INTEGRALES RACIONALES

Sea la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$ donde P(x) y Q(x) son funciones polinómicas. Si el grado P(x)≥Q(x) se divide P(x) entre Q(x) mediante el método de la caja y se obtiene un cociente C(x) y un resto R(x), que se sustituye en la integral quedando de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int C(x) \cdot dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} \cdot dx$$

con grado de R(x)<grado de Q(x)

La integral $\int C(x) \cdot dx$ es inmediata pues es polinómica, la integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)} \cdot dx$ es una integral del tipo racional, que se resuelve descomponiéndola en fracciones simples. Se pueden presentar tres casos diferentes:

a) Q(x) solo tiene raíces reales simples (α, β,...). Se demuestra entonces que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{N}{x-\eta}$$

Donde A, B,...,N, son números reales que se pueden determinar de dos formas; identificando los coeficientes de R(x) con los del polinomio del numerador de la fracción suma del segundo miembro, ó teniendo en cuenta que dos polinomios son iguales si toman los mismos valores para cualquier valor de x. La integral se acaba descomponiendo en una suma de integrales del tipo logaritmo neperiano.

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int \left[\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \frac{N}{x-\eta} \right] \cdot dx = \int \frac{A}{x-\alpha} \cdot dx + \int \frac{B}{x-\beta} + \ldots + \int \frac{N}{x-\eta} dx =$$

$$= A \int \frac{1}{x-\alpha} \cdot dx + B \int \frac{1}{x-\beta} + \ldots + N \int \frac{1}{x-\eta} dx = A \cdot Ln|x-\alpha| + B \cdot Ln|x-\beta| + \ldots + N \cdot Ln|x-\eta| + C$$

Ejemplo:

$$\int \frac{2x-3}{x^3-x} dx = \left\{ \frac{2x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \right\} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{A}{x+1} \cdot dx + \int \frac{B}{x} dx + \int \frac{C}{x-1} \cdot dx = A \cdot Ln|x+1| + B \cdot Ln|x| + C \cdot Ln|x-1| + K$$

Cálculo de las constantes:

$$\frac{2x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A \cdot x \cdot (x-1) + B(x+1) \cdot (x-1) + C(x+1) \cdot x}{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)}$$

Identificando numerador con numerador:

$$2x-3 = A \cdot x \cdot (x-1) + B(x+1) \cdot (x-1) + C(x+1) \cdot x = (A+B+C)x^2 + (-A+C)x - B$$

Identificando por coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r} 2^{\text{o}}\text{ grado}: 0 = A+B+C \\ 1^{\text{o}}\text{ grado}: 2 = -A+C \\ \text{T.independiente}: -3 = -B \end{array}\right\} \text{resolviendo el sistema: } A = \frac{-5}{2}, B = 3, C = \frac{-1}{2}$$

Igualando polinomios:

$$\left.\begin{aligned} x=-1:-5=2A+0B+0C \\ x=0:-3=0A-B+0C \\ x=1:-1=0A+0B+2C \end{aligned}\right\}\text{resolviendo: } A=\frac{-5}{2}, B=3, C=\frac{-1}{2}$$

Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{2x-3}{x^3-x}dx=\frac{-5}{2}\text{Ln}|x+1|+3\cdot\text{Ln}|x|-\frac{1}{2}\text{Ln}|x-1|+K$$

b) Q(x) tiene raíces reales múltiples: $Q(x)=(x-\alpha)^a\cdot(x-\beta)^b\cdot\ldots\cdot(x-\eta)^n$ donde a, b,..., n, son los ordenes de multiplicidad respecto de las raíces α, β,...,η. Se demuestra que:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)^a}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{a-1}}+\ldots+\frac{A_a}{(x-\alpha)}+\frac{B_1}{(x-\beta)^b}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{b-1}}+\ldots+\frac{B_b}{(x-\beta)}+\ldots$$

donde A_1, A_2,...A_a , B_1, B_2,..., son números reales que se obtienen de la misma forma que en el caso anterior. Las integrales que resultan son de dos tipos, ambas inmediatas

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^a}dx=A\int(x-\alpha)^{-a}dx=A\cdot\frac{(x-\alpha)^{-a+1}}{-a+1}+C=\frac{A}{1-a}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{a-1}}+C$$

$$\int\frac{A}{x-\alpha}\cdot dx=A\cdot\text{Ln}|x-\alpha|+C$$

Ejemplo:

$$\int\frac{x^2+x+2}{x^3-3x+2}\cdot dx$$

$x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$ Teniendo en cuenta la descomposición factorial del polinomio del denominador, la fracción se descompone en:

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

sustituyendo en la integral:

$$\int\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\cdot dx=\int\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+2}\right]\cdot dx=\frac{A_1}{1-2}\cdot\frac{1}{(x-1)^{2-1}}+A_2\cdot\text{Ln}|x-1|+B\cdot\text{Ln}|x+2|+C=$$

$$=\frac{-A_1}{x-1}+A_2\cdot\text{Ln}|x-1|+B\cdot\text{Ln}|x+2|+C$$

Cálculo de constantes:

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A_1\cdot(x+2)+A_2\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}$$

igualando numeradores:

$$x^2+x+2=A_1\cdot(x+2)+A_2\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)^2$$

$$x^2+x+2=(A_2+B)\cdot x^2+(A_1+A_2-2B)\cdot x+(2A_1-2A_2+B)$$

identificando polinomios, aparece un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x^2:1=A_2+B \\ x:1=A_1+A_2-2B \\ \text{T.ind.}:2=2A_1-2A_2+B \end{aligned}\right\}\text{Resolviendo: } A_1=\frac{4}{3};\quad A_2=\frac{5}{9};\quad B=\frac{4}{9}\text{. Sustituyendo en la integral:}$$

$$\int\frac{x^2+x+2}{x^3-3x+2}\cdot dx=\frac{-4/3}{x-1}+\frac{5}{9}\cdot\text{Ln}|x-1|+\frac{4}{9}\cdot\text{Ln}|x+2|+C$$