# INTEGRALES DEFINIDAS. CÁLCULO DE ÁREAS

**1.** Dada la función f(x) = | $x^2$ - 1|. Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx$

**2.**

a) Representar y = $(x - 1)^3$.

b) Calcular la integral indefinida $\int_a^b (x-1)^3 \cdot dx$

c) Justificar el resultado de b en función de a y de la interpretación de la integral definida.

**3.** Dada la función f(x) = $4x^3$ + 10x + 8, se pide:
a) Calcular una primitiva, F(x), que cumpla la condición F(1) =20.
b) Calcular la integral de la función del enunciado, f(x), en el intervalo [1, 2]

**4.**

a) Sea f(x) $3x^2$ + cos x. ¿Cuál de las siguientes funciones es primitiva de f(x)?:
F(x) = $3x^3$ - sen x  ó G(x) = $x^3$ + sen x + 2

b) Aplicar los resultados anteriores para calcular la integral de f(x) en el intervalo [ 0,π]

**5.** Calcular un polinomio de segundo grado P(x) tal que P(0) = P(1) = 0 y tal que $\int_0^1 P(x)\cdot dx = 1$

**6.** Dada la función f así definida $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Sí} \quad 0 < x \geq \frac{\pi}{2} \\ \text{sen } x & \text{Sí} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{Sí} \quad \frac{\pi}{4} \leq x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Represéntese gráficamente.

b) Calcúlese el valor de $\int_0^{\pi/2} f(x)\cdot dx$

**7.** Calcular aproximadamente la $\int_0^1 x\cdot(1-x)dx$ mediante un método numérico basado en la división del intervalo [0,1] en cuatro subintervalos iguales y comprobarlo con el valor exacto obtenido aplicando la regla de Barrow. ¿Cuánto vale el error cometido?

**8.** Calcular mediante una integral definida el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 4 metros.

**9.** Calcular el área delimitada por el eje OX y la gráfica de la función y = $x^2$ – 6x. Esbozar la gráfica

**10.** Sea la función f(x) = $x^2$– 6x + 5. Calcular:

a) El incremento de la función en el punto x = 3, para un incremento de la variable dependiente igual a 0, 01.

b) El punto de la gráfica de f(x) en que la tangente tiene por pendiente 2.

c) El área limitada por la gráfica de la función y el eje de las abscisas.

**11.** Hallar el área de la figura comprendida entre la curva y = $x^3$, la recta x = 2 y el eje de abscisas.

**12.** Calcular el área del recinto limitado por la recta x = 0, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y el eje OX. Realiza un esbozo gráfico.

**13.** Calcular el área limitada por las gráficas de las parábolas

$$y = x^2 \qquad\qquad y = \sqrt{x}$$

**14.** Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = x, \quad y = x^2 - x$$

**15.** Calcular el área limitada por las gráficas de

a) $y = x^2 + 1$; $y = 2x + 1$
b) $y = x^2 - 1$; $y = 3$
c) $y = x^2$; $y = x + 2$
d) $y = -x^2 + 4x + 5$; $y = 5$

**16.** Dado el polinomio $p = x^3 + 3x^2 + 2x$, calcular sus raíces. Determinar el área de la región del plano que encierran la curva $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ y su tangente en $x = -\frac{2}{2}$.

**17.** Considérese la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$, así como su tangente en el origen. Hallar el área de la región encerrada entre la curva y la tangente.

**18.** Calcular el área limitada por la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ el eje de abscisas, x = 1 y x = e.

**19.** Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

a) Calcular una primitiva para f.
b) Calcular el área encerrada por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas x =2, x =3.

**20.** Calcular el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta y =1.

**21.** Dibujar las gráficas de las funciones

$$y = 2\,e^{2x}, \quad y = 2\,e^{-2x}.$$

Calcular el área comprendida entres dichas gráficas y las rectas verticales x = -1, x = 1.

**22.** Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función $f(x) = x\cdot e^{-x}$, el eje OX y las rectas x = 1 e x = 3.

**23.** Calcular el área de la región del plano que está limitada entre las curvas $y = \frac{1}{(1+x)^2}$ e $y = \frac{-1}{(1+x)^2}$, y las rectas x = 0, x = 1.

**24.** Esbozar la gráfica de $y = \cos x - \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, y calcular el área comprendida entre dicha curva, el eje OX y x = 0, x = π/4

**25.** Calcular el área limitada por la curva y = sen x, el eje de abscisas y

a) las rectas x = 0 y $x = \frac{\pi}{4}$

b) las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = -\frac{\pi}{4}$

**26.** Determinar el área de la región limitada por la función f(x) = cos 4x, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = -\frac{\pi}{4}$

**27.** Representar la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x}; \text{Sí}: x < 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3x; \text{Sí}: x \geq 0 \end{cases}$, y hallar el área limitada por la gráfica de la función f(x), el eje OX y las rectas de ecuación x = –1 y x = 3.

**28.** Dada la función $f(x) = (x-4) + \frac{10}{x+4}$, estudiar:

a) Continuidad de la función.
b) Intervalos de crecimiento y descrecimiento.
c) Si existen máximos y mínimos.
d) Si existen puntos de inflexión.
e) Área limitada por la función y las rectas x = –3 y x = –1.

**29.** La función $f(x) = e^x (x^2 - 3x + 2)$ está definida en toda la recta real pero sólo es negativa sobre un intervalo finito. Se pide:

a) Identificar dicho intervalo.
b) Hallar el punto donde f alcanza un mínimo absoluto.
c) Hallar el área limitada por f(x), la recta x = 0 y el eje OX, dando el resultado en función del número e.

**30.** Calcular el área comprendida bajo la curva $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ entre los valores x = 1 y x = e.

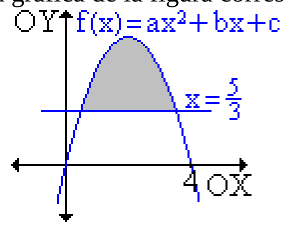
**31.** Representar la función $y = -\ln x^2$ estudiando su dominio, continuidad, máximos y mínimos, intervalos de crecimiento, así como el área limitada por la función y las rectas x = e y $x = e^2$.

**32.** Calcular el área limitada por la recta y = -5 y la gráfica del polinomio interpolador de grado 2 que pasa por los puntos (1,-5), (2,2) y (-1,-7)

**33.** Un polinomio f (x) de grado 2 pasa por los puntos (0,0) (-1,0) y (1,2). Encontrar el área determinada por la curva f(x) y el eje de abscisas.

**34.** Encontrar una función polinómica de segundo grado que pase por los puntos (0,-1), (1,2) y (2,3). Calcular el área limitada por la función polinómica anterior y las rectas y = 0, x = 1 y x = a, en donde a es la abscisa del punto en donde la función alcanza el valor máximo.

**35.** Sabiendo que la representación gráfica de la figura corresponde a una función polinómica de




grado 2 y que el área rayada mide 4 $U^2$, se pide hallar f(x).

**36.** Hallar el área comprendida entre las curvas $y = x^4 + 1 \quad y = -x^2 + 3$

**37.** Hallar el área de la región finita del plano limitada por el eje de abscisas y la curva $y = x^3 - 2x^2$. Esbozar la curva.

**38.** Representar gráficamente $f(x) = |x^2 - 1|$ y calcular el área encerrada entre $x = -1$ y $x = 1$.

**39.** Representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x} & \text{Sí} \quad x < 0 \\ x^3 - 4x^2 + 3x & \text{Sí} \quad x \geq 0 \end{cases}$. Hallar el área limitada por la gráfica de la función y = f(x), el eje OX y las rectas de ecuación $x = -1$ y $x = 3$.

**40.** Calcular el área determinada por las parábolas $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$

**41.** Esboce la gráfica de f(x)=|cos x| y calcule el área encerrada por dicha gráfica en el intervalo [0,2π] y el eje de abscisas.

**42.** Determinar el área del recinto situado encima de la parábola $y=x^2$ y debajo de la recta y=4

**43.** Hallar el área del recinto limitado por:

$$y = x^2 + 3 \qquad\qquad y = x + 5$$

**44.** Hallar el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la tangente a la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$, en el punto x = 2.

**45.** Hallar el área del recinto limitado por el eje x y la función $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

**46.** Hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas x = 3, x = 4.

**47.** Sabiendo que una función $y = f(x)$ es continua, que $f(0) = 0$ y además que su derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{Sí} \quad x < 1 \\ 1 & \text{Sí} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular f(x)
b) Esbozar su gráfica

**48.** Se considera la función real de variable real definida por el intervalo [2,0] por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Calcular la integral definida $\int_0^2 f(x)dx$

**49.** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} \text{si} & x < 1 \\ a(2-x)\text{si} & x \geq 1 \end{cases}$

Se pide:

a. Determinar el valor de la constante a para que f(x) sea continua en todos los puntos.

b. Para el valor de a antes obtenido, calcular $\int_0^2 f(x)dx$