) $\binom{7}{3} \times \binom{5}{2}$

Aufgabe 5.5.9

Straßen dürfen doppelt benutzt werden:
$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$
Keine Straße doppelt benutzen:
$5 \times 4 \times 5 \times 4 = 400$

Aufgabe 5.5.10

0	0	0	0	A-Z	A-Z	0	0

$$9999 \times 26 \times 26 \times 100 = 675\,932\,400$$

5.5.11 Volleyball

a) $\binom{10}{6}$

b) $\binom{6}{4} \times \binom{4}{2}$

5.5.12

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} + = 16$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

5.5.13
Ein Handelsreisender kann sich zwischen 2 Orten entscheiden, von denen er einen abarbeiten muss. In einem Ort befinden sich 7 Kunden, in dem anderen befinden sich 8 Kunden. Wie viele Möglichkeiten der Rundreise gibt es insgesamt, wenn er die Reihenfolge beliebig wählen kann?

$$8! + 7! = 45360$$

5.5.14
a) $\binom{6}{2} = 15$
b) $\binom{12}{3} \times \binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 369\,600$

8. Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bisher haben wir die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet. Dabei galten folgene Annahmen:

- Wir betrachten nur Grundräume Ω mit *endlich* vielen Elementen.
- Alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit
- Für die Wahrscheinlichkeit gilt $w = \frac{günstig}{möglich}$
  Dies gilt nur bei einer endlichen Grundmenge Ω .

Wir wollen nun die Erweiterung auf einer **beliebiegen** Grundmenge Ω (auch: "mit unendlich vielen Elementen") durchführen.

8.1. Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Sei Ω eine Grundmenge und sei $A \subset \Omega$ ein Ereignis. Dann heißt eine Funktion $P(A)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Eintreten des Ereignisses A.
Man spricht auch jetzt wieder abkürzend von *Wahrscheinlichkeit* anstelle von *Wahrscheinlichkeitsverteilung*.

8.2. Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung – Kolmogoroff, 1933

- $P(A) \geq 0$ für jedes Ereignis $A \subset \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$ für einander *anschließende* Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$.

Bemerkung Man kann zeigen, dass die klassische Wahrscheinlichkeit diese Axiome erfüllt.

8.3. Regeln der Wahrscheinlichkeit – gefolgert aus Axiomen

Sei Ω eine Grundemenge und seien $A, B \subset \Omega$ zwei **zufällige Ereignisse**.
Dann gilt:

- $P(A) \leq 1$
- $A = 0 \rightarrow P(A) = 0$
- $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

8.4. Umkehrung – Wichtig

Die Umkehrung von $A = 0 \rightarrow P(A) = 0$ ist nicht möglich. Daher ist folgende Gleichung **falsch**.

$$P(A) = 0 \rightarrow A = 0$$

Aus der Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich Null ist, kann man **nicht** schließen, dass das Ereignis nicht eintreten kann.

Beispiele – der Unterschied zu Pascall Die Wahrscheinlichkeit mit einem Dartpfeil einen bestimmten Punkt auf einer Dartscheibe zu zu treffen sei Null. Jedoch ist es nicht ausgeschlossen, dass genau dieser Punkt getroffen wird.
Ein weiteres Beispiel wäre es, mit genau $50.000 \frac{km}{h}$ in eine Geschwindigkeitskontrolle zu geraten.
Die günstigen Ereignisse nähern sich also ∞ an. In der Folge nähert sich z.B. $\frac{1}{\infty}$ dem Wert 0 an. Nach Pascall wäre dies ein unmögliches Ereignis. Nach Kolmogoroff ist diese Umkehrung nicht möglich. Es besteht immer noch die (zugegebenermaßen sehr unwahrscheinliche) Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis eintritt.

9. Zufallsvariablen

9.1. Definition der Zufallsvariable

Motivation Wir wollen Elementarereignissen reele Zahlen zuweisen.

