INTEGRAL DEFINIDA.
AREAS Y VOLÚMENES.

1. REGLA DE LEIBNITZ, NEWTON O BARROW.

Si F(x) es una primitiva de f(x) se verifica:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

1. Calcular $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}3x dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}3x dx = \left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{3}(\cos 3\pi - \cos(-3\pi)) = 0$$

2. Calcular $\int_0^{Ln2} e^{-x} dx$

$$\int_0^{Ln2} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{L2} = \left(-e^{-Ln2}\right) - \left(-e^{-0}\right) = \frac{-1}{2} + 1 = 0$$

2. AREA DEL RECINTO LIMITADO POR LA CURVA y = f (x), EL EJE OX Y LAS RECTAS x = a, x = b (a < b).

Se distinguen tres casos:

i. f(x) > 0 en [a,b]

Si f(x) > 0, el área del recinto limitado por y = f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b donde a < b es:

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

ii. f(x) < 0 en [a,b]

Si f(x) < 0, el área del recinto limitado por y = f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b donde a < b es:

$$A(R_1) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = A(R_2)$$

Ejemplo:

Hallar el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 4.

Solución:

Hallamos los posibles puntos de intersección con el eje OX resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 8x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x\cdot(x-2)\cdot(x-4) = 0$$

Si 2 < x < 4 entonces f (x) < 0

El área es $A(R) = \int_2^4 -\left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\cdot dx = -\int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\cdot dx = -\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 4x^2\right]^4 = 4u^2$

Se obtiene el mismo resultado aplicando el valor absoluto de la integral definida:

$$A(R) = \left|\int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\cdot dx\right|$$

iii. f (x) no tiene signo constante en el intervalo [a,b]

En este caso $\int_a^b f(x)\cdot dx$ NO ES el área limitada por y = f (x), el eje OX y las rectas x = a, x = b donde a < b.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = A(R_1) - A(R_2) + A(R_3) - A(R_4) + A(R_5)$$

El área $A(R)$ del recinto R, limitado por y = f (x), el eje OX y las rectas x = a, x = b donde a < b es:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) + A(R_5)$$

$$A(R) = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{x_4} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_4}^{b} f(x)dx\right|$$

O de otra manera:

$$A(R) = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} -f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} -f(x)dx + \int_{x_4}^{b} f(x)dx =$$

$$= \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx - \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{b} f(x)dx$$

Ejemplo:

Calcular el área del recinto limitado por $y = x^3 - 3x$ y el eje OX.

El problema lo vamos a resolver de dos formas:

a) Hallando los puntos de intersección con el eje OX, que son: $\left(-\sqrt{3},0\right), (0,0), \left(\sqrt{3},0\right)$

Como $f(x) = x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$ comprobamos que:

Si $-\sqrt{3} < x < 0 \Rightarrow f(x) > 0$

Si $0 < x < \sqrt{3} \Rightarrow f(x) < 0$

Por tanto, $A(R) = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^3 - 3x\right)dx + \left|\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^3 - 3x\right)dx\right| = \frac{9}{2}u^2$

b) Además de hallar los puntos de intersección con OX se observa que f(x) es una función impar y su gráfica es simétrica respecto del origen: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -\left(x^3 - 3x\right) = -f(x)$

Por tanto $A(R) = 2\int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^3 - 3x\right)dx$.

Haz la representación gráfica de la función.

3. ÁREA DEL RECINTO LIMITADO POR DOS CURVAS.

El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = f_1(x), y = f_2(x)$ cuyos puntos de intersección tiene por abcisas x_1, x_2 siendo $x_1 < x_2$ y $f_1(x) \geq f_2(x), \forall x \in [x_1, x_2]$ es:

$$A(R) = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$$

Ejemplo:

Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2, y = \pm\sqrt{x}$.

Solución:

Se hallan los **<u>límites de integración</u>** calculando las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \pm\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x\left(x^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son (0,0) y (1,1).

Como $\pm\sqrt{x} \geq x^2 \forall x \in [0,1]$, el área del recinto determinado por ambas curvas es:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{1}{3}u^2$$