1. Demostrar que los puntos A(4,5,7), B((−1,2,3) y C(9,8,11) están alineados. Cual será su posición relativa.

Solución.

Si tres puntos están alineados, dos cualquiera de los vectores que forman han de ser proporcionales.

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$$

$$\begin{cases} \overline{AB} = (-1,2,3) - (4,5,7) = (-5,-3,-4) \\ \overline{AC} = (9,8,11) - (4,5,7) = (5,3,4) \end{cases} : \overline{AB} = -1 \cdot \overline{AC}$$

Los puntos están alineados.

Criterio de posición relativa: $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC} : \begin{cases} \text{Si} \quad k > 1 \rightarrow \text{C está en el centro} \\ \text{Si} \quad 0 < k < 1 \rightarrow \text{B está en el centro} \\ \text{Si} \quad k < 0 \rightarrow \text{A está en el centro} \end{cases}$

Por ser la constante de proporcionalidad negativa y tener los dos vectores un origen común, el punto A está entre B y C.

2. Determina k para que los puntos (k, 2,−3), (4, k, 1), (7, 0, 5) estén alineados y hallar la ecuación de la recta que determinan.

Solución.

Si los puntos están alineados, dos cualquiera de los vectores que forman han de ser proporcionales.

$$\overline{AC} = \alpha \cdot \overline{BC}$$

$$(7-k, 0-2, 5-(-3)) = \alpha \cdot (7-4, 0-k, 5-1) \Rightarrow (7-k, -2, 8) = \alpha \cdot (3, -k, 4)$$

igualando por componentes

$$\begin{cases} 7 - k = 3 \cdot \alpha \\ -2 = -k \cdot \alpha \\ 8 = 4 \cdot \alpha \end{cases}$$

de la tercera componente se obtiene el valor de α.

$$\alpha = \frac{8}{4} = 2$$

Sustituyendo este valor en las dos primeas componentes se obtiene el valor de k. Se debe de obtener el mismo valor en las dos, en caso contrario no existirá ningún valor de k que consiga que los tres puntos estén alineados.

$$\begin{cases} 7 - k = 6 \\ -2 = -2k \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

3. Dados los puntos A(1,0,4), B(3,0,1), C(2,0,0), D(0,4,0) analizar si son o no coplanarios.

Solución.

Cuatro puntos son coplanarios si tres de los vectores formados entre ellos son linealmente dependientes, por lo que el rango de la matriz formada por los tres vectores deberá ser menor de tres.

$\text{rg}\left\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right\} < 3$

$$\overline{AB} = (3-1, 0-0, 1-4) = (2, 0, -3)$$
$$\overline{AC} = (2-1, 0-0, 0-4) = (1, 0-4)$$
$$\overline{AD} = (0-1, 4-0, 0-4) = (-1, 4, -4)$$

$$\text{rg}\left\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right\} = \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0+0-12-(0+0-32) = 20 \neq 0$$

$$rg\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\} = 3$$

Los puntos no son coplanarios

4. Ver si están alineados A(2,6,–3), B(2,2,2), C(–1,–5,4).

Solución.

$$\begin{cases} \overline{AB} = (0,-4,5) \\ \overline{AC} = (-3,-11,7) \end{cases}$$

Por no ser proporcionales los puntos no están alineados

5. Hallar a y b para que A(–1,3,2), B(2,–1,–1), C(a–2,7,b) estén alineados.

Solución.

$$\begin{cases} \overline{AB} = (3,-4,-3) \\ \overline{AC} = (a-1, 4, b-2) \end{cases}$$

Para que los puntos estén alineados los vectores deben ser proporcionales y por tanto, el cociente entre sus componentes debe ser constante

$$\frac{3}{a-1} = \frac{-4}{4} = \frac{-3}{b-2} :\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{a-1} = -1 : a = 2 \\ -1 = \dfrac{-3}{b-2} : b = 5 \end{cases}$$

5. Comprobar que los vectores: $\vec{a} = (1,1,3)$, $\vec{b} = (-1,2,0)$ y $\vec{c} = (1,3,5)$ son linealmente dependientes

Solución.

Se puede demostrar de dos formas:

- Si tres vectores son linealmente dependientes, el rango de la matriz formada por los tres vectores debe ser menor de 3, por lo tanto, todos los menores de orden tres deben ser nulos.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} < 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 3 - (3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 5 + 1\cdot 0\cdot 3) = 1-1 = 0$$

Linealmente dependientes

- Si tres vectores son linealmente independientes, uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

$$\vec{c} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$$

$$(1,3,5) = \alpha\cdot(1,1,3) + \beta\cdot(-1,2,0) : \begin{cases} 1 = \alpha - \beta \\ 3 = \alpha + 2\beta \\ 5 = 3\alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{Eq.}} \begin{cases} 1 = \alpha - \beta \\ 5 = 3\alpha \end{cases} : \begin{cases} \alpha = \dfrac{5}{3} \\ \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\vec{c} = \frac{5}{3}\cdot\vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\vec{b}$$

Linealmente dependientes.

Relación de dependencia: $5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = 0$

6. Señalar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando las respuestas.

a) Si los puntos A, B, C, y D pertenecen a un mismo plano, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes

b) Sean (A, $\vec{v}$) y (A', $\vec{v}$') las determinaciones lineales de dos rectas r y r'. Si los vectores $\overrightarrow{AA}$, $\vec{v}$ y $\vec{v}$' son linealmente dependientes, entonces las rectas r y r' son coplanarias.

Solución.

a) FALSO. En un plano el máximo número de vectores linealmente independientes es dos

b) VERDADERO. Por la misma razón que en el apartado a.

7. Calcular a y b, para que los puntos A(2, –1, 0), B(3, 0, 1) y C (a, b+1, 2) estén alineados.

Solución.

Para que estén alineados:

$$\overline{AB} = k\overline{AC}$$

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = k\cdot(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - a_1 = k\cdot(c_1 - a_1) \\ b_2 - a_2 = k\cdot(c_2 - a_2) \\ b_3 - a_3 = k\cdot(c_3 - a_3) \end{array}\right\} : k = \frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

Sustituyendo por las coordenadas de los puntos:

$$\frac{3-2}{a-2} = \frac{0-(-1)}{(b+1)-(-1)} = \frac{1-0}{2-0} \qquad \text{operando :} \qquad \frac{1}{a-2} = \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a-2} = \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2} : \begin{cases} \dfrac{1}{a-2} = \dfrac{1}{2} & : \ a = 4 \\ \dfrac{1}{b+2} = \dfrac{1}{2} & : \ b = 0 \end{cases}$$

8. Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $\overline{AC} = 2\cdot\overline{CB}$ Calcular el calor de k en la expresión

$$\overline{AB} = K\cdot\overline{AC}$$

Solución.

Partiendo de la relación que nos dan ($\overline{AC} = 2\cdot\overline{CB}$), hay que llegar a la que nos piden, para ello tenemos en cuenta que un segmento determinado por dos puntos e igual a la resta de los vectores de posición de los puntos que lo determinan (final – inicial).

$$\overline{AC} = 2\cdot\overline{CB}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = 2(\vec{b} - \vec{c}) \quad : \quad \vec{c} - \vec{a} = 2\vec{b} - 2\vec{c} \quad : \quad 2\vec{b} + \vec{a} = 3\vec{c}$$

Si a los dos miembros de la igualdad se le suma o resta el mismo vector, la igualdad se mantiene, lo que buscamos es:

$$k_1\vec{b} - k_1\vec{a} = k_2\vec{c} - k_2\vec{a}$$

De esta forma, se puede llegar a la relación pedida en el problema.

