Integración por partes

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Normas para la aplicación de la formula de integración por partes:

a) A una parte de la integral le debemos llamar u y al resto dv
b) Debemos escoger dv, una parte que sea fácilmente integrable puesto que $\int dv = v$ y necesitamos v para aplicar la formula.
c) La integral que resulta $\int v \cdot du$ debe ser más sencilla que la propuesta.
d) En algunos casos se deberá aplicar partes más de una vez.

Casos más frecuentes de aplicación de la integración por partes:

a) Función polinómica (u) por función exponencial (dv)
b) Función polinómica (u) por función trigonométrica. (dv)
c) Función polinómica (dv) por función inversa de trigonométrica (u)
d) Función polinómica (dv) por función logarítmica (u).
e) Función logarítmica (u) dv = dx
f) Funciones inversas de los trigonométricos (u) dv = dx
g) Funciones trigonométricas por funciones exponenciales.

a) $$\int P(x) \cdot e^{ax} \cdot dx : \left\{ \begin{array}{l} u = P(x); \quad du = P'(x) \cdot dx \\ dv = e^{ax} \cdot dx; \quad v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right\}$$

b) $$\int P(x) \cdot \text{sen}\, ax \cdot dx : \left\{ \begin{array}{c} u = P(x); \quad du = P'(x) \cdot dx \\ dv = \text{sen}\, ax \cdot dx; \quad v = \frac{-1}{2} \text{sen}\, ax \end{array} \right\}$$

c) $$\int P(x) \cdot \cos ax \cdot dx : \left\{ \begin{array}{c} u = P(x); \quad du = P'(x) \cdot dx \\ dv = \cos ax \cdot dx; \quad v = \frac{1}{a} \text{sen}\, ax \end{array} \right\}$$

d) $$\int P(x) \cdot \text{Ln}\, x \cdot dx : \left\{ \begin{array}{c} u = \text{Ln}\, x; \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = P(x) \cdot dx; \quad v = \int P(x) \cdot dx \end{array} \right\}$$

e) $$\int P(x) \cdot \text{arctg}\, x \cdot dx : \left\{ \begin{array}{c} u = \text{arctg}\, x; \quad du = \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx \\ dv = P(x) \cdot dx; \quad v = \int P(x) \cdot dx \end{array} \right\}$$

f) $$\int P(x) \cdot \text{arcsen}\, x \cdot dx : \left\{ \begin{array}{c} u = \text{arcsen}\, x; \quad du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx \\ dv = P(x) \cdot dx; \quad v = \int P(x) \cdot dx \end{array} \right\}$$

Ejemplos 1.

$$\int \mathrm{Ln}\,x\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \mathrm{Ln}\,x; \quad du = \frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx; \quad v = x \end{matrix}\right\} = x\cdot \mathrm{Ln}\,x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\cdot \mathrm{Ln}\,x - \int dx = x\cdot \mathrm{Ln}\,x - x + C$$

Ejemplo2.

$$\int \mathrm{arctg}\,x\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \mathrm{arctg}\,x; \quad du = \frac{1}{1+x^2}\cdot dx \\ dv = dx; \quad v = x \end{matrix}\right\} = x\cdot \mathrm{arctg}\,x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot dx = x\cdot \mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}\cdot dx =$$

$$x\cdot \mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{Ln}\left|1+x^2\right| + C$$

Ejemplo 3.

$$\int x^2\cdot e^{3x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; \quad du = 2x\cdot dx \\ dv = e^{3x}\cdot dx; \quad v = \frac{1}{3}\cdot e^{3x} \end{matrix}\right\} = x^2\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3}\cdot e^{3x}\cdot 2x\cdot dx = \frac{x^2\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x\,e^{3x}\cdot dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^{3x}\cdot dx; \quad v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix}\right\} = \frac{x^2\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\left[x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot dx\right] = \frac{x^2\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2x\cdot e^{3x}}{9} + \frac{2}{9}\int e^{3x}\cdot dx =$$

$$= \frac{x^2\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2x\cdot e^{3x}}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{e^{3x}}{27}\cdot(9x^2 - 6x + 2) + C$$

Un tipo especial de integrales por partes son las de función exponencial por función trigonométrica, cuya principal propiedad es que son iterativas.

Ejemplo 4.

$$\int \cos x\cdot e^{2x}\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \cos x; \quad du = -\mathrm{sen}\,x\cdot dx \\ dv = e^{2x}\cdot dx; \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\} = \cos x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(-\mathrm{sen}\,x)\,dx =$$

$$= \frac{\cos x\cdot e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,x\,e^{2x}\cdot dx = \left\{\begin{matrix} u = \mathrm{sen}\,x; \quad du = \cos x\cdot dx \\ dv = e^{2x}\cdot dx; \quad v = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{e^{2x}\cdot\cos x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left[\mathrm{sen}\,x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x} - \int \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\cos x\cdot dx\right] = \frac{e^{2x}\cdot\cos x}{2} + \frac{e^{2x}\mathrm{sen}\,x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cdot\cos x\cdot dx$$

igualando con la integral inicial, queda:

$$\int e^{2x}\cos x\cdot dx = \frac{e^{2x}\cdot\cos x}{2} + \frac{e^{2x}\cdot\mathrm{sen}\,x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\int e^{2x}\cos x\cdot dx$$

Pasando la integral del segundo miembro al primero, sumando y despejando queda:

$$\int e^{2x}\cos x\cdot dx = \frac{4}{5}\left[\frac{e^{2x}\cdot\cos x}{2} + \frac{e^{2x}\cdot\mathrm{sen}\,x}{4}\right] + C$$

expresión que simplificada queda de la forma:

$$\int e^{2x}\cos x\cdot dx = \frac{e^{2x}}{5}\cdot(2\cos x + \mathrm{sen}\,x) + C$$