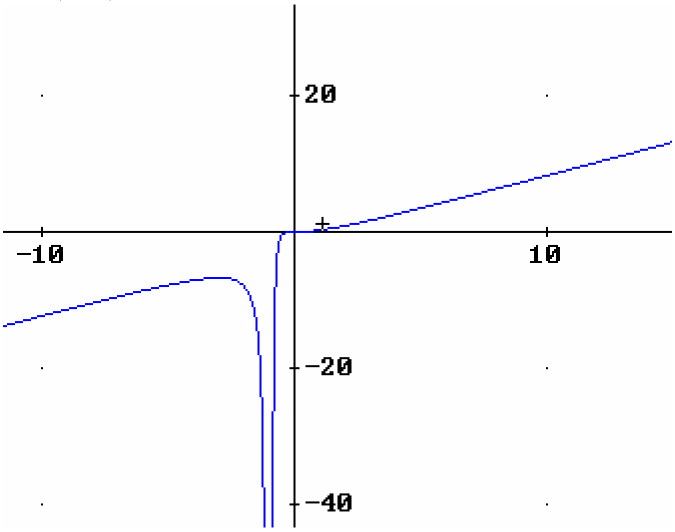
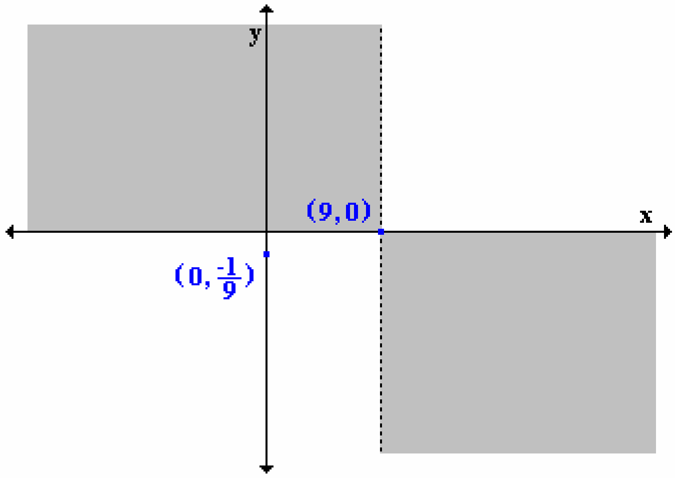
Representar la función:

$$y = \frac{x^3}{(1+x)^2}$$



$$f(x)=\frac{e^{4x}}{x-9}$$

1. Dominio: $R-\{9\}$. Simetría no tiene
2. Cortes con los ejes:
   - OX: $y=0.\ \frac{e^{4x}}{x-9}=0: e^{4x}=0: x=-\infty\notin R$ no lo corta
   - OY: $x=0$: $y=\frac{e^{4\cdot 0}}{0-9}=-\frac{1}{9}$ Punto de corte $\left(0,-\frac{1}{9}\right)$
3. Signo de la función. $\begin{cases}\text{Ceros: No tiene} & (-\infty,9): f(x)<0. \text{ Dibujada por debajo de OX}\\ \text{Polos: } x=9 & (9,+\infty): f(x)>0 \text{ Dibujada por encima de OX}\end{cases}$



