

Содержание

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Модулярная инвариантность | 1 |
| 2 | Конформные вложения | 3 |
| 3 | Конформные коэффициенты ветвления | 5 |

1 Модулярная инвариантность

Если мы изучаем конформную теорию поля на плоскости или на сфере, то мы можем рассматривать голоморфный и антиголоморфный сектора независимо. Если говорить о WZW-моделях, то примарные поля принадлежат тензорному произведению неприводимых представлений аффинной алгебры.

Если мы говорим о применении конформной теории для описания поведения струн, то теория должна быть определена на римановых поверхностях большего рода ($h > 0$), чтобы можно было описывать взаимодействия струн. Считается, что для этого необходимо (и, возможно, достаточно [1]) чтобы теория была определена на торе.

В теории критического поведения конформная инвариантность имеет место только в критической точке, где голоморфный и антиголоморфный сектора расцеплены. Но вблизи критической точки эти сектора должны быть связаны, и так как мы предполагаем плавный переход к критической точке в пространстве параметров, то эта связь должна сохраняться и в критической точке. Физический спектр теории должен плавно меняться, когда мы покидаем критическую точку, и связь голоморфного и антиголоморфного сектора вдали от критической точки должна приводить к ограничениям на набор состояний в критической точке. Этого можно достичь через геометрию, то есть накладывая граничные условия на состояния [2]. Здесь естественно рассматривать периодические граничные условия, которые эквивалентны рассмотрению теории на торе.

Если мы наложили периодические граничные условия с периодами ω_1, ω_2 , $\tau = \omega_2/\omega_1$, то статсумма записывается в виде

$$Z(\tau) = Tr \exp 2\pi i(\tau(L_0 - c/24) - \bar{\tau}(\bar{L}_0 - c/24)) \quad (1)$$

Или, если ввести $q = \exp 2\pi i\tau$

$$Z(\tau) = Tr \left(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right) \quad (2)$$

Двумерный тор представляет собой фактор пространство $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ по отношениям эквивалентности $z \sim z + w_1$ and $z \sim z + w_2$, где w_1 и w_2 не параллельны.

Разные параметризации тора связаны модулярными преобразованиями, таким образом возникает требование модулярной инвариантности статсуммы.

Комплексная структура такого тора конформно эквивалентна тору, для которого соотношения эквивалентности записываются в виде $z \sim z + 1$ и $z \sim z + \tau$, где τ в верхней полуплоскости \mathbb{C} .

Легко видеть, что τ , $T(\tau) = \tau + 1$ и $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ описывают конформно-эквивалентные торы. Отображения T и S порождают группу $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$, состоящую из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1, \quad (3)$$

и матрицы A и $-A$ действуют одинаково на τ

$$\tau \rightarrow A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (4)$$

τ называется модулярным параметром, а группа $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ — модулярной группой.

Конформная теория поля задаётся примарными полями Φ_a с конформными размерностями Δ_a :

$$\begin{aligned} \Phi_a(z) &\xrightarrow{z \rightarrow w(z)} \left(\frac{dw}{dz} \right)^{\Delta_a} \Phi_a(w(z)) \\ L_n \Phi_a &= 0, \quad n > 0 \\ L_0 \Phi_a &= \Delta_a \Phi_a \end{aligned} \quad (5)$$

Примарные поля живут в пространствах $\mathcal{H}_{(i,j)}$, которые представляют собой тензорные произведения неприводимого представления \mathcal{H}_j киральной алгебры и неприводимого представления $\bar{\mathcal{H}}_{\bar{j}}$ антикиральной алгебры. Тогда статсуммы на торе (2) может быть переписана в виде

$$\sum_{(j,\bar{j})} \chi_j(q) \bar{\chi}_{\bar{j}}(\bar{q}) \quad (6)$$

где χ_j — характер представления \mathcal{H}_j ,

$$\chi_j(\tau) = Tr_{\mathcal{H}_j}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}) \quad \text{где } q = e^{2\pi i \tau} \quad (7)$$

Характеры переходят друг в друга при модулярных преобразованиях:

$$\chi_j \left(-\frac{1}{\tau} \right) = \sum_k S_{jk} \chi_k(\tau) \quad \text{и} \quad \chi_j(\tau + 1) = \sum_k T_{jk} \chi_k(\tau), \quad (8)$$

где S и T — постоянные матрицы. Это верно для большого класса конформных теорий поля [1].

