Continuidad.

Se dice que una función es continua en un punto, si en ese punto existe la función, tiene límite y además coincide con el valor de la función en el punto. Extrapolando se dice que una función es continua en todos los puntos de su dominio si lo es en cada uno de ellos.

Si f es una función real y $x = x_0$ un punto, f es continua en x_0, sí:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esta condición se puede desdoblar en la regla de los tres pasos:

i. Debe existir $f(x_0)$

ii. Debe de existir $\lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1^a: \begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \end{cases} \\ 2^a: \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \end{cases}$

iii. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Sí f no continua en $x = x_0$, f es discontinua en x_0. Existen diversos tipos de discontinuidad

$$\begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{No evitable} \begin{cases} \text{de } 1^a \text{ Especie} \\ \text{de } 2^a \text{ Especie} \end{cases} \end{cases}$$

- Discontinuidad evitable: $\begin{cases} \text{No } \exists\ f(x_0) \\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$

- Discontinuidad no evitable de 1^a especie. No $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ por ser diferentes sus límