VECTORES

Vectores libres tridimensionales

Definiciones

Sean A y B dos puntos del espacio de la geometría elemental. Se llama vector $\overrightarrow{AB}$ al par ordenado (A, B). El punto A se denomina origen y al punto B extremo.

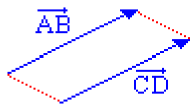
Se define $\overrightarrow{BA}$ como el opuesto de $\overrightarrow{AB}$

Si se considera un segmento unidad u, la longitud del segmento AB con u como unidad de denomina módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ y se designa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Se define dirección de un vector $\overrightarrow{AB}$ como la de la recta que lo contiene.

Se define sentido de un vector como cada una de las dos orientaciones opuestas de una misma dirección

Se dice que dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes si tienen igual módulo, dirección y sentido, gráficamente, serán equipolentes aquellos vectores que unidos sus orígenes y sus extremos formen un paralelogramo.



A cada clase de vectores equipolentes se denomina vector libre.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

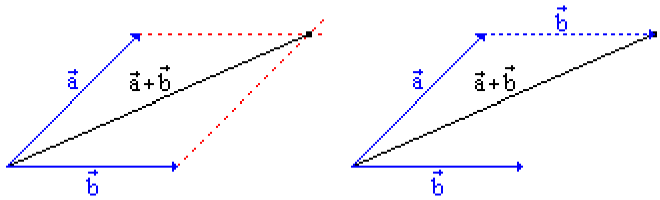
Se denomina $-\vec{a}$ al vector representado por $\overrightarrow{BA}$, llamándole opuesto del $\vec{a}$.

Operaciones con vectores

- Suma de vectores
- Producto de vectores por escalares

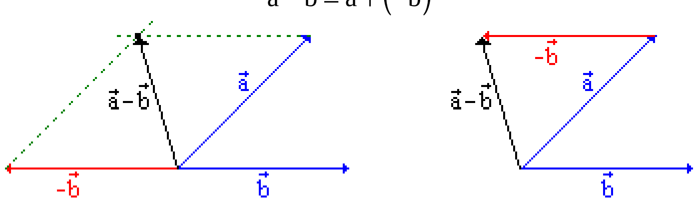
Suma

Es una operación interna del conjunto de los vectores, es decir, la suma de vectores da como resultado otro vector. Gráficamente se puede hacer de dos formas, o por la regla de paralelogramo ó dibujando un vector a continuación del otro y uniendo el origen del primero con el extremo del último.



La resta de vectores se hace como la suma del opuesto:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$



La suma de vectores tiene las siguientes propiedades:

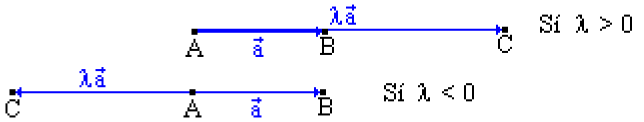
1. Conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. Asociativa: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
3. Elemento neutro, $\left(\vec{0}\right)$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. Elemento opuesto, $\left(-\vec{a}\right)$: $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Estas propiedades dan al conjunto de los vectores libres del espacio, con la operación de suma, la estructura de **grupo conmutativo**.

Producto de un número real por un vector

Sea λ un número real y $\vec{a}$ un vector libre representado por $\overrightarrow{AB}$, se define el producto $\lambda \cdot \vec{a}$ como otro vector con igual dirección que $\vec{a}$, igual sentido que el de $\vec{a}$ sí $\lambda > 0$, sentido opuesto sí $\lambda < 0$ y de módulo proporcional al módulo de $\vec{a}$.

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$



Sí $\lambda = 0$ ó $\vec{a} = 0$, por definición $\lambda \cdot \vec{a} = 0$

De lo anterior se deduce:

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

Propiedades de la multiplicación de vectores por escalares:

i. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

ii. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

iii. $\lambda \cdot (\mu\vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$

iv. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

A Los conjuntos que verifican una ley de composición interna (suma) y una ley de composición externa (producto por escalares), con sus respectivas propiedades, se los denomina **espacios vectoriales**, y a sus elementos, **vectores**.