Для WZW-моделей представления определяются старшими весами $\hat{\lambda}, \hat{\xi}$. Тогда

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\hat{\lambda}, \hat{\xi} \in P_+^{(k)}} M_{\hat{\lambda}, \hat{\xi}} L_{\hat{\lambda}} \otimes L_{\hat{\xi}} \quad (9)$$

Статсумма даётся выражением

$$Z(\tau) = \sum_{\hat{\lambda}, \hat{\xi} \in P_+^{(k)}} \chi_{\hat{\lambda}}(\tau) M_{\hat{\lambda}, \hat{\xi}} \bar{\chi}_{\hat{\xi}}(\bar{\tau}) \quad (10)$$

Элементы так называемой матрицы масс $M_{\hat{\lambda}, \hat{\xi}}$ можно рассматривать как кратности примарных полей с весами $\hat{\lambda}, \hat{\xi}$. У них есть следующие свойства: $M_{\hat{\lambda}, \hat{\xi}} \in \mathbb{Z}_+$, модулярная инвариантность

$$\begin{aligned} T^\dagger M T &= S^\dagger M S = M, \\ [M, S] &= [M, T] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и $M_{00} = 1$ для единственности вакуума.

Простейший случай диагональной матрицы M соответствует равным голоморфным и антиголоморфным конформным размерностям. Есть несколько способов построения недиагональных модулярных инвариантов из диагональных [2]:

- Метод внешних автоморфизмов
- Конформное вложение в большую теорию
- Перестановки Галуа

Мы будем обсуждать только конформные вложения.

2 Конформные вложения

Состояния в теории соответствующей алгебре g (с киральной алгеброй $Vir \ltimes \hat{g}$) имеют вид

$$J_{-n_1}^{a_1} J_{-n_2}^{a_2} \dots |\lambda\rangle \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots > 0 \quad (12)$$

А для подалгебры $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$

$$\tilde{J}_{-n_1}^{a'_1} \tilde{J}_{-n_2}^{a'_2} \dots |\mathcal{P}\lambda\rangle \quad (13)$$

Здесь $\tilde{J}_{-n_j}^{a'_j}$ — генераторы \mathfrak{p} , а \mathcal{P} — проекция \mathfrak{g} на \mathfrak{p} . Очевидно, что \mathfrak{g} -инвариантность вакуума ведёт к его \mathfrak{p} -инвариантности, но нет оснований считать, что проекция сохраняет конформную инвариантность. Это легко увидеть из рассмотрения тензора энергии - импульса. Действительно, в тензоре энергии - импульса в виде Сугавары можно выделить часть, составленную из тех комбинаций генераторов g , которые входят в p . Но есть ещё и остаток. Из-за него действие генераторов Вирасоро на состояния (13) будет выводиться из этого набора. Таким образом в ситуации общего положения конформная инвариантность нарушается.

Однако есть исключения. Так для представлений уровня 1 simply-laced алгебр тензор энергии - импульса в форме Сугавары состоит только из генераторов Картана. В этом случае он может быть пере-выражен через генераторы подалгебры и конформная инвариантность сохраняется. Тогда $T_{\hat{\mathfrak{g}}_k} = T_{\hat{\mathfrak{p}}_{\tilde{k}}} \Rightarrow c(\hat{\mathfrak{g}}_k) = c(\hat{\mathfrak{p}}_{\tilde{k}})$. Это можно переписать в виде равенства

$$\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + g} = \frac{x_e k \dim \mathfrak{p}}{x_e k + p} \quad (14)$$

Где x_e - индекс вложения, а g, p - дуальные числа Кокстера соответствующих алгебр и было использовано равенство $\tilde{k} = x_e k$.

$$x_e = \frac{|\mathcal{P}\Theta_g|^2}{|\Theta_p|^2}, \quad x_e = \sum_{\mu \in P_+} b_{\lambda\mu} \frac{x_\mu}{x_\lambda} \quad (15)$$

(Здесь x_λ - индекс представления со старшим весом λ :

$$x_\lambda = \frac{\dim |\lambda| (\lambda, \lambda + \rho)}{2 \dim g} \quad (16)$$

)

Вложения, которые удовлетворяют условию (14), называются конформными.

Нетрудно показать, что решения уравнения (14) существуют только для уровня $k = 1$.

(Существует конечное число конформных вложений, они классифицированы).

Примеры

- $su(2) \subset su(3)$, $x_e = 4$

- $\hat{su}(2)_{10} \subset \hat{sp}(4)_1$
- $\hat{su}(2)_{28} \subset (\hat{G}_2)_1$
- $\hat{su}(2)_{16} \oplus \hat{su}(3) \subset (\hat{E}_8)_1$

3 Конформные коэффициенты ветвления

Для ветвления аффинных алгебр $\hat{\lambda} \rightarrow \bigoplus_{\hat{\mu}} b_{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \hat{\mu}$ существуют разные алгоритмы, однако мы можем существенно сократить работу при рассмотрении конформных вложений.

Во-первых, заметим, что если коэффициент $b_{\hat{\lambda}\hat{\mu}}$ отличен от нуля, то конечная часть старшего веса μ модуля $L_{\hat{\mu}}$ находится в некотором грейде n бесконечномерного модуля $L_{\hat{\lambda}}$ уровня 1. Сохранение конформной инвариантности ведет к соотношению для конформных размерностей соответствующих полей

$$\Delta_{\hat{\lambda}} + n = \Delta_{\hat{\mu}}, \quad (17)$$

которое переписывается в виде

$$\frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(1 + g)} + n = \frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(x_e + p)} \quad (18)$$

Используя этот факт можно легко вычислять правила ветвления. Для этого надо вычислить размерности интегрируемых представлений обеих алгебр \mathfrak{g} , \mathfrak{p} и найти все тройки (λ, μ, n) , удовлетворяющие соотношению (18). Затем рассматриваем разложения представления $L_{\hat{\lambda}}$ в грейде n в сумму неприводимых представлений конечномерной алгебры \mathfrak{g} и выписываем правила ветвления этих представлений на представления подалгебры \mathfrak{p} . Коэффициент ветвления $b_{\hat{\lambda},\hat{\mu}}$ — это сколько раз представление со старшим весом μ появляется в этом списке.

Пример

$\hat{su}(2)_4 \subset \hat{su}(3)_1$. Список конформных размерностей:

$$\begin{aligned} \hat{su}(2)_4 : h_{[4,0]} = 0, h_{[3,1]} = \frac{1}{8}, h_{[2,2]} = \frac{1}{3}, h_{[1,3]} = \frac{5}{8}, h_{[0,4]} = 1 \\ \hat{su}(3)_1 : h_{[1,0,0]} = 0, h_{[0,1,0]} = h_{[0,0,1]} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} [1, 0, 0] &\rightarrow c_1[4, 0]_0 \oplus c_2[0, 4]_1 \\ [0, 1, 0] &\rightarrow c_3[2, 2]_0 \\ [0, 0, 1] &\rightarrow c_4[2, 2]_0 \end{aligned} \quad (20)$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 - коэффициенты, которые надо найти, а нижний индекс указывает грейд n .

Коэффициенты c_1, c_3, c_4 вычисляются из правил ветвления в нулевом грейде. В этом грейде $L_{\hat{\lambda}}$ содержит только L_{λ} . Из правил ветвления

$$(0, 0) \rightarrow (0), \quad (1, 0) \rightarrow (2), \quad (0, 1) \rightarrow (2) \quad (21)$$

мы получаем, что $c_1 = c_3 = c_4 = 1$. c_2 вычисляется из представления грейда 1, содержащего конечномерное представление $(1, 1)$ с правилом ветвления

$$(1, 1) \rightarrow (4) \oplus (2) \quad (22)$$

То есть c_2 тоже равен 1.

После нахождения коэффициентов ветвления, недиагональные модулярные инварианты строятся путем подстановки соотношений для характеров. Например, зная коэффициенты ветвления для вложения $\hat{su}(2)_{28} \subset (\hat{G}_2)_1$

$$\begin{aligned} [1, 0, 0] &\rightarrow [28, 0] \oplus [18, 10] \oplus [10, 18] \oplus [0, 28] \\ [0, 0, 1] &\rightarrow [22, 6] \oplus [16, 12] \oplus [12, 16] \oplus [6, 22] \end{aligned} \quad (23)$$

мы получаем следующую модулярно-инвариантную статсумму:

$$Z = \left| \chi_{[28,0]} + \chi_{[18,10]} + \chi_{[10,18]} + \chi_{[0,28]} \right|^2 + \left| \chi_{[22,6]} + \chi_{[16,12]} + \chi_{[12,16]} + \chi_{[6,22]} \right|^2 \quad (24)$$

Список литературы

- [1] M. Gaberdiel, “An introduction to conformal field theory,” *Reports on Progress in Physics* **63** (2000) no. 4, 607–668, [hep-th/9910156](#).
- [2] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.