# PLANOS soluciones

**1.** Sea π el plano cuya determinación lineal es el punto A(−1, 2, 3) y los vectores $\vec{u}$ = (−1, 4, 5), $\vec{v}$ =(2, −2, 7). Determinar la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de π.

**Solución**

La mínima determinación lineal de un plano son dos vectores paralelos al plano y un punto del plano.
Ecuación vectorial:

$$\pi \equiv (x, y, z) = (-1,2,3) + (-1,4,5)\cdot\lambda + (2,-2,7)\cdot\mu$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 4\lambda - 2\mu \\ z = 3 + 5\lambda + 7\mu \end{cases}$$

Ecuación general:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por los elementos de la 1ª fila

$$\pi \equiv (x+1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + (z-3)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

operando los determinantes y ordenando

$$\pi \equiv 38x + 17y - 6z + 22 = 0$$

**2.** Sea π el plano de ecuaciones: $\begin{cases} x = 5 + 3t - 2s \\ y = -2 + 4t - 5s \\ z = 6 - t + s \end{cases}$. Determinar:

a) Dos puntos del plano π.
b) Dos rectas secantes contenidas en π.
c) Ecuación general de π.

**Solución**

De la ecuaciones paramétricas de un plano se pueden obtener dos vectores linealmente independientes paralelos al plano y un punto del plano. Del plano π se obtiene: $\pi \equiv \begin{cases} A = (5,-2,6) \\ \vec{u} = (3,4,-1) \\ \vec{v} = (-2,-5,1) \end{cases}$

a) Dos puntos del plano: $\begin{cases} t = 0; s = 0 : A = (5,-2,6) \\ t = 1; s = 0 : A' = (8,2,5) \end{cases}$

b) $r \equiv \begin{cases} A = (5,-2,6) \\ \vec{u} = (3,4,-1) \end{cases} : \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-6}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} A = (5,-2,6) \\ \vec{v} = (-2,-5,1) \end{cases} : \dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y+2}{-5} = \dfrac{z-6}{1}$

c) $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z-6 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ desarrollando por los elementos de la 1ª fila

$$\pi \equiv (x-5)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y+2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-6)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

operando los determinantes y ordenando

$$\pi \equiv -x - y - 7z + 45 = 0$$

**3.** Ecuación del plano que pasa por (2, 1, 0), (1, 1, 3) y (0, 0, 2).

**Solución**

La mínima determinación lineal de un plano (dos vectores y un punto), se puede obtener de tres puntos no alineados. Siendo A = (2, 1, 0), B = (1, 1, 3) y C = (0, 0, 2).

$$\pi \equiv \begin{cases} A = (2,1,0) \\ \overline{AB} = (1-2, 1-1, 3-0) = (-1, 0, 3) \\ \overline{AC} = (0-2, 0-1, 2-0) = (-2, -1, 2) \end{cases} : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la 1ª fila.

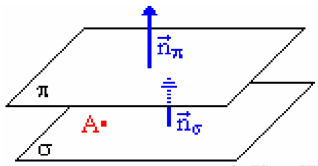
$$\pi \equiv (x-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Operando los determinantes y ordenando.

$$\pi \equiv 3x - 4y + z + 10 = 0$$

**4.** Ecuación del plano que pasa por A(−1,3,0) y es paralelo al plano $\pi \equiv x + y - z = 0$.

**Solución.**




El problema se resuelve mediante el haz de planos paralelos a π, particularizando para el plano buscado con el punto A

Haz de planos paralelos a π:

$$x + y - z + K = 0 ;\ \forall K \in \Re$$

Para calcular el plano buscado se tiene en cuenta que el punto P∈σ, y por tanto sus coordenadas deben de satisfacer su ecuación.

$$-1 + 3 - 0 + K = 0 \quad : \quad K = -2$$

sustituyendo:

$$\sigma \equiv x + y - z - 2 = 0$$

**5.** Sabiendo que el plano mx + ny + pz − 6 = 0 pasa por (1, 3, −1) y es paralelo al plano 2x − y + 2z − 7 = 0. Hallar m, n y p.