Beispiele

Ereignis: Münzwurf

$$Zuordnung \begin{cases} Kopf & \xrightarrow{X} 1 \\ Zahl & \xrightarrow{X} 0 \end{cases}$$

Das heißt:

$$X(Kopf) = 1$$

$$X(Zahl) = 0$$

Ereignis: Würfelwurf

$$Zuordnung \begin{cases} 1 \; Auge & \xrightarrow{X} 1 \\ 2 \; Augen & \xrightarrow{X} 2 \\ 3 \; Augen & \xrightarrow{X} 3 \\ 4 \; Augen & \xrightarrow{X} 4 \\ 5 \; Augen & \xrightarrow{X} 5 \\ 6 \; Augen & \xrightarrow{X} 6 \end{cases}$$

Ereignis: Brenndauer einer Glühbirne

$$X(Glühbirne) = Brenndauer_{\ in\ Stunden}$$

Alle diese Zuordnungen bezeichnen die Zufallsvariable des Elementarereignisses.

9.2. Definition Zufallsvariable

Die Funktion X, die jedem Elementarereignis $w \in \Omega$ eine reele Zahl $r \in \mathbb{R}$ zuordnet, also $X(w) = r$, heißt **Zufallsvariable**.

Beispiel Beim Würfel haben wir bisher intuitiv jeder Seite die Anzahl der Augen als reelle Zahl zugeordnet. Aber auch andere Zufallsvariablen sind möglich:

Augenzahl	X	Y	Z
1	1	1	0
2	2	1	1
3	3	1	0
4	4	0	1
5	5	0	0
6	6	0	1

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{falls die Augenzahl höchstens } 3 \text{ beträgt} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{falls eine gerade Augenzahl geworfen wird} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Beispiel Kartenspiel Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel

Spielkarten	Zufallsvariable (Punkte)
Ass	11
Zehn	10
König	4
Dame	3
Bube	2
9	0
8	0
7	0

Definition: diskrete Zufallsvariable
Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich. Dann heißt X **diskrete Zufallsvariable**.
Bemerkung: Die beiden genannten Beispiele (Würfel, Skatkarten) sind diskrete Zufallsvariablen.

9.3. Definition Verteilungsfunktion

Die durch $F(x) = P(X \leq x)$ definierte Funktion heißt **Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen** X.
$P(X \leq x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert $\leq x$ annimmt.

9.4. Beispiel Würfelwurf

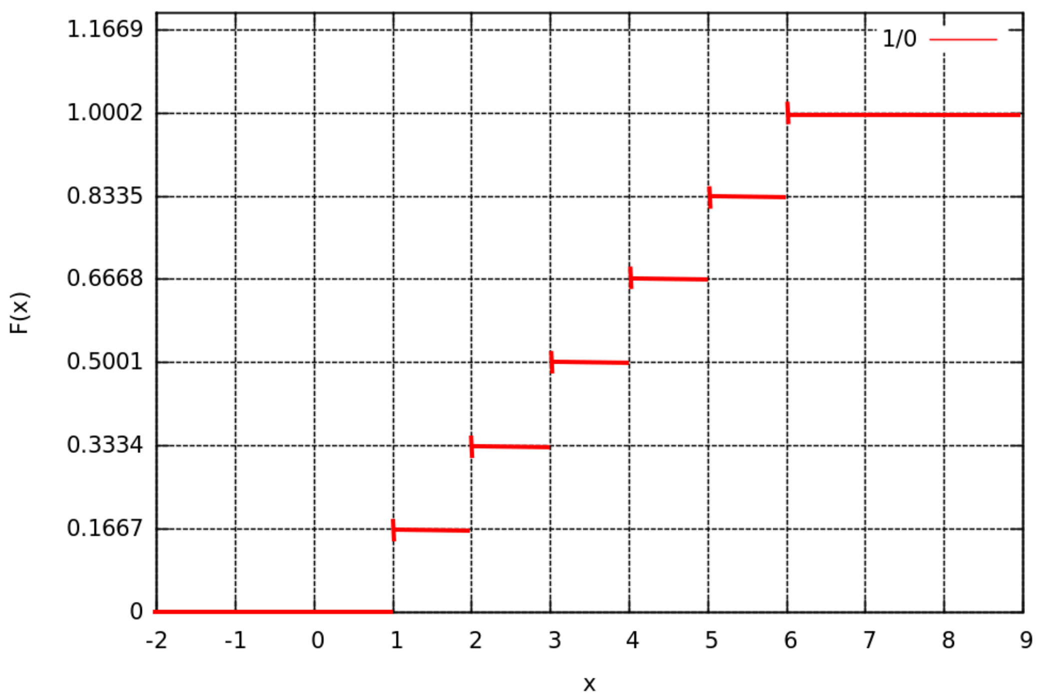
X sei die Augenzahl, $x_1 = 1, \cdots, x_6 = 6$ sind die Werte für X.
Diese Werte werden mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angenommen:

