www.clasesdeapoyo.com

Aplicaciones analíticas.

Crecimiento y decrecimiento.

Una función es creciente en un entorno si al aumentar x aumenta f(x), por contra será decreciente si al aumentar x disminuye f(x).

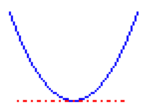
TEOREMA.

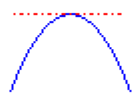
En los intervalos en los que $f'(x)>0$ entonces f(x) es creciente
En los intervalos en los que $f'(x)<0$ entonces f(x) es decreciente

Una regla práctica para estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función es estudiar el signo de la función derivada.

Máximos y mínimos relativos.

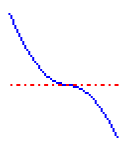
Una función f(x) tiene un **máximo relativo** o local en x = a, si existe un entorno de centro “a” en el que el valor de la función es menor que f(a). Una función tiene un **mínimo relativo** o local en x = a, si existe un entorno de centro “a” en el que el valor de la función es mayor que f(a)





En los puntos de máximo ó mínimo la tangente a la gráfica es horizontal y por tanto su pendiente es cero. Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la derivada, en los puntos de máximo ó mínimo la derivada de la función es nula.

La condición necesaria para que un punto sea extremo local de una función es que el valor de la derivada en ese punto sea cero. Hay que tener en cuenta que está condición solo es una **“CONDICION NECESARIA PERO NO SUFICIENTE”**, .ya que pueden existir puntos con derivada nula pero que no sean extremos locales.



Para saber si en un punto de derivada cero existe o no un extremo local se recurre a un criterio.
Existen dos criterios:

i. Criterio de la segunda derivada

Los valores que anulan la primera derivada(α_i), se sustituyen en la segunda derivada, y se estudia el signo mediante el siguiente criterio:

a. Si $f''(\alpha_i)<0$ entonces en el punto (α_i , $f(\alpha_i)$) hay un MÁXIMO
b. Si $f''(\alpha_i)>0$ entonces en el punto (α_i , $f(\alpha_i)$) hay un MÍNIMO
c. Si $f''(\alpha_i)=0$, hay que seguir derivando. Si la primer derivada que no se anula en $x=\alpha_i$ es de índice impar, en [α_i , $f(\alpha_i)$] hay un punto de inflexión. Si la primera derivada que no se anula es de índice par, en [α_i , $f(\alpha_i)$] hay un máximo si la derivada es menor que cero ó un mínimo si es menor que cero.

www.clasesdeapoyo.com

ii. Criterio del signo de la primera derivada

Se estudia el signo de la primera derivada en el entorno de punto donde se anula(a).

a) Si $f'(\alpha_i^+) > 0$ y $f(\alpha_i^-) < 0$, en $x = a$ hay un mínimo relativo o local.

b) Si $f'(\alpha_i^+) < 0$ y $f(\alpha_i^-) > 0$, en $x = a$ hay un máximo relativo o local

c) Si en el entorno del punto a, la derivada no cambia de signo en x = a hay un punto de inflexión.

Para calcular los extremos relativos se aconseja seguir los siguientes pasos:

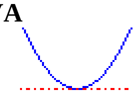
1. Se calcula la derivada primera f '(x).
2. Se calculan los valores α_i que anulan la primera derivada igualándola a cero: f '(x) = 0.
3. Se calculan los valores de la función en los puntos que se anula la derivada $f(\alpha_i)$
4. Para determinar el si en el punto $(\alpha_i, f(\alpha_i))$ hay un extremo local o no se aplica uno de los dos criterios anteriores.

Concavidad y convexidad.

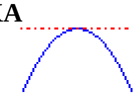
Una función f(x) es cóncava en un punto, si la tangente a la gráfica de la función en ese punto queda por debajo de la gráfica de la función. Una función f(x) es convexa en un punto, si la tangente a la gráfica de la función en ese punto queda por encima de la gráfica de la función.

La curvatura de una función se estudia en el signo de la segunda derivada con el siguiente criterio:
CRITERIO:

- Si $f''(x) > 0$ entonces f(x) es **CÓNCAVA**



- Si $f''(x) < 0$ entonces f(x) es **CONVEXA**



La curvatura de una función se estudia por intervalos.

Puntos de Inflexión.

Son puntos donde cambia la curvatura de la gráfica, es decir pasa de cóncava a convexa o viceversa. Teniendo en cuenta las definiciones de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión serán puntos donde la tangente a la gráfica de la función corte a la gráfica.

Cálculo

i. Se halla f "(x) y se iguala a cero para calcular sus raíces $(\alpha_1,\alpha_2,...)$.
ii. Se hallan la imágenes de $(\alpha_1,\alpha_2,...)$, sustituyendo en f (x)
iii. En los puntos $[\alpha_1,f(\alpha_1)]$, $[\alpha_2,f(\alpha_2)]$,... existirán puntos de inflexión:

a) Si $f'''(\alpha_i) \neq 0$: $\begin{cases} \text{De cóncavo a convexo Sí } f'''(\alpha_i) < 0 \\ \text{De convexo a cóncavo Sí } f'''(\alpha_i) > 0 \end{cases}$

b) Si $\text{Signo}\{f''(\alpha_i^+)\} \neq \text{Signo}\{f''(\alpha_i^-)\}$