**Solución.**

Si dos planos son paralelos su vectores característicos serán iguales o proporcionales.

$$\left.\begin{array}{r} \pi : mx + ny + pz - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (m, n, p) \\ \sigma : 2x - y + 2z - 7 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\sigma = (2,-1,2) \end{array}\right\} : \pi \| \sigma \Rightarrow n_\pi = k\cdot(2,-1,2) = (2k,-k,2k)$$

El plano buscado tiene la forma:

$$2kx - ky + 2kz - 6 = 0$$

El valor de k se obtiene teniendo en cuenta que el punto (1, 3, −1) pertenece al plano, y por tanto sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano.

$$2k\cdot 1 - k\cdot 3 + 2k\cdot(-1) - 6 = 0 \ : \ -3k - 6 = 0 \ : \ k = -2$$

El plano buscado es:

$$-4x + 2y - 4z - 6 = 0$$

**6.** Hallar, obteniendo previamente el haz de planos, la ecuación del plano que pasa por la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x-3y+2z-1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases} \text{ y:}$$

**i)** pasa por (2, 0, 1)

**ii)** es paralelo al plano 3x − 2y + z − 5 = 0

**iii)** es paralelo a la recta $\frac{x-5}{2} = y - 3;\ z = 0$

**Solución.**

El haz de planos de arista r tiene por expresión:

$$x-3y+2z-1+k(2x+y-z+2)=0 \quad \forall\, k \in R$$

**i)** Pasa por (2, 0, 1). Las coordenadas del punto cumplen la ecuación del plano, por tanto sustituyendo en el haz las variables x, y, z por las coordenadas del punto podemos despejar el valor del parámetro que determina el plano buscado.

$$2-3\cdot 0+2\cdot 1-1+k(2\cdot 2+0-1+2)=0 \qquad 3+5k=0 \qquad k=-\frac{3}{5}$$

Sustituyendo, multiplicando por −3 para quitar la fracción, y ordenando se llega a la ecuación del plano pedido.

$$x-3y+2z-1-\frac{3}{5}(2x+y-z+2)=0$$

$$5x - 15y + 10z - 5 - 6x - 3y + 3z - 6 = 0$$

$$\pi \equiv -x - 18y + 13z - 11 = 0$$

**ii)** es paralelo al plano 3x − 2y + z − 5 = 0. Los vectores característicos de ambos planos son paralelos y por tanto proporcionales. El vector característico del haz de plano en función del parámetro k se obtiene de la ecuación del haz ordenando por variables

$$x-3y+2z-1+k(2x+y-z+2)=0 \quad \forall\, k \in R$$

$$x-3y+2z-1+2kx+ky-kz+2k=0 \quad \forall\, k \in R$$

$$(1+2k)x+(k-3)y+(2-k)z+(2k-1)=0 \qquad \vec{n}=(1+2k,\, k-3,\, 2-k) \quad \forall\, k \in R$$

$$(3,-2,1)=K(1+2k,\, k-3,\, 2-k) \Rightarrow \frac{1+2k}{3}=\frac{k-3}{-2}=\frac{2-k}{1}$$

Igualando dos a dos se resuelven las ecuaciones. Si las ecuaciones tienen igual solución, el problema tiene solución, en caso contrario no.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1+2k}{3}=\frac{k-3}{-2} \Rightarrow k=1 \\ \frac{k-3}{-2}=\frac{2-k}{1} \Rightarrow k=1 \end{array}\right\} : k=1 : \pi \equiv x-3y+2z-1+1\cdot(2x+y-z+2)=0$$

Ordenando:

$$\pi \equiv 3x-2y+z+1=0$$

**iii)** Es paralelo a la recta $\frac{x-5}{2} = y - 3;\ z = 0$. El vector característico del plano es perpendicular al vector de dirección de la recta, por tanto el producto escalar de ambos es nulo.

$$(1+2k)x+(k-3)y+(2-k)z+(2k-1)=0 \qquad \vec{n}=(1+2k,\, k-3,\, 2-k) \quad \forall\, k \in R$$

$$\vec{d}_r=(2,1,0) \perp \vec{n}=(1+2k,\, k-3,\, 2-k) \Rightarrow (2,1,0)\circ(1+2k,\, k-3,\, 2-k)=0$$

$$2\cdot(1+2k)+1\cdot(k-3)+0\cdot(2-k)=0 \qquad 5k-1=0 \qquad k=\frac{1}{5}$$

Sustituyendo, multiplicando por 5 para quitar la fracción, y ordenando se llega a la ecuación del plano pedido.

$$x-3y+2z-1+\frac{1}{5}(2x+y-z+2)=0$$

$$5x - 15y + 10z - 5 + 2x + y - z + 2 = 0$$

$$\pi \equiv 7x - 14y + 9z - 3 = 0$$

**7.** Radicación de planos de vértice V(1, –3, 2). Plano de dicha radicación paralelo a

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución.**

El haz de planos de vértice V(1, –3, 2) tiene por expresión:

$$\alpha(x-1)+\beta(y+3)+\gamma(z-2)=0 \qquad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in R$$

Para calcular el plano del haz de vértice V paralelo a π, debemos sacar la ecuación general de π, para lo cual desarrollamos el determinante por los elementos de la 1ª columna.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv 3x - 8y + z = 0$$

Si dos planos son paralelos, tienen igual ó proporcional vector característico.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (3, -8, 1)$$

Sustituyendo en la ecuación del haz:

$$3(x-1)-8(y+3)+1(z-2)=0$$

$$\pi' \equiv 3x - 8y + z - 29 = 0$$

Otra forma más sencilla de calcular el plano paralelo a π que pasa por V sería desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+3 & 1 & 0 \\ z-2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi' \equiv 3x - 8y + z - 29 = 0$$

**8.** Radicación de planos de vértice V(–3, 2, 1). Plano de dicha radicación perpendicular a la recta $x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$.

**Solución.**

El haz de planos de vértice V(–3, 2, 1) tiene por expresión:

$$\alpha(x+3)+\beta(y-2)+\gamma(z-1)=0 \qquad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in R$$

Si una recta es perpendicular a un plano, el vector de dirección de la recta es paralelo al vector característico del plano y por tanto o son iguales o son proporcionales.

$$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) = \vec{d}_r(1, 2, -1)$$

Sustituyendo en el haz se obtiene la ecuación del plano.

$$1(x+3) + 2(y-2) - 1(z-1) = 0$$

$$\pi \equiv x + 2y - z = 0$$

**9.** Ecuación del haz de planos de arista la recta AB: A(3, −1, 4) B(2, 5, −3). Plano de dicho haz paralelo a: $r \equiv \begin{cases} 4x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$

**Solución.**

Lo primero de todo es obtener las ecuaciones reducidas de r para con ellas plantear la ecuación del haz de planos de arista común.

$$r_{AB} : \begin{cases} A = (3,-1,4) \\ \overline{AB} = (-1,6,-7) \end{cases} : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-4}{-7}$$

Igualando dos a dos (x/y; x/z) se obtienen las ecuaciones reducidas de r:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{6} \\ \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{z-4}{-7} \end{cases} \text{Ordenando. } r : \begin{cases} 6x + y - 17 = 0 \\ 7x - z - 17 = 0 \end{cases}$$

Haz de planos de arista común:

$$6x + y - 17 + K(7x - z - 17) = 0 \quad \forall K \in R$$

Quitando paréntesis y ordenando por variables:

$$(6 + 7K)x + y - Kz - (17 + 17K) = 0 \quad \forall K \in R$$

El plano buscado debe ser paralelo a la recta r, por tanto el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector de dirección de la recta.

