

PROBABILIDAD

Álgebra de sucesos.

Un fenómeno o experiencia se dice que es aleatorio cuando al repetirlo en condiciones análogas es imposible de predecir el resultado.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** (E).

Se denomina **suceso** a todo subconjunto de E(espacio muestral). Como los sucesos son subconjuntos, pueden determinarse por extensión enumerando sus elementos; o bien, dando una propiedad que se verifique sólo por los elementos de dicho subconjunto.

Se dice que se verifica, o se realiza un suceso A cuando al realizar el experimento aleatorio se obtiene como resultado uno de los puntos muestrales que forman el suceso A.

El conjunto formado por todos los sucesos de espacio E se llama **espacio de sucesos**. Es decir, el **espacio de sucesos** es el conjunto formado por todos los subconjuntos de E

Los sucesos definidos por los conjuntos \emptyset y E se llaman **suceso imposible** y **suceso seguro**, respectivamente.

Los sucesos formados por un solo punto o elemento del espacio muestral se llaman **sucesos elementales**.

Los sucesos no elementales se suelen llamar **sucesos compuestos** o simplemente **sucesos**.

Inclusión o igualdad de sucesos.

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral. Se dice que un **suceso A está contenido en el suceso B**, y se escribe $A \subset B$, cuando siempre que se presenta el suceso A se verifica B.

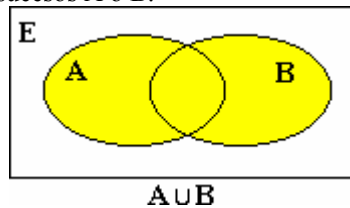
Se dice que **dos sucesos A y B del mismo espacio muestral son iguales** cuando siempre que se verifica A se verifica B, y recíprocamente. A y B son iguales si constan de los mismo puntos muestrales. De lo anterior se deduce:

$$A=B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Operaciones con sucesos.

Unión de sucesos

Dados dos suceso A y B, se llama unión de ellos, y se escribe $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando ocurre al menos uno de los sucesos A ó B.



De la definición se deduce que la unión es una operación interna en $P(E)$; es decir:

$$\forall A, B \in P(E) \Rightarrow A \cup B \in P(E)$$

Cardinal de la unión de sucesos, es el número de sucesos elementales que forman la unión de dos sucesos A y B.

Al sumar el cardinal del suceso A con el cardinal del suceso B se cuentan dos veces los puntos muestrales de la intersección $A \cap B$; por tanto,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Si los sucesos A y B son incompatibles:

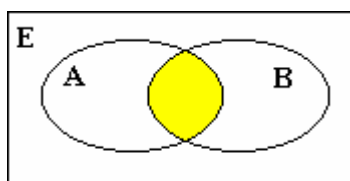
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Análogamente, para tres suceso se verifica:

$$\begin{aligned} & \text{Card}(A \cup B \cup C) = \\ & = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Intersección de sucesos

Se llama suceso intersección de los sucesos A y B, y se escribe $A \cap B$, al suceso que se realiza si y solo si A y B se realizan.



$A \cap B$

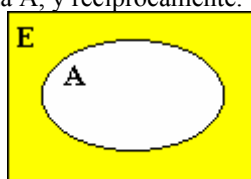
Como la unión, la intersección es también una operación interna de $P(E)$; es decir:

$$\forall A, B \in P(E) \Rightarrow A \cap B \in P(E)$$

Dos sucesos cuya intersección es el suceso imposible se llaman **sucesos incompatibles**.

Sucesos contrarios

Dado el suceso $A \in P(E)$, se llama suceso contrario de A, y se representa por \bar{A} ó por A^c , al suceso que se realiza cuando no se realiza A, y recíprocamente.



\bar{A}

De la definición se deduce que:

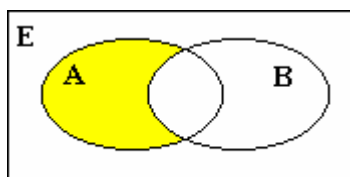
$$A \cup \bar{A} = E$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Se observa que los sucesos contrarios son siempre incompatibles, pero el recíproco no siempre es cierto.

Otras operaciones

Diferencia de sucesos. Dados los sucesos A y B, se llama **sucesos diferencia** de A y B, y se escribe $A - B$, al suceso $A \cap \bar{B}$;

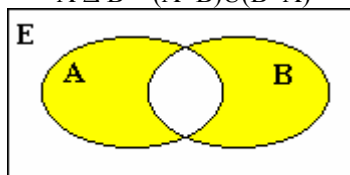


$A - B = A \cap \bar{B}$

Se observa que el suceso $A \cap \bar{B}$ está formado por los elementos o puntos muestrales de A que no están en B.

Diferencia simétrica de sucesos. La unión de los sucesos $A - B$ y $B - A$ se llama diferencia simétrica de los sucesos A y B, y se escribe $A \Delta B$, es decir:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



$(A - B) \cup (B - A)$

Álgebra de Boole de sucesos.