Dependencia e independencia lineal en V^3

Sea $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ un subconjunto de vectores de V^3 que designaremos por S. Se dice que $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ es un **sistema linealmente dependiente** ó **sistema ligado** sí existen n números reales, a_1, a_2, ..., a_n no todos nulos, tales que:

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + ... + a_n\vec{u}_n = 0$$

Sí la igualdad anterior se cumple solamente cuando

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

entonces se dice que el sistema S es **linealmente dependiente** ó sistema libre.

Cualquier vector libre de la forma:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + ... + \alpha_n\vec{u}_n$$

se dice que es combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$, con coeficientes respectivos

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$$

Teorema

En todo conjunto de vectores linealmente dependiente, se puede expresar uno de sus vectores como combinación lineal del resto, siempre y cuando el vector en cuestión no tenga coeficiente nulo.

En V^3 el máximo número de vectores linealmente independientes que puede existir es tres, entre más de tres vectores siempre habrá dependencia lineal. Tres vectores pueden o no ser linealmente independientes.

En V^3 si dos vectores son linealmente dependientes (proporcionales) serán paralelos, por lo tanto, si dos vectores tienen distinta dirección serán linealmente independientes.

Si en un conjunto de n vectores existe proporcionalidad entre dos de ellos, el conjunto es ligado.

Si en un conjunto de vectores se encuentra el vector nulo $\vec{0}$, el conjunto es ligado.

Bases.

Base de un espacio vectorial es una familia de vectores libres en función de los cuales se pueden expresar todos los demás vectores como combinación lineal de ellos.

Las condiciones que debe reunir un subconjunto B de vectores de V, para ser una base de V son:

i) Debe ser un sistema generador de V

ii) Los vectores que lo forman deben ser linealmente independientes.

Las base se pueden clasificar en función del ángulo entre los vectores y del módulo de estos.

Tipo de base	Ángulo	Módulo
LIBRE	Sin restricción	Sin restricción
NORMALIZADA	Sin restricción	1
ORTOGONAL	90º	Sin restricción
ORTONORMAL	90º	1

La base ortonormal también recibe el nombre de base canónica ó base métrica.

En V^3 esta formada por los vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

En un espacio vectorial, todas las bases están formadas por el mismo número de elemento. Se define como **dimensión** de un espacio vectorial como al número de elementos que tiene una cualquiera de sus bases.

Entre los pares de puntos del espacio y los vectores de V^3 existe una correspondencia que tiene las siguientes propiedades:

i. A todo par (A, B) de puntos le corresponde un único vector $\vec{v} \in V^3$ tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

ii. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ para todo par (A, B) de puntos

iii. Sí A, B y C son tres puntos: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

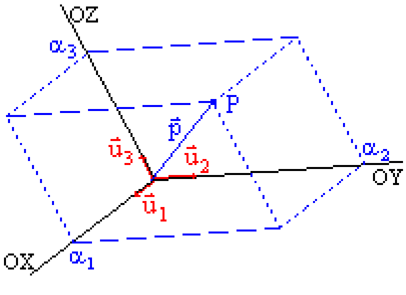
iv. Sea $\vec{v} \in V^3$, a cada punto A le corresponde un único punto B tal que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Al espacio de puntos relacionado de esta forma con V^3 se llama **espacio afín tridimensional** asociado a V^3.

Sistema de referencia afín

Se denomina sistema de referencia afín a un conjunto formado por un punto y una base de vectores. Si O es un punto del espacio tridimensional y $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ una base de V^3, el sistema $\{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema de referencia afín o cartesiano. Las rectas OX, OY, OZ que contienen a los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ respectivamente, son los ejes coordenados del sistema afín y O es el origen de coordenadas.