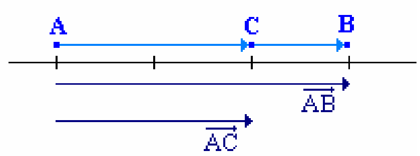
$$k_1(\vec{b} - \vec{a}) = k_2(\vec{c} - \vec{a}) \qquad (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{k_2}{k_1}(\vec{c} - \vec{a}) \qquad (\vec{b} - \vec{a}) = K(\vec{c} - \vec{a})$$

Si a los dos miembros de la igualdad ($2\vec{b} + \vec{a} = 3\vec{c}$), se le resta $3\vec{a}$, se obtiene:

$$2\vec{b} + \vec{a} - 3\vec{a} = 3\vec{c} - 3\vec{a} \qquad 2\vec{b} - 2\vec{a} = 3\vec{c} - 3\vec{a} \qquad 2(\vec{b} - \vec{a}) = 3(\vec{c} - \vec{a}) \qquad \vec{b} - \vec{a} = \frac{3}{2}(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\overline{AB} = \frac{3}{2}\cdot\overline{AC}$$

Si no sabemos como empezar, se puede hacer gráficamente para orientarnos.



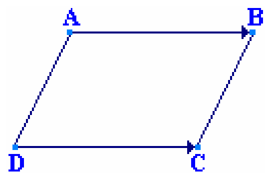
9. Calcular D para que los puntos ABCD formen un paralelogramo.

A(2, −1, 3), B(5, 1, 2), C(−1, 2, 3)

Solución.

Si ABCD forman un paralelogramo:

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (Equipolentes)



Equipolentes equivale a igual modulo, dirección y sentido.

Llamando a la coordenada de D(d_1, d_2, d_3)

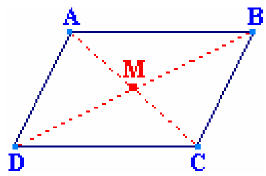
$$(5-2, 1-(-1), 2-3) = (-1-d_1, 2-d_2, 3-d_3)$$

$$(3, 2, -1) = (-1-d_1, 2-d_2, 3-d_3) : \begin{cases} 3 = -1-d_1 & d_1 = -4 \\ 2 = 2-d_2 & d_2 = 0 \\ -1 = 3-d_3 & d_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow D = (-4, 0, 4)$$

10. Sea M(2, −1, 3) el punto medio del paralelogramo ABCD, calcular C y D sí A = (1, −1, 1) y B = (3, −2, 5).

Solución.

Si M es el punto medio del paralelogramo también será el punto medio de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



Si M es el punto medio de $\overline{AC}$

$$M = \left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2} \frac{a_3+c_3}{2}\right) : \begin{cases} x_m = \frac{a_1+c_1}{2} \\ y_m = \frac{a_2+c_2}{2} \\ z_m = \frac{a_3+c_3}{2} \end{cases}$$

Expresiones de las que podemos despejar las coordenadas de D.

$$\begin{cases} x_m = \frac{a_1+c_1}{2} & c_1 = 2x_m - a_1 = 2\cdot 2 - 1 = 3 \\ y_m = \frac{a_2+c_2}{2} & c_2 = 2y_m - a_2 = 2\cdot(-1) - (-1) = -1 \Rightarrow C = (3,-1,5) \\ z_m = \frac{a_3+c_3}{2} & c_3 = 2z_m - a_3 = 2\cdot 3 - 1 = 5 \end{cases}$$

Repitiendo un razonamiento análogo, se calcula D.

M es el punto medio de $\overline{BD}$

$$M = \left(\frac{b_1+d_1}{2}, \frac{b_2+d_2}{2}, \frac{b_3+d_3}{2}\right) : \begin{cases} x_m = \frac{b_1+d_1}{2} \\ y_m = \frac{b_2+d_2}{2} \\ z_m = \frac{b_3+d_3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = \frac{b_1+d_1}{2} & d_1 = 2x_m - b_1 = 2\cdot 2 - 3 = 3 \\ y_m = \frac{b_2+d_2}{2} & d_2 = 2y_m - b_2 = 2\cdot(-1) - (-2) = 0 \Rightarrow D = (3,0,1) \\ z_m = \frac{b_3+d_3}{2} & d_3 = 2z_m - b_3 = 2\cdot 3 - 5 = 1 \end{cases}$$