Integrales trigonométricas

Es importante tener en cuenta los siguientes relaciones

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$$
$$\text{sen } 2x = 2\cdot\text{sen } x\cdot\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$
$$\text{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\text{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\text{cox}}{1+\cos x}}$$

A partir de la ecuación fundamental y la del coseno del ángulo doble, se puede obtener una expresión para el seno y coseno cuadrado en función del coseno del ángulo doble, muy útiles en las integrales del tipo

$$\int \text{sen}^n x\cdot dx \text{ ó } \int \cos^n x\cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \text{Sumando}: 2\cdot\cos^2 x = 1 + \cos 2x & \text{despejando} & \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \text{Restando}: 2\cdot\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x & \text{despejando} & \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{array}\right.$$

- Integrales del tipo $\int \text{sen}^m x\cdot\cos^n x\cdot dx$ siendo m y n números enteros, presenta dos casos diferentes

1) Sí al menos m ó n son impares. En este caso el impar se decompone en par más uno y se hace el cambio del la par igual a t

Ejemplo 1. $\int \text{sen}^5 x\cdot\cos^2 x\cdot dx = \int \text{sen}^4 x\cdot\text{sen } x\cdot\cos^2 x\cdot dx = \int \left(\text{sen}^2 x\right)^2\cdot\text{sen } x\cdot\cos^2 x\cdot dx =$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2\cdot\text{sen } x\cdot\cos^2 x\cdot dx = \left\{\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\text{sen } x\cdot dx = dt \end{array}\right\} = \int \left(1-t^2\right)^2\cdot t^2\cdot(-dt) = -\int \left(t^2 - 2\cdot t^4 + t^6\right)\cdot dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{2\cdot t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \{t = \cos x\} = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cdot\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

Ejemplo 2. $\int \text{sen}^3 x\cdot\cos^3 x\cdot dx = \int \text{sen}^3 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\cdot dx = \int \text{sen}^3 x\cdot\left(1-\text{sen}^2 x\right)\cos x\cdot dx = \left\{\begin{array}{c} \text{sen } x = t \\ \cos x\cdot dx = dt \end{array}\right\} =$

$$= \int t^3\cdot\left(1-t^2\right)\cdot dt = \int \left(t^3 - t^5\right)\cdot dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \{t = \text{sen } x\} = \frac{\text{sen}^4 x}{4} - \frac{\text{sen}^6 x}{6} + C$$

2) Si m y n son pares se tienen en cuenta $\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \end{cases}$ y aplicando las potencias necesarias se desarrolla la expresión

Ejemplo 3. $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)^2 dx =$

$$= \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)\cdot\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(1-\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \\ \cos^3 2x = \cos 2x\cdot\cos^2 2x = \cos 2x\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right) \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int\left(1-\cos 2x-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)-\cos 2x\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right)\right)dx =$$

$$\left\{ \int\left(1-\operatorname{sen}^2 2x\right)\cdot\cos 2x\cdot dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen}2x = t \\ \cos 2x\cdot 2 = dt \\ \cos 2x = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int\left(1-t^2\right)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C = \{t=\operatorname{sen}2x\} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}\right)+C \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x\right)-\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}\right)\right]+C$$

- Integrales del tipo $\int \operatorname{sen} mx\cdot\cos nx\cdot dx$ siendo m y n números enteros, se transforman en sumas de senos y cosenos mediante las transformaciones de sumas en productos:

$$\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

haciendo los cambios:

$$\frac{A+B}{2} = mx \qquad \frac{A+B}{2} = nx$$

se obtienen las transformaciones inversas, de productos a sumas

$$\begin{cases} \operatorname{sen} mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m-n)\cdot x+\operatorname{sen}(m+n)\cdot x\right] \\ \operatorname{sen} mx\cdot\operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)\cdot x-\cos(m+n)\cdot x\right] \\ \cos mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)\cdot x+\cos(m+n)\cdot x\right] \end{cases}$$

Ejemplo 3.

$$\int \operatorname{sen}5x\cdot\cos 3x\cdot dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen}5x\cdot\cos 3x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(5x-3x)+\operatorname{sen}(5x+3x)\right] \\ \operatorname{sen}5x\cdot\cos 3x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}8x\right] \end{array} \right\} = \int\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}8x\right]\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 8x\right)+C$$

- Si en la integral aparece una expresión algebraica de funciones Trigonométricas a la que no se le pueda aplicar lo anterior, por lo general se pueden transformar en expresiones racionales mediante le cambio de variable $t\left(\frac{x}{2}\right)=t$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \xrightarrow{\text{diferenciando}} \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot dx = dt$$

despejando dx

$$dx=\frac{2\cdot dt}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

sustituyendo $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ por t, se obtiene la expresión de dx en función e t.

$$dx=\frac{2\cdot dt}{1+t^2}$$

A partir de la ecuación de cambio de variable, se pueden obtener las expresiones de sen x y cos x en función de t

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{x}{2}&=t\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}&=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=t^2$$

despejando cos x

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

a partir de la ecuación fundamental de la trigonometría se obtiene la expresión de sen x en función de t

$$\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=\frac{4\cdot t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$\sin x=\frac{2\cdot t}{1+t^2}$$

Cambio de variable:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\sin x&=\frac{2\cdot t}{1+t^2}\\ \cos x&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dt&=\frac{2\cdot dt}{1+t^2}\end{aligned}\right.$$

Ejemplo 3.

$$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\left\{\begin{aligned}t\frac{x}{2}&=t\\ \cos x&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dt&=\frac{2\cdot dt}{1+t^2}\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\cdot dt}{1+t^2}=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\cdot dt}{1+t^2}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=\int\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=-t+2\cdot\operatorname{arctg} t+C=\left\{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\}=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\cdot\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+C$$