

## APLICACIONES ANALÍTICAS DE LA DERIVADA

1. Dada la función  $y=f(x)=x^3-5x^2+3x-1$ , se pide: máximos y mínimos; intervalos de crecimiento y decrecimiento; intervalos de concavidad y convexidad.

2. Estudia el crecimiento, decrecimiento y los máximos, mínimos de la función:

$$f(x)=x^3-9x^2+24x-20$$

3. Hallar los máximos y mínimos y puntos de inflexión, si los tiene, de la función  $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ .

4. Estudia los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de  $y = \frac{x^2}{x-1}$

5. Determinar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $y = e^{-x^2}$

6. ¿En qué punto presenta la función  $f(x)=-|x|$  tiene un máximo absoluto?, dicho punto, ¿es máximo relativo?

7. Se desea saber en qué intervalo cerrado la función  $y = x-x^2$  verifica todas las propiedades siguientes:

- i.  $y \geq 0$
- ii.  $f$  es creciente
- iii.  $f''$  es negativa
- iv.  $f(0) = 0$
- v.  $\exists$  un máximo.

Representa gráficamente esta función.

8. Razonar, mediante representación gráfica la respuesta a la siguiente cuestión: ¿Para cuál de las funciones existe un punto en el que la derivada es nula pero no es ni un máximo ni un mínimo?  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ .

9. La derivada de una función continua en toda la recta real es positiva para  $x < -1$ , negativa para  $-1 < x < 1$  y positiva para  $x > 1$ . ¿Qué se puede decir de la función en  $x = -1$  y en  $x = 1$ ? ¿Puede cortar cuatro veces al eje OX? Razonar la respuesta.

10. Demostrar que la función  $f(x) = \log x - \frac{1}{x+1}$  es creciente en todo su dominio de definición.

11. Determina el parámetro  $c$  para que el mínimo de la función  $y = x^2 + 2x + c$  sea igual a 8.

12. Determinar  $a$  sabiendo que la función  $g(x) = x + 2 + \frac{1}{x+a}$  alcanza un máximo para  $x = 1$ . La función  $g(x)$ , con el valor obtenido para  $a$ , ¿tiene mínimo?

13. Calcular los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que la función  $f(x)=ax^2+bx+c$  pasa por los puntos  $(1,0)$  y  $(0,-2)$  y presenta un máximo en  $x = 3/2$ .

14. Hallar los valores de  $m$  para que la función  $f(x) = x^4+4x^3+mx^2+3x-2$  sea cóncava hacia arriba  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

15. Dada la función  $y=ax^3+bx^2+cx+d$ , hallar los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que se cumpla que la gráfica de la función tenga un punto de inflexión en  $(0,0)$ , siendo la tangente en este punto paralela a la recta  $4x-y=5$  y además pase por el punto  $(1,1)$ .

16. Encontrar las funciones polinómicas  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$  cuya segunda derivada sea  $x-1$ . ¿Cuál o cuales de ellas tienen un mínimo relativo en el punto  $(4,-1/4)$ ?

17. Determinar el polinomio  $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$  que tiene 1 y 2 como raíces, pasa por el punto  $(-1, 24)$  y tiene un mínimo relativo en  $x = 1$ .

18. Hallar  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  en la función polinómica  $y = ax^3+bx^2+cx+d$  sabiendo que su tangente en el punto  $(1, 1)$  es la recta  $y = -x+2$  y que tiene un extremo en el punto  $(0, 2)$ .

19. ¿Qué valores deben tomar  $b$  y  $c$  para que  $f(x) = x^3+bx^2+cx+1$  tenga un punto extremo en  $x = 1$  y un punto de inflexión en  $x = 0$ ? El extremo que se obtiene en  $x = 1$ , ¿es un máximo o un mínimo?

20. Dada la función  $f(X) = ax^3+bx^2+cx$ , calcular  $a, b, c$  para que el punto  $(1, 5)$  y el punto de abscisa  $x = 2$  sean extremos relativos.

21. Hallar  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tenga un máximo relativo en  $(5, 28)$  y corte al eje  $OY$  en  $(0, 3)$ .

22. Determinar las condiciones que deben cumplir  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para que la función  $y=ax^3+bx+c$ :

1) Estrictamente creciente en  $(-\infty, +\infty)$ .

2) Estrictamente decreciente en  $(-\infty, +\infty)$ .

(Se supone que  $a \neq 0$ , y  $b \neq 0$ ).

