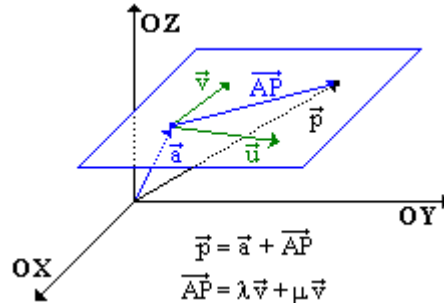


## PLANOS

### La ecuación del Plano

Se define un plano como el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyo vector de posición puede expresarse como combinación lineal del vector de posición de un punto del plano y dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano, por tanto, **la mínima determinación lineal de un plano es un punto y dos vectores**.



Ecuación **vectorial** de un plano. Expresando los vectores en forma cartesiana:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda (v_1, v_2, v_3) + \mu (u_1, u_2, u_3)$$

Expresando la ecuación vectorial por componentes, aparecen las **ecuaciones paramétricas** del plano en el espacio:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu u_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu u_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu u_3 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas del plano representan al sistema  $\pi \equiv \begin{cases} \lambda v_1 + \mu u_1 = x - a_1 \\ \lambda v_2 + \mu u_2 = y - a_2 \\ \lambda v_3 + \mu u_3 = z - a_3 \end{cases}$  definido por

las matrices:  $A = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \\ v_3 & u_3 \end{pmatrix}$       $A' = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & x - a_1 \\ v_2 & u_2 & y - a_2 \\ v_3 & u_3 & z - a_3 \end{pmatrix}$

Sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas  $\lambda$  y  $\mu$ , el cual para ser compatible deberá tener igual rango en la matriz de coeficientes y en la ampliada:  $\text{rg } A = \text{rg } A'$

$$\begin{vmatrix} v_1 & u_1 & x - a_1 \\ v_2 & u_2 & y - a_2 \\ v_3 & u_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

aplicando las propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante por los elementos de la 1ª fila

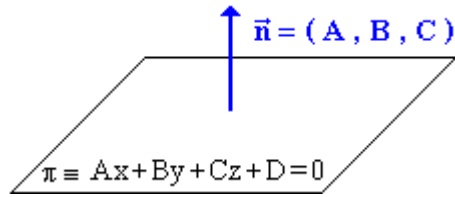
$$(x - a_1) \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - (y - a_2) \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + (z - a_3) \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

operando los paréntesis

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Se obtiene la **ecuación general** del plano.

Los coeficientes de las variables de la ecuación general se han obtenido mediante el producto vectorial de dos vectores paralelos al plano, y corresponden a las componentes del vector característico ó normal al plano.



Si de la ecuación general del plano se despeja el término independiente y se divide toda la ecuación por él, se obtiene la **ecuación canónica** del plano.

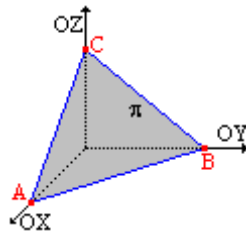
$$Ax + By + Cz = -D$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = \frac{-D}{-D} \quad \text{ordenando de otra forma} \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$$

sustituyendo las fracciones por a b y c

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ecuación en la que los valores a, b y c dan los puntos de corte del plano con los ejes coordenados A(a,0,0), B(0,b,0) y C(0,0,c)



De la ecuación general se obtiene otra forma de expresar la ecuación de la recta, la **ecuación normalizada**, muy interesante por sus propiedades métricas. Se obtiene dividiendo la ecuación general por el módulo de su vector característico ó normal.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

descomponiendo en sumandos

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

los coeficientes de las variables representan las componentes del vector orthonormal al plano así como los cosenos directores de dicho vector, el termino independiente, es la mínima distancia del plano al origen de ordenadas.

$$\vec{n}_N = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

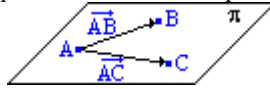
$$d(\pi - O) = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## Formas de determinar la ecuación de un plano en el espacio

- Conocidos tres puntos.
- Conocidos una recta y un punto exterior a ésta.
- Conocidas dos rectas secantes.

### Conocidos tres puntos:

Tres puntos no alineados en el espacio determinan un plano único.



La mínima determinación se obtiene con un punto cualquiera de los tres y dos de los vectores que se pueden formar con dichos puntos, por ejemplo el  $\overrightarrow{AB}$  y el  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\text{Determinación lineal de } \pi : \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \\ \overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) \end{cases}$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos A B y C se obtendrá operando la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

que representa la forma más sencilla de determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos A B y C.

Al determinante anterior se le puede transformar aplicando las propiedades de los determinantes de la siguiente forma

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & x - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & y - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & x - a_1 \\ a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & y - a_2 \\ a_3 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si en el último determinante sumamos la 1ª columna a todas sus paralelas se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x \\ a_2 & b_2 & c_2 & y \\ a_3 & b_3 & c_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

que es otra forma de determinar la ecuación general del plano que pasa por tres puntos. Este método es más laborioso que el anterior, ya que supone desarrollar un determinante de orden cuatro.

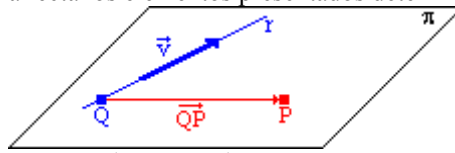
Las dos formas de obtener la ecuación del plano que pasa por tres puntos nos permite conocer si cuatro puntos son coplanarios ó no, para ello bastará sustituir las coordenadas del cuarto punto D(d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>, d<sub>3</sub>) en la x y z de cualquiera de los dos determinantes anteriores, obteniendo dos condiciones diferentes de coplanariedad de cuatro puntos en el espacio.

$$\bullet \begin{vmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Una recta y un punto exterior a la recta.**

Sí el punto es exterior a la recta los elementos presentados determinan un plano único.



la determinación lineal del plano es:

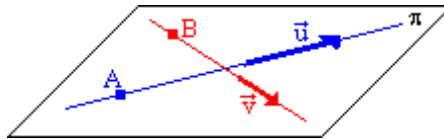
$$\begin{cases} P = (x_p, y_p, z_p) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{QP} = (x_p - x_q, y_p - y_q, z_p - z_q) \end{cases}$$

La ecuación general del plano se obtiene desarrollando el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_p & y - y_p & z - z_p \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_p - x_q & y_p - y_q & z_p - z_q \end{vmatrix} = 0$$

**Conocidas dos rectas secantes.**

El plano buscado se obtiene con uno de los puntos de una de las rectas, y los dos vectores de dirección de dichas rectas.



m.d.l.:

$$\begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & x - a_1 \\ v_2 & u_2 & y - a_2 \\ v_3 & u_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

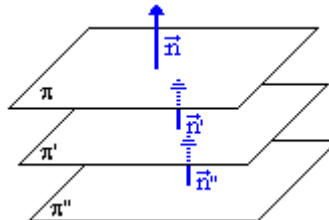
desarrollando se llega a la ecuación del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

**Haces de planos.**

Conjunto de planos con una propiedad común. Existen tres tipos de haces:

- Haz de planos paralelos:

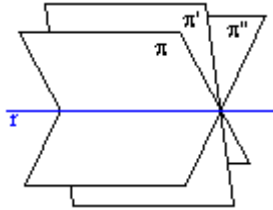


La ecuación de cualquier plano del haz se puede expresar de la siguiente forma.

$$Ax + By + Cz + K = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Para determinar un plano específico del haz, se deberá conocer una propiedad métrica del plano que permita calcular el valor de K correspondiente a ese plano

- Haz de planos de arista común:



La ecuación de cualquier plano perteneciente al haz se puede escribir como combinación lineal de dos planos cualesquiera del haz.

$$\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = 0$$

normalizando uno de los parámetros

$$\pi_1 + K \cdot \pi_2 = 0$$

Para determinar un plano específico del haz, se deberá conocer una propiedad métrica del plano que permita calcular el valor de K correspondiente a ese plano

- Radicación de planos de vértice común.

Conjunto de planos que pasan por un mismo punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ .

$$\alpha \cdot (x - x_0) + \beta \cdot (y - y_0) + \gamma \cdot (z - z_0) = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$$