Cualquier punto P de un espacio en el que hay definido un sistema de referencia afín, genera lo que se denomina el vector de posición del punto, que no es otra cosa que el segmento que une el punto con el origen de coordenadas. El punto P genera el vector de posición $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$



Las **coordenadas de un punto** P en el espacio es una terna de números reales α_1, α_2, α_3 que expresan el vector de posición $\vec{p}$ como una combinación lineal de los vectores que forman la base.

$\vec{p} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3$

La terna (α_1, α_2, α_3) se llama coordenadas cartesiana de P, y se representa como P(α_1, α_2, α_3). Las coordenadas cartesianas de un punto coinciden con las componentes de su vector de posición, y solo se diferencian en la notación:

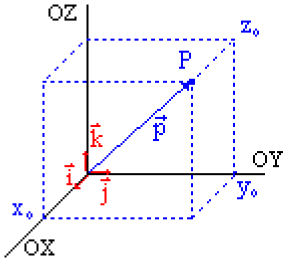
Punto: P(α_1, α_2, α_3)

Vector de posición: $\vec{p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Sistema de referencia ortonormal $\{\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$

Cuando en un sistema de referencia afín los vectores de la base son ortogonales dos a dos y unitarios, es decir, de módulo unidad, el sistema se llama **ortonormal**

El sistema ortonormal se representa por $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, son los vectores de la base



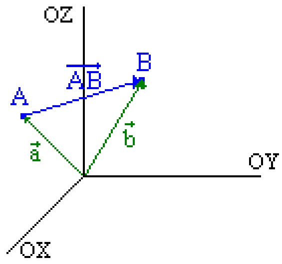
$$\vec{p} = x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}$$

siendo las coordenadas de P la terna (x_o, y_o, z_o), que coinciden con la componentes del vector de posición de P.

Coordenadas del vector definido por dos puntos

Sean A(a_1, a_2, a_3) y B(b_1, b_2, b_3) dos puntos referidos a un sistema ortonormal $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. El vector $\overrightarrow{AB}$ definido entre estos puntos se obtendrá restando al vector de posición del punto final $(\vec{b})$ el vector de posición del punto inicial $(\vec{a})$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

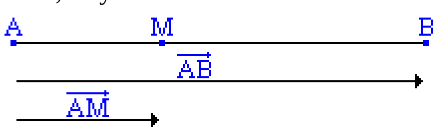


$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Razón simple de tres puntos en el espacio

En el espacio, al igual que en el plano, se puede determinar una relación entre tres puntos alineados, a partir de los segmentos que determinan los puntos.

Sean tres puntos alineados A, M y B



Los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AM}$ tienen igual dirección y sentido, diferenciándose únicamente en su módulo, por lo que existirá un número real,λ, que verifique la igualdad:

$$\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{AM}$$

Al valor λ, se le denomina razón simple.

Casos particulares:

- Si λ = 2, M es el punto medio del segmento.
- Si $\left\{\begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{matrix}\right\}$ determinan los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales.

Apoyándonos en el valor de la razón simple, se podría calcular las coordenadas de los puntos intermedios conocidas las de los extremos.

$$\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{AM}$$

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = \lambda \cdot (m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3)$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 - a_1 = \lambda \cdot (m_1 - a_1) \\ b_2 - a_2 = \lambda \cdot (m_2 - a_2) \\ b_3 - a_3 = \lambda \cdot (m_3 - a_3) \end{matrix}\right. : \text{DESPEJANDO} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} m_1 = \dfrac{(\lambda - 1) \cdot a_1 + b_1}{\lambda} \\ m_2 = \dfrac{(\lambda - 1) \cdot a_2 + b_2}{\lambda} \\ m_3 = \dfrac{(\lambda - 1) \cdot a_3 + b_3}{\lambda} \end{matrix}\right.$$

Como ejercicio te dejo que calcules las coordenadas de los puntos a los que se refieren los casos particulares con las razones propuestas.