$$\vec{n} \perp \vec{d}_r \Rightarrow \vec{n} \circ \vec{d}_r = 0$$

El vector de dirección de la recta r lo obtenemos multiplicando vectorialmente los vectores característicos de los planos que la forman.

$$\vec{d}_r = (4, -1, 3) \times (2, 1, 2) = \left( \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5, -2, 6)$$

Sustituyendo en la expresión del producto escalar:

$$\vec{n} \circ \vec{d}_r = (6 + 7K, 1, -K) \circ (-5, -2, 6) = 0$$

$$(6 + 7K) \cdot (-5) + 1 \cdot (.-2) + (-K) \cdot 6 = 0 : \ -32 - 41K = 0 \ : \ K = -\frac{32}{41}$$

Sustituyendo en la expresión del haz se halla el plano buscado.

$$\left(6 + 7\left(-\frac{32}{41}\right)\right)x + y - \left(-\frac{32}{41}\right)z - \left(17 + 17\left(-\frac{32}{41}\right)\right) = 0 \text{ operando } \frac{22}{41}x + y + \frac{32}{41}z - \frac{153}{41} = 0$$

Multiplicando por 41 para simplificar:

$$\pi \equiv 22x + 41y + 32z - 153 = 0$$

**10.** ¿Pertenece el plano x + y + z + 2 = 0 al haz de arista $r \equiv \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-3y+4z+2=0 \end{cases}$

**Solución.**

Haz de planos de arista r:

$$x+2y-z-1+K(x-3y+4z+2)=0 \quad \forall K \in R$$
$$(1+K)x+(2-3K)y+(4K-1)z+(2K-1)=0$$

Para que x + y + z + 2 = 0 pertenezca la haz de planos de arista r, debe existir un único valor del parámetro K que permita obtener la ecuación del plano.

$$\begin{cases} 1+K=1 : K=0 \\ 2-3K=1 : K=\dfrac{1}{3} \\ 4K-1=1 : K=\dfrac{1}{2} \\ 2K-1=2 : K=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y+z+2=0 \notin \text{Al haz de planos de arista r}$$

Otra forma de hacerlo sería estudiar los rangos de las matices de coeficientes y ampliada del sistema que forman los tres planos. Si rg A = rg A*= 2, los tres se cortan en una recta y cualquiera de ellos pertenecería al haz de planos formado por los otros dos.

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-3y+4z=-2 \\ x+y+z=-2 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A^* \le 3$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } A^*$$

No forman un haz de planos.

**11.** Radicación de planos de vértice Q(−3, 6, 7). Plano de la radicación perpendicular a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 4+2x+y-5z=0 \\ 3-x-y+4z=0 \end{cases}$$

**Solución.**

La radicación de planos de vértice Q tiene la forma:

$$\alpha(x-(-3))+\beta(y-6)+\gamma(z-7)=0 \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in R$$
$$\alpha(x+3)+\beta(y-6)+\gamma(z-7)=0 \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in R$$

El plano de la radicación de vértice Q perpendicular a la recta r tendrá como vector característico el vector de dirección de la recta ó uno proporcional a este.

El vector de dirección de la recta r lo obtenemos multiplicando vectorialmente los vectores característicos de los planos que la forman.

$$\vec{d}_r = (2,1,-5)\times(-1,-1,4) = \left( \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1,-3,-1) = -1(1,3,1)$$

El plano buscado es:

$$1\cdot(x+3)+3\cdot(y-6)+1\cdot(z-7)=0$$
$$\pi \equiv x + 3y + z - 22 = 0$$

**12.** Plano que pasa por el punto P(−1, 0, −3), es perpendicular a los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - 3z = 8$, y $\pi_2 \equiv 3x - 7y - 3z = -3$.