23. Hallar los valores de  $m$ , para que la siguiente función  $f(x)=x^4+4x^3+mx^2+3x-2$  sea cóncava hacia arriba para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

24. Modelo 2001. (Puntuación máxima: 3 puntos)

La gráfica de la función  $f(x) = ax^3 + bx + c$  satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por  $(0, 0)$ .
- Tiene un mínimo local en  $(1, -1)$ .

Obtégase el valor de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

24. Septiembre 2000. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función  $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ . Calcúlense:

(a) Los intervalos donde es creciente y decreciente.

(b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

(c) El valor de  $x$  para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$ .

25. Determinar el punto de la gráfica  $y = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$  en que la pendiente de la tangente es máxima.

26. La función de costes por unidad de tiempo asociada con los inventarios de unos almacenes viene dado por  $C(x) = \frac{10x^2 - 20x + 250}{x^2}$  donde  $x$  indica el tamaño de los pedidos para renovar existencias, y  $C(x)$

se mide en millones de pesetas por año. Se pide:

- El tamaño de los pedidos que hace que  $C(x)$  alcance su valor mínimo, así como dicho valor
- A que valor tiende el coste al aumentar desproporcionadamente el tamaño de los paquetes, y el del coste medio (coste por unidad de paquete).

27. El número de enfermos de gripe de una ciudad a lo largo del pasado mes de Enero ha venido dado por la función  $y(t) = 100 + 200e^{0.2t}$  donde  $t$  representa el número de días transcurridos desde el pasado 1 de Enero.

- ¿Cuántos enfermos había el citado 1 de Enero?
- Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de evolución del número de enfermos al cabo de  $t$  días
- Determinar la fecha en la cuál la velocidad de evolución ha sido igual a 803'42 enfermos/día

**28. Septiembre 1999. (Puntuación máxima: 3 puntos)**

Se sabe que los costes totales de fabricar  $x$  unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión

$$C(x) = 3x^2 - 27x + 108$$

¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio (hacer dibujo)? Justifíquese que la función de coste medio,  $M(x)$ , no tiene puntos de inflexión.

29. Se introduce una población de 500 bacterias en un cultivo, creciendo su número de acuerdo con la ecuación:

$$P(t) = 500 \cdot \left( 1 + \frac{4t}{50 + t^2} \right)$$

Donde  $t$  se mide en horas. Calcular la tasa de crecimiento del número de bacterias en dicho cultivo a las dos horas. ¿A qué hora la tasa de crecimiento es máxima?

30. El número de miembros de una peña deportiva fundada en 1987 es,  $x$  años después de su fundación:

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$$

- ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros entre 1987 y 1992?
- ¿Cuál es la tendencia actual en 1992, creciente o decreciente?
- ¿Llegará a quedarse sin socios?

31. El índice de inflación de cierto país fue variando, durante el año 1987, según la expresión  $i(t) = t^2 + 15t - \frac{8t}{20}$ , donde  $t$  es el tiempo en meses desde principios del año. Se pide:

- ¿Durante qué meses el índice de inflación fue creciendo?
- ¿A partir de que mes se supera la inflación inicial del mes de enero?
- Si el gobierno tiene previsto devaluar la moneda del país cuando el índice de inflación alcance el valor 16,5 ¿en qué mes tomará la decisión?

32. Supongamos que el rendimiento  $r$  en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por  $r = 300 \cdot t \cdot (1-t)$ , donde  $0 < t < 1$  es el tiempo en horas. Se pide

- ¿En qué alumnos aumenta o disminuye el rendimiento?
- ¿En qué momento el rendimiento es nulo?
- ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

33. El área ocupada por una infección cutánea se desarrolla a partir del instante  $t=0$  según la función

$$A(t) = 10 + \frac{t}{t^2 + 1}$$

- ¿Calcular la superficie ocupada por la infección al principio.
- Hallar el instante en que es máxima el área infectada y calcular dicha área.
- Estudiar qué ocurre con el transcurso del tiempo. ¿Se estabiliza o desaparece la infección?

34. La cantidad (y) de moneda acumulada en una máquina tragaperras durante un día sigue una ley de tipo

$$y = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 19x^2 + 352x + 100$$

donde la variable x, representa el tiempo en horas (de 0 a 24). Responder, utilizando la gráfica de esta función, a las siguientes preguntas:

- ¿A qué hora la recaudación es máxima y a qué hora es mínima? ¿Cuándo entrega el mayor premio?
- ¿Cuáles son la recaudaciones máximas y mínimas?
- ¿Se queda alguna vez vacía de dinero la máquina?
- si se realiza la "caja" a las 24 horas, ¿arrojará ganancias para los dueños de la máquina?