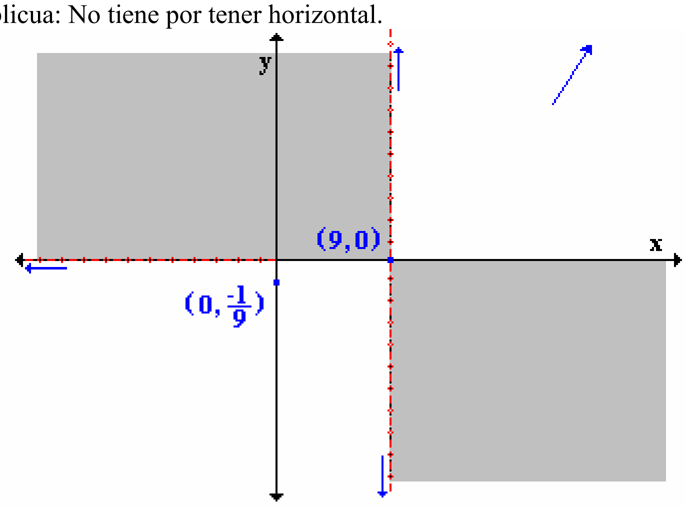
4. Asíntotas
   - Verticales: Los posibles puntos de asíntota vertical son los excluidos del dominio, y en ellos habrá asíntota vertical sí el límite vale $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 9}\frac{e^{4x}}{x-9}=\frac{e^{36}}{0}=\infty:\begin{cases}\lim_{x\to 9^-}\frac{e^{4x}}{x-9}=\frac{e^{36}}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to 9^+}\frac{e^{4x}}{x-9}=\frac{e^{36}}{0^+}=+\infty\end{cases}$$ Asíntota vertical en $x=9$.

   - Horizontal: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{4x}}{x-9}=\frac{e^{4\cdot(-\infty)}}{-\infty-9}=\frac{0}{-\infty}=0$ Asíntota horizontal $y=0$ hacia $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x-9}\underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}\cdot 4}{1}=\infty$. Hacia $+\infty$ no hay asíntota horizontal

   - Oblicua: No tiene por tener horizontal.



5. Estudio de la primera derivada

$$f'(x) = \frac{e^{4x} \cdot 4 \cdot (x-9) - e^{4x} \cdot 1}{(x-9)^2} = \frac{e^{4x} \cdot (4x-37)}{(x-9)^2}$$

Signo de f '(x): $\begin{cases} \left(-\infty, \frac{37}{4}\right) : f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{Decreciente} \\ \left(\frac{37}{4}, -\infty\right) : f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{Cecreciente} \end{cases}$

En $x = \frac{37}{4}$ se dan las condiciones de mínimo.

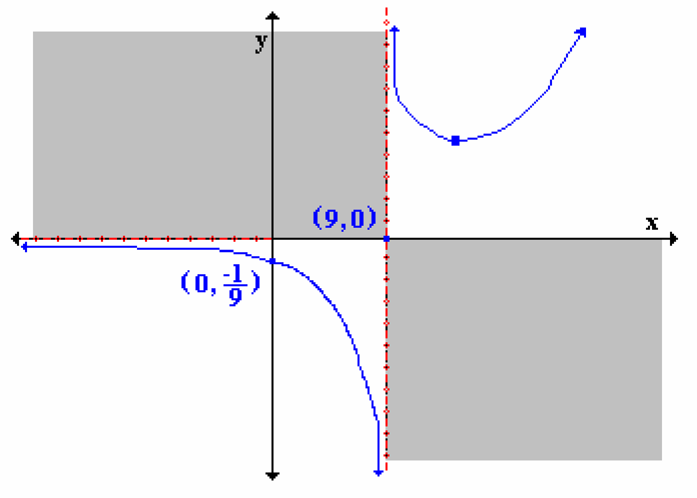
6. Estudio de la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2 \cdot e^{4x}\left(8x^2 - 148x + 685\right)}{(x-9)^3}$$

Nunca se hace cero, por lo tanto no tiene puntos de inflexión, y el signo solo depende de denominador.

$(-\infty, 9) : f''(x) < 0.$ Concava hacia arriba

$(9, +\infty) : f''(x) > 0$ Concava hacia abajo



$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$$

- Dominio: La función exponencial siempre es positiva y nunca se anula

$$e^x > 0 \;\; \forall\, x \in R \Rightarrow D[f(x)] = R$$

- Cortes con OX: $y = 0; \; \frac{x^2 + 2x}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 : \begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = -2 \to (-2, 0) \end{cases}$

- Signo de la función:

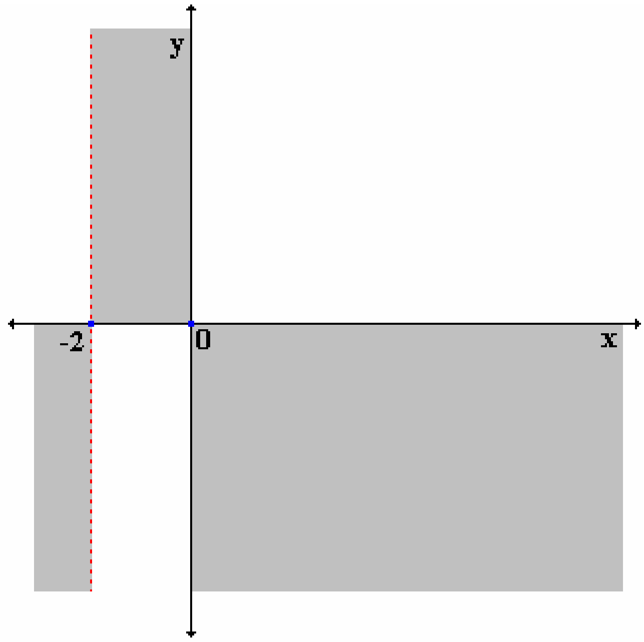
Teniendo en cuenta que la exponencial siempre es positiva, el signo de la función coincide con el signo del polinomio del numerador.

$$\text{Signo}(f(x)) = \text{Signo}\left(\frac{x^2 + 2x}{e^x}\right) = \text{Signo}(x^2 + 2x) = \text{Signo}[(x+2)\cdot x]$$

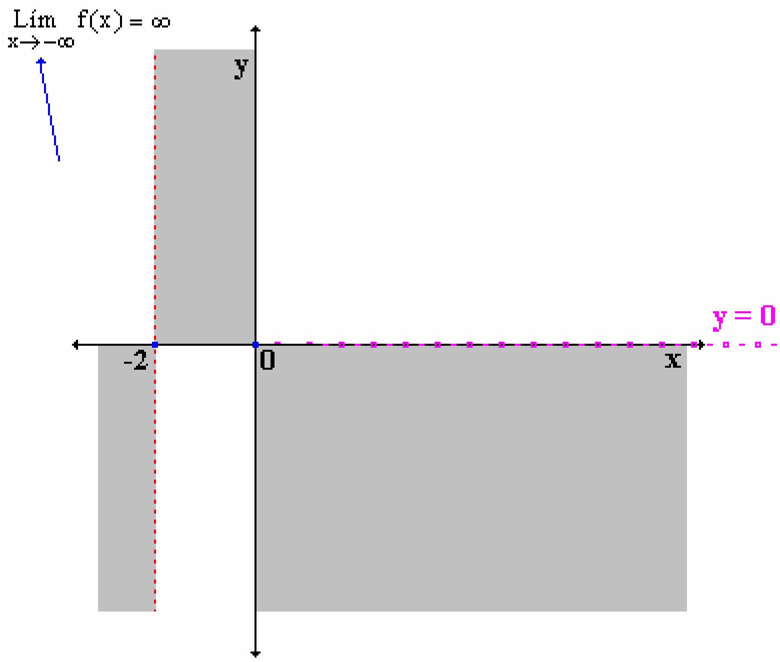
Estudiando el signo de la función se obtiene el siguiente resultado

$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
+		–		+

El signo estudia la posición de la gráfica respecto del eje OX



- Asíntotas:
  - Verticales: No tiene, el dominio es todo R
  - Horinzontales: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} \underset{L'H}{\overset{(\infty/\infty)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{e^x} \underset{L'H}{\overset{(\infty/\infty)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = \frac{(-\infty)^2+2(-\infty)}{e^{-\infty}} = \infty \cdot e^\infty = \infty \end{cases}$. Tiene una asíntota horizontal en y = 0 (eje OX) cuando x tiende a +∞.
  - Oblicuas: No tiene por tener horizontales



- Estudio de y’:

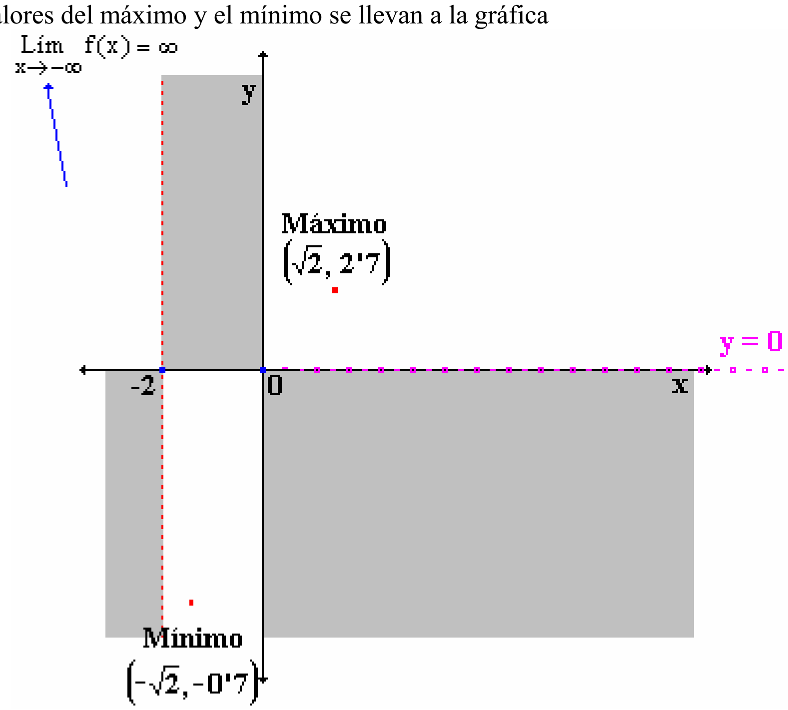
$$y' = \frac{(2x+2)\cdot e^x - (x^2+2x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+2}{e^x}$$

Ceros y polos de y’: $\begin{cases} \text{Ceros}: -x^2+2=0 : x=\pm\sqrt{2} \\ \text{Polos}: \text{No tiene} \end{cases}$

Estudio del signo y los ceros de la derivada:

$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
$y'<0$		$y'>0$		$y'<0$
f(x) Decrec.		f(x) Crec.		f(x) Decrec.
	$y'=0$		$y'=0$	
	Mínimo		Máximo	
	$(-\sqrt{2}, y(-\sqrt{2}))$		$(\sqrt{2}, y(\sqrt{2}))$	
	$(-\sqrt{2}, -0'7)$		$(\sqrt{2}, 2'7)$	

Los valores del máximo y el mínimo se llevan a la gráfica

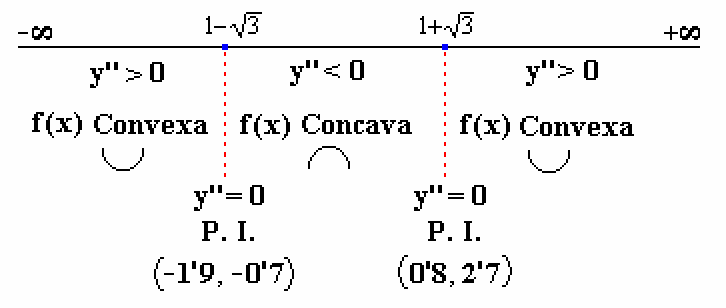


- Estudio de y'':

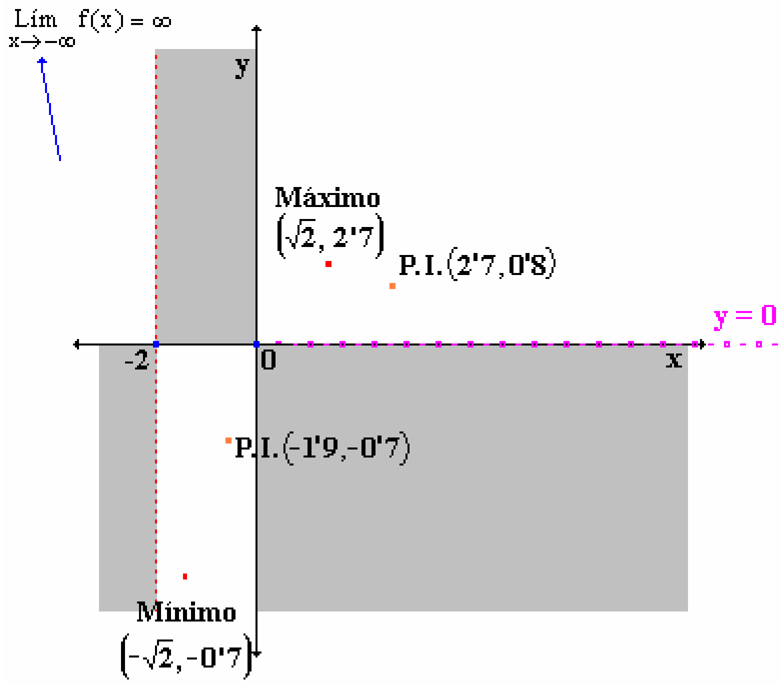
$$y'' = \frac{-2x \cdot e^x - \left(-x^2+2\right) \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{x^2-2x-2}{e^x}$$

Ceros y polos de y': $\begin{cases} \text{Ceros}: x^2-2x-2: \begin{cases} x = 1-\sqrt{3} \approx -0'7 \\ x = 1+\sqrt{3} \approx 2'7 \end{cases} \\ \text{Polos}: \text{No tiene} \end{cases}$

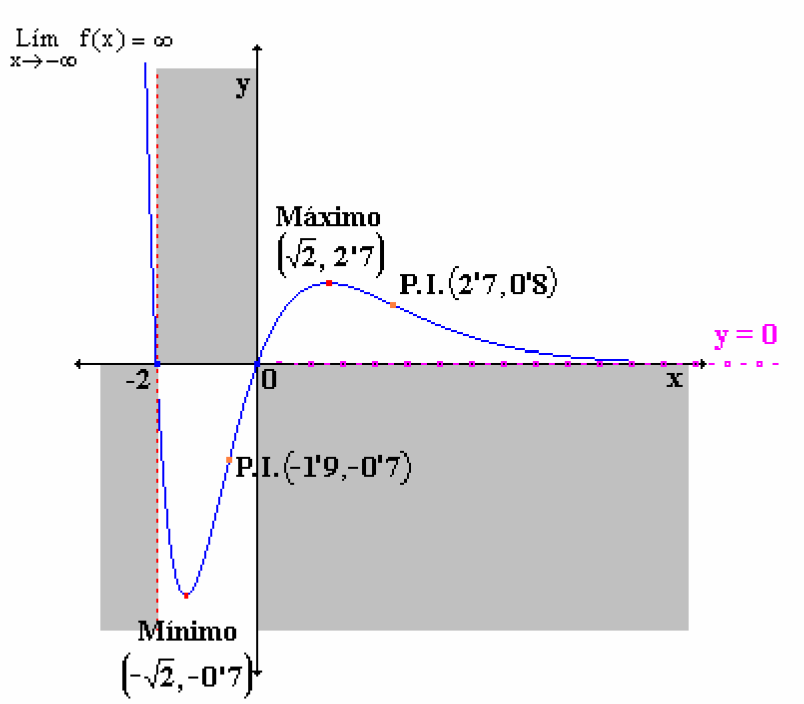
Signo de y'' = $\text{Signo}\left(\frac{x^2-2x-2}{e^x}\right) = \text{Signo}\left(x^2-2x-2\right)$



Pasando la información de la segunda derivada a la gráfica:



- Gráfica de la función:



$$y = f(x) = \text{Ln}\,\frac{x-3}{x-1}$$

- Dominio: $D[f(x)] = \left\{x \in R \,/\, \frac{x-3}{x-1} > 0\right\}$

$$D[f(x)] = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

- Cortes con los ejes:

– OX: No lo corta, para x = 3 no existe la función.