En el espacio P(E) de sucesos se cumple:

- a) $\forall A, B \in P(E) \Rightarrow A \cup B \in P(E)$
- b) $\forall A, B \in P(E) \Rightarrow A \cap B \in P(E)$
- c) $\forall A \in P(E) \Rightarrow \bar{A} \in P(E)$

Además, las operaciones de unión, intersección y complementación tienen las propiedades:

Sean A, B, C, D, $\emptyset \in P(E)$

	OPERACIONES DEFINIDAS EN P(E)	
	UNION	INTERSECCION
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	Unión respecto a intersección $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Intersección respecto a unión $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Distributiva	Unión respecto a intersección $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Intersección respecto a unión $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Elementos neutros	\emptyset es el elemento neutro de la unión $A \cup \emptyset = A$ E es el elemento neutro de la intersección $A \cap E = A$	
Complementación	$A \cup \bar{A} = E$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$

Además de las propiedades anteriores, son muy utilizadas las siguientes, que son conocidas con el nombre de **leyes de Morgan**:

- a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Para tres conjuntos es fácil comprobar que:

- a') $\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- b') $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

Álgebra de sucesos

El conjunto P(E) se sustituye, a veces, por un subconjunto $S \subset P(E)$.

Se llama álgebra de sucesos sobre un espacio muestral E a toda familia S de sucesos tales que:

Axioma 1.º) $E \in S$

Axioma 2.º) $A, B \in S \Rightarrow A \cup B \in S$. Es decir la unión es una operación interna de S

Axioma 3.º) $A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S$

Consecuencia de los axiomas

- a) La intersección de sucesos es interna en S
- b) $\emptyset \in S$
- c) La diferencia de sucesos es interna en S

Sistema completo de sucesos

Sea E un espacio muestral y $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una partición de E, es decir:

- A) $\forall i, A_i \neq \emptyset$
- B) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$
- C) $A_i \cap A_j = \emptyset$

Se dice entonces que P es un sistema completo de sucesos.

Combinatoria

VARIACIONES

Es el número de subconjuntos de n elementos que podemos obtener de un conjunto de m elementos, teniendo en cuenta que para que dos subconjuntos sean distintos debe de variar o el orden de los elementos o algún elemento o ambos a la vez. Por eso se dice que en las variaciones influye el orden y los elementos.

Existen dos tipos:

- a) Variaciones ordinarias o sin repetición. En un mismo subconjunto no hay elementos repetidos.
- b) Variaciones con repetición. En un mismo subconjunto puede haber elementos repetidos.

Cálculo del nº de variaciones.

Variaciones de m elemento tomadas de n en n $V_{m,n}$.

Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n $VR_{m,n}$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$$

$$VR_{m,n} = m^n$$

PERMUTACIONES

Se entiende por permutaciones de un conjunto de m elementos al nº de ordenaciones que se pueden hacer con todos los elementos del conjunto. Se sobreentiende que en las permutaciones sólo influye el orden. Existen tres tipos de permutaciones:

- a) Permutaciones ordinarias de m elementos P_m .
- b) Permutaciones con elementos repetidos $P_m^{a,b,\dots}$, en el conjunto existen a elementos repetidos de una clase, b elementos repetidos de otra clase, etc...
- c) Permutaciones circulares de m elementos PC_m . En este caso las ordenaciones se hacen alrededor de un elemento cerrado.

Cálculo del nº de permutaciones.

$$P_m = m! \text{ (m factorial)}$$

$$P_m^{a,b,\dots} = \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots}$$

$$PC_m = P_{m-1} = (m-1)!$$

COMBINACIONES

Es el número de subconjuntos de n elementos que podemos hacer en un conjunto de m elementos con la condición de que para que dos subconjuntos sean distintos deben de tener al menos un elemento distinto. En este caso se dice que influyen los elementos.

Aunque existen combinaciones con o sin repetición en este curso sólo veremos las combinaciones ordinarias.

Cálculo del nº de combinaciones.

Combinaciones ordinarias: $C_m^n = C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Combinaciones con repetición: $CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}$

ESTUDIO AXIOMATICO DE LA PROBABILIDAD

Sea E un espacio muestral finito y S un álgebra de sucesos definida en E. Se llama Probabilidad a toda aplicación de S en el conjunto R de los números reales

$$P:S \rightarrow R$$

Tales que:

- I. Para todo suceso A: $0 \leq p(A) \leq 1$
- II. $p(E) = 1$
- III. Para todo par de sucesos incompatibles A y B es: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Probabilidad del suceso contrario

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Probabilidad del suceso imposible

$$p(\emptyset) = 0$$

Probabilidad del suceso unión

Sucesos incompatibles:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

Sucesos compatibles:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Probabilidad de la diferencia de sucesos

$$p(A - B) = p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$

Definición axiomática

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Probabilidad condicionada

Se llama probabilidad condicionada del suceso B a la hipótesis A y se designa por $P(B/A)$ a la comparación del número de casos en los que se cumplen los dos frente a los casos en los que solo se cumple A.

$$p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Análogamente, la probabilidad condici^ona de A respecto del suceso B es:

$$p\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

De las dos relaciones anteriores se obtiene

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right)$$

Probabilidad compuesta

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p\left(\frac{B}{A}\right) \cdot p\left(\frac{C}{A \cap B}\right)$$

Dependencia e independencia de sucesos

Hay ocasiones en la que la realización de un suceso no afecta a la probabilidad de otro posterior, en ese caso son independientes.

Sean A y B dos sucesos. Se dice que A es independiente de B cuando $P(A/B)=P(A)$ (supuesto $P(B) \neq 0$). En el caso de que $P(A/B) \neq P(A)$, se dice que el suceso A depende del suceso B.

TEOREMA

La condición necesaria y suficiente para que el suceso A sea independiente de B es que

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

TEOREMA DE BAYES

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{\sum P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$