$$P(X = x_1) = \frac{1}{6}, \cdots \quad P(X = x_6) = \frac{1}{6}$$

In der Verteilungsfunktion sind alle Wahrscheinlichkeiten enthalten.

Würfelwurf – Verteilungsfunktion $F_x(x)$

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 > x \\ \frac{1}{6} & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & \text{falls } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & \text{falls } 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & \text{falls } 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & \text{falls } 5 \leq x < 6 \\ \frac{6}{6} & \text{falls } 6 \leq x \end{cases}$$



Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ Aus der Verteilungsfunktion können wir auf die Wahrscheinlichkeitsfunktion schließen. Die jeweiligen Differenzen der Funktionswerte werden ermittelt und in einen neuen Graphen übertragen. In unserem Würfelwurf-Beispiel handelt es sich jeweils um eine Änderung der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$.

9.5. Satz: Eigenschaften der Verteilungsfunktion

a) Die Verteilungsfunktion F nummt nur Werte $\in [0, 1]$ an.
b) $F(-\infty) = 0$
c) $F(+\infty) = 1$
d) F ist eine monoton steigende Funktion (Wahrscheinlichkeiten nehmen nach rechts nicht ab)
e) F ist rechtsseitig stetig, d.h. $F(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x)$
f) Durch F sind die Wahrscheinlichkeiten *aller* Ereignisse $A \subset \Omega$ festgelegt, insbesondere gilt:
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

9.6. Beispiele zur Verteilungsfunktion

Wir greifen auf das Beispiel *Würfel* zurück und bestimmen:
Wahrscheinlichkeit, eine 3,4 oder 5 zu werfen:

$$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$$

Wahrscheinlich, eine Augenzahl größer als 3 zu werfen:

$$P(3 < X \leq 6) = F(6) - F(3) = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$$

Wahrscheinlichkeit, höchstens 4 Augen zu werfen:

$$P(0 < X \leq 4) = F(4) - F(0) = \frac{4}{6} - 0 = \frac{4}{6}$$

Übungen Bitte die Übungen 7.1.1 und 7.1.2 lösen[2].

9.7. Definition stetige Verteilungsfunktion, Dichte

Eine Zufallsvariable X heißt *stetige Zufallsvariable*, falls eine Funktion f existiert mit

- $f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $F(x) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$
  Wobei $F(x)$ Verteilungsfunktion von X ist.
  f heißt **Dichte** oder **Dichtefunktion** von X.

[2]vgl. Aufgabensammlung zur Statistik von Jochen Schwarze

Beispiel Dichtefunktion Ist diese Funktion f eine Dichtefunktion? 1) 2)

9.8. Satz: Eigenschaften der Dichtefunktion

- Jede integrierbare Funktion f mit den folgenden Eigenschaften ist Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X :
  - $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $P(X = a) = F(a) - F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
  - Obwohl das Ergebnis nicht unmöglich ist!

10. Der Erwartungswert

10.1. Definition

Diskrete Zufallsvariable X Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ annimmt.
Dann ist der Erwartungswert $E(X)$ definiert als:

$$E(X) = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Beispiel Diskrete Zufallsvariable
Zufallsexperiment sei das Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel.
Gesucht ist der erwartete Wert dieser Karte, wenn die Punkte wie beim Skat gezählt werden.
Es gelten die Wahrscheinlichkeiten $p_i = \frac{1}{32}$ für $i = 1, \ldots, 32$

Spielkarte	Wert
As	11
10	10
König	4
Dame	3
Bube	2
9	0
8	0
7	0

Tabelle 1: Kartenwerte Skat

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{i=1}^{32} x_i \cdot p_i \\ &= 11 \cdot \frac{1}{32} + 11 \cdot \frac{1}{32} + 11 \cdot \frac{1}{32} + 11 \cdot \frac{1}{32} + 10 \cdot \frac{1}{32} + \ldots + 0 \cdot \frac{1}{32} \\ &= 120 \cdot \frac{1}{32} \\ &= 3.75\end{aligned}$$

Der Erwartungswert E der diskreten Zufallsvariable X beträgt 3.75. Als Überprüfung kann man (mehrmals) 10 Karten aus einem Skatspiel ziehen. Die gesammelten Punktewerte teilt man anschließend durch die Anzahl der gezogenen Karten. Mit hoher Wahrscheinlichkeit wird das Ergebnis bei ungefähr 3.75 liegen.

Stetige Zufallsvariable X Sei X eine stetige Zufallsvariable mit DIchtefunktion f, so ist der Erwartungswert definiert als:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x$$

11. Die Varianz

11.1. Definition

Die Varianz der Zufallsvariablen X ist die Größe

$$Var(X) = E((x_i - E(X))^2)$$

Im diskreten Fall bedeutet dies:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$$

Die Zahl $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ heißt Standardabweichung. Diese ist ein Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsvariablen um ihren Mittelwert.

Vereinfachte Berechnung der Varianz Der Steiner'sche Verschiebungssatz

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Dies bedeutet in den beiden Fällen:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{x=1}^{n} x_i p_i \right)^2$$

$$Var(X) = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \mathrm{d}x - \left(\sum_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x \right)^2$$

Beispiel Skatkarten

Varianz berechnen

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{32} x_i^2 \cdot \underbrace{p_i}_{\frac{1}{32}} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{32} x_i p_i\right)^2}_{(3.75)^2} \\
&= (4 \cdot 11^2 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 0^2) \cdot \frac{1}{32} - (3.75)^2 \\
&= 17.1875
\end{aligned}
$$

Standardabweichung berechnen

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{17.1875} = 4.1458$$

Übung Schwarze 7.2.1

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2 \\
Var(X) &= 1.75
\end{aligned}
$$

Teil II. Spezielle Verteilungen

12. Die Binomialverteilung

Bei der Binomialverteilung betrachtet man Probleme folgender Art; es werden unabhängige Wiederholungen eines Experiments mit zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg – mit Wahrscheinlichkeit p, bzw. Misserfolg – mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$) betrachtet.
Experimente dieser Art nennt man **Bernoulli-Experimente**.

12.1. Satz

Die Wahrscheinlichkeit von von k Erfolgen bei n Wiederholungen eines Experiments mit zwei möglichen Ergebnissen und der Erfolgswahrscheinlichkeit p lautet

$$b(k, n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{(Binomialverteilung)}$$

Beispiel Das Zufallsexperiment sei der Wurf eines Würfels.
Das Erfolgsereignis: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
Für die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = P(A)$ gilt: $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Das Ereignis wird fünf mal wiederholt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A viermal auftritt?

$$P_1 = b(4, 5, \frac{2}{3}) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-4} = 0.3292 \Rightarrow 32.92\%$$

Der Würfel wird fünf mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A höchstens zweimal eintritt?

$$\begin{aligned} P_2 &= b(0, 5, \frac{2}{3}) + b(1, 5, \frac{2}{3}) + b(2, 5, \frac{2}{3}) \\ &= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-2} \\ &= 0.2099 \Rightarrow 20.99\% \end{aligned}$$

Wir werfen nochmals 5 mal den Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A mindestens dreimal eintritt?

$$P_3 = 1 - P_2 = 1 - 0.2099 = 0.7901 \Rightarrow 79.01\%$$

12.2. Satz – Die Standardabweichung

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt. Dann gilt:

- Erwartungswert: $E(X) = n \times p$
- Varianz: $Var(X) = n \times p \times q$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \times p \times q}$

12.3. Beispiel

In der Produktion sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% die hergestellten Teile defekt. Wie groß ist der erwartete Anzahl defekter und die zugehörige Standardabweichung bei einer Lieferung von 10 000 Stück?

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times p = 10\,000 \times 0.02 = 200 \\ \sigma &= \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{10\,000 \times 0.02 \times 0.98} = 14 \end{aligned}$$

13. Die hypergeometrische Verteilung

Insbesondere bei der Qualitätskontrolle ist das *Ziehen mit Zurücklegen* problematisch – gegebenenfalls garnicht durchführbar[3].

[3] vgl. Zerstörende Prüfung

13.1. Satz – Die hypergeometrische Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit bei einer Stichprobe vom Umfang n ohne Zurücklegen in einer Lieferung von n Stück, unter denen sich M defekte befinden, m defekte zu erhalten, ist

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \times \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

13.1.1. Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang $n = 5$ Karten aus einer Gesamtheit von $N = 32$ Karten, unter denen sich $M = 4$ Asse befinden, $m = 1$ Ass vorzufinden?

$$w = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{32-4}{5-1}}{\binom{32}{5}}$$

13.1.2. Beispiel – Der Obstgroßhändler

Sie sind Obstgroßhändler und übernehmen aus einer Lieferung von 20 000 Kisten Bananen 1 000 Kisten. Erfahrungsgemäß sind 2% der Kisten faul. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau 17 faule Kisten erhalten?

- $N = 20\,000$ – Kisten gesamt
- $n = 1\,000$ – Kisten für Sie
- $M = 400$ – faule Kisten gesamt
- $m = 17$ – faule Kisten für Sie

$$w(X = 17) = \frac{\binom{400}{17} \times \binom{20\,000-400}{1\,000-17}}{\binom{20\,000}{1\,000}}$$

13.2. Satz

Die Zufallsvariable X sei hypergeometrisch verteilt. Dann gilt:

- Erwartungswert: $E(X) = n \times p$ btw: $p = \frac{M}{N}$
- Varianz: $Var(X) = n \times p \times (1 - p) \times \frac{N-n}{N-1}$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1 - q) \times \frac{N-n}{N-1}}$

14. POISSON-Verteilung

Klausur-Tipp: Auf die Worte achten “selten verteilt”.

Bei vielen Anwendungen, die sich auf die Binomialverteilung zurückführen lassen, ist die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Ereignisses A (Erfolg) sehr klein.
Gleichzeitig ist die Anzahl der Wiederholungen des Experiments sehr groß.
Typische Anwendung: Massenproduktion eines Gutes mit geringer Ausschußquote p.

Der Binomialkoeffizient ist in dieser Situation nur unbequem zu berechnen. Daher approximiert man die Binomialverteilung durch eine Verteilung, die sich ergibt, wenn sich gleichzeitig $p \to 0$ und $n \to \infty$ annähern, sodass der Erwartungswert $E(X) = \mu = n \times p$ konstant bleibt. Ist $\mu = n \times p = const.$, so lässt sich zeigen, dass folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty \ \wedge \ p\to 0} \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} = \frac{\mu^k}{k!} \times e^{-\mu}$$

14.1. Definition

Daher folgern wir folgende Definition der POISSON-Verteilung:
Eine Zufallsvariable X heißt POISSON-verteilt, wenn gilt:

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} \times e^{-\mu}$$

14.2. Satz

Die Zufallsvariable X sei POISSON-verteilt. Dann gilt:

- Erwartungswert: $E(X) = \mu = n \times p$
- Varianz: $Var(X) = \mu$

14.3. Beispiel für Poisson-Verteilung

Die Anzahl der Anfragen, die einen Datenbankserver in einem Netzwerk erreichen sei Poisson-verteilt.
Im Mittel geht pro Sekunde $\mu = 1$ Datenbankabfrage ein.
Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass in einer Sekunde folgende Anzahl an Datenbankabfragen eingehen?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

Antwort:

a) $P(X = 0) = \frac{1^0}{0!} \times e^{-1} = 0.3679$
b) $P(X = 1) = \frac{1^1}{1!} \times e^{-1} = 0.3679$
c) $P(X = 2) = \frac{1^2}{2!} \times e^{-1} = 0.1839$
d) $P(X = 3) = \frac{1^3}{3!} \times e^{-1} = 0.0613$

15. Normalverteilung – Gauss-Verteilung

Definition Normalverteilung Die Dichte der Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Wobei $\boxed{\sigma > 0 \text{ und } \mu}$ beliebige Konstanten sind.
μ ist der höchste Punkt des Graphen.

Satz Wenn X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Dichte f (wie oben) ist, so gilt:

- Erwartungswert: $E(X) = \mu$
- Varianz: $Var(X) = \sigma^2$

Definition Standard-Normalverteilung

Die Dichte der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$ ist

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die standardisierte Zufallsvariable

$$X^* = \frac{X - E(x)}{\sqrt{Var(x)}}$$

hat den Erwartungswert $= 0$ und die Varianz $= 1$.

Verteilungsfunktion
Setzt man $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)dt$, so gilt

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(\infty) = 0.5$$

Für sonstige Werte von Φ schlägt man in der *Tabelle der Standard-Normalverteilung* nach.

Satz Ist X (die normalverteilte Zufallsvariable) $N(\mu, \sigma)$-verteilt, so gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = P \; \frac{a - \mu}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{b - \mu}{\sigma}$$

Beispiel Temperatur

Übung 1 Die Lufttemperatur im Juni sei normalverteilt mit Mittelwert $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ und Standardabweichung $3\,^{\circ}\mathrm{C}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Temperatur zwischen $a = 21\,^{\circ}\mathrm{C}$ und $b = 26\,^{\circ}\mathrm{C}$ liegt?

$$
\begin{aligned}
&P(21 \leq X \leq 26) \\
&= P(\frac{21-20}{3} \leq X^* \leq \frac{26-20}{3}) \\
&= P(0.33 \leq X^* \leq 2) \\
&\Leftrightarrow \Phi(2) - \Phi(0.33) \\
&= 0.4773 - 0.1293 \\
&= 0.348 \rightarrow 34,8\%
\end{aligned}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $34,8\%$ liegt die Temperatur im Juni zwischen $21\,^{\circ}\mathrm{C}$ und $26\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Übung 2 Die Lufttemperatur im August sei normalverteilt mit Mittelwert $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ und Standardabweichung $3\,^{\circ}\mathrm{C}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Temperatur zwischen $14\,^{\circ}\mathrm{C}$ und $29\,^{\circ}\mathrm{C}$ liegt?

$$
\begin{aligned}
&P(21 \leq X \leq 26) \\
&= P(\frac{21-20}{3} \leq X^* \leq \frac{26-20}{3}) \\
&= P(0.33 \leq X^* \leq 2) \\
&\Leftrightarrow \Phi(2) - \Phi(0.33) \\
&= 0.4773 - 0.1293 \\
&= 0.348 \rightarrow 34,8\%
\end{aligned}
$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $97,6\%$ liegt die Temperatur im August zwischen 14 und 29 Grad Celcius.

Übungen 8.5

8.5.1 und 8.5.3.