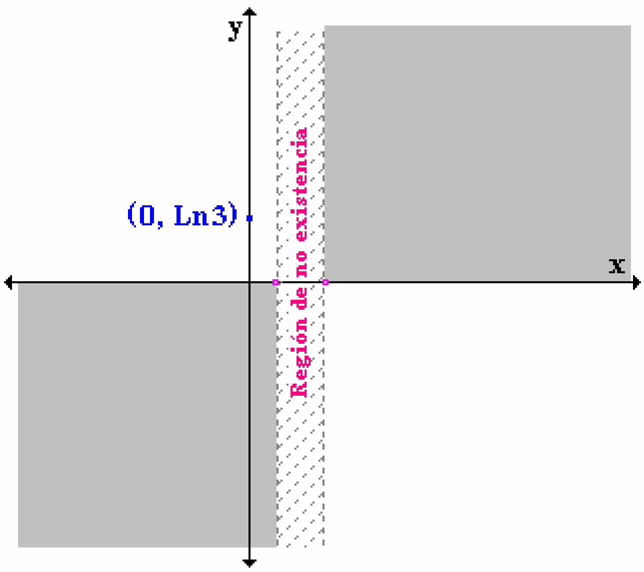
– OY: $x = 0;\ y = \text{Ln}\,\frac{0-3}{0-1} = \text{Ln}\,3 \Rightarrow (0, \text{Ln}\,3)$

- Signo de f(x)

La función logaritmo neperiano es positiva para números reales mayores de 1 y negativa para números reales comprendidos entre 0 y 1.

Sí $x \in (-\infty, 1) \ \Rightarrow \ \frac{x-3}{x-1} > 1 \Rightarrow \text{Ln}\,\frac{x-3}{x-1} > 0$

Sí $x \in (3, +\infty) \ \Rightarrow \ 0 < \frac{x-3}{x-1} < 1 \Rightarrow \text{Ln}\,\frac{x-3}{x-1} < 0$



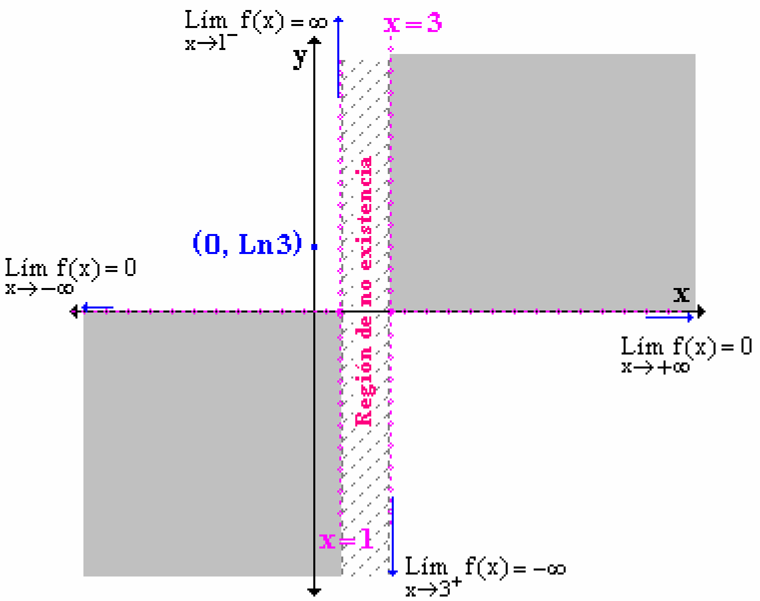
- Asíntotas

– Verticales:

$$\begin{cases} \text{Cuando } x \to 1^- : \lim\limits_{x\to 1^-} \text{Ln}\dfrac{x-3}{x-1} = \text{Ln}\left(\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-3}{x-1}\right) = \text{Ln}\dfrac{1-3}{1^- -1} = \text{Ln}\dfrac{-2}{0^-} = \text{Ln}\,\infty = \infty \\ \text{Cuando } x \to 3^+ : \lim\limits_{x\to 3^+} \text{Ln}\dfrac{x-3}{x-1} = \text{Ln}\left(\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-1}\right) = \text{Ln}\dfrac{3^+ -3}{3-1} = \text{Ln}\dfrac{0}{2} = \text{Ln}\,0 = -\infty \end{cases}$$

– Horizontales: $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \text{Ln}\dfrac{x-3}{x-1} = \text{Ln}\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-3}{x-1}\right) = \text{Ln}\,1 = 0$ El eje OX es asíntota horizontal

– Oblicuas: No tiene por tener horizontal



- Estudio de y'

$$y = \text{Ln}\frac{x-3}{x-1} = \text{Ln}(x-3) - \text{Ln}(x-1)$$

$$y' = \frac{1}{x-3}\cdot 1 - \frac{1}{x-1}\cdot 1 = \frac{2}{(x-3)\cdot(x-1)} \qquad \forall\, x \in D[f(x)]:\ \ y' > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es Creciente}$$

La función no presenta extremos relativos

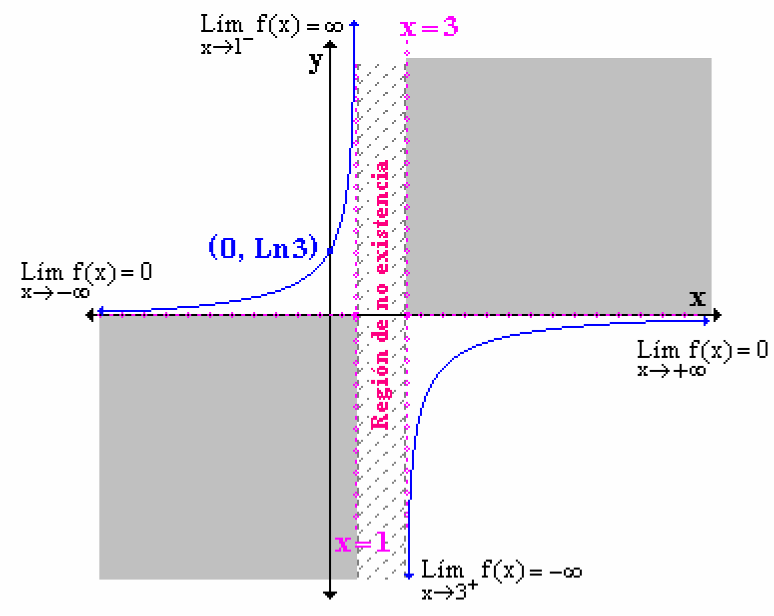
- Estudio de y''

$$y' = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$y'' = \frac{-2\cdot(2x-4)}{\left(x^2-4x+3\right)^2} : \begin{cases} \text{Ceros}: 2x - 4 = 0 : x = 2 \notin D[f(x)] \\ \text{Polos}: \text{Por estar elevados al cuadrado no influyen en el signo de } y'' \end{cases}$$

$$\text{Signo de } y'': \begin{cases} \text{Si } x \in (-\infty, 1) \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es convexa}(\cup) \\ \text{Si } x \in (3, +\infty) \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es concava}(\cap) \end{cases}$$

- Gráfica de la función



$$y = f(x) = \frac{x}{\text{Ln } x}$$

- Dominio.

$$D = \{x \in R \mid x \geq 0 \text{ y Ln } x \neq 0\} = [0, +\infty) - \{1\}$$

- Cortes con los ejes.

- Signo de f (x).

- Asíntotas.

- Estudio de y’.

- Estudio de y’’.