**Solución.**

Se busca un plano σ que sea perpendicular a dos planos conocidos y que pase por un punto. Por ser perpendicular $\pi_1$ y $\pi_2$, los vectores característicos de estos planos $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ serán paralelos al plano σ, por lo tanto una determinación lineal de σ es:

$$\sigma : \begin{cases} P = (-1, 0, -3) \\ \vec{n}_1 = (2, 1, -3) \\ \vec{n}_2 = (3, -7, -3) \end{cases} \Rightarrow \sigma \equiv \begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-(-3) \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila, operando y ordenando se obtiene la ecuación general de σ.

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma \equiv 24x + 3y + 17z + 75 = 0$$

**13.** Ecuación del plano que pasa por los puntos A(0, 1, 1), B(1, 0, −2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

**Solución.**

La determinación lineal del plano buscado (σ) la obtenemos de los puntos A y B y del vector característico del plano π, que por ser perpendicular al plano σ, el vector normal o característico de π es paralelo al plano σ.

$$\sigma : \begin{cases} A \in \sigma \\ B \in \sigma \\ \pi \perp \sigma \end{cases} \Rightarrow \sigma \equiv \begin{cases} A = (0,1,1) \\ \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (1-0, 0-1, -2-1) = (1,-1,-3) \\ \vec{n}_\pi = (2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \sigma \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

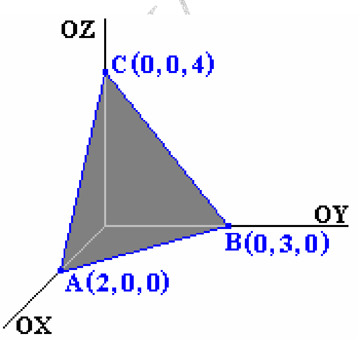
Desarrollando por los elementos de la primera fila, operando y ordenando se obtiene la ecuación general de σ.

$$x\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma \equiv 4x + 7y - z - 6 = 0$$

**14.** Ecuación del plano que interceptan en los ejes coordenados segmentos de longitudes 2, 3 y 4 unidades respectivamente.

**Solución.**




Suponemos que el plano buscado se encuentra en el primer octante, ya que la información que nos dan, permitiría calcularlo en cualquier octante con solo cambiar signos.

La **ecuación canónica** $\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1\right)$ se describe en función de los valores a, b y c que son los puntos de corte del plano con los ejes coordenados A(a,0,0), B(0,b,0) y C(0,0,c)

$$\pi \equiv \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

Para obtener la ecuación general basta con multiplicar por el m.c.m. de los denominadores (12)

$$\pi \equiv 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

**15.** Ecuación del plano que pasa por A(4, −5, 1), B(−2, 0, 3) y el punto de intersección de los planos $\pi_1 \equiv 1 - x + z = 0$, $\pi_2 \equiv -1 + y - 2z = 0$ y $\pi_3 \equiv 2 + 3x - y = 0$.

**Solución.**

Se pide calcular un plano conocidos tres puntos.

$$\pi : \begin{cases} A \in \pi \\ B \in \pi \\ C \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} \,||\, \pi \\ \overline{AC} \,||\, \pi \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A \\ \overline{AB} \\ \overline{AC} \end{cases}$$

El punto C nos lo dan como intersección de tres planos, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones, se obtienen las coordenadas del punto C.

$$C : \begin{cases} \pi_1 : x - z = 1 \\ \pi_2 : y - 2z = 1 \\ \pi_3 : 3x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 : C = (-3, -7, -4) \\ z = -4 \end{cases}$$

El plano pedido es:

$$\pi \equiv \begin{cases} A = (4, -5, 1) \\ \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-2-4, 0-(-5), 3-1) = (-6, 5, 2) \\ \overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (-3-4, -7-(-5), -4-1) = (-7, -2, -5) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-4 & y-(-5) & z-1 \\ -6 & 5 & 2 \\ -7 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila, operando y ordenando se obtiene la ecuación general de plano.

$$(x-4)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - (y+5)\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$21x + 44y - 47z + 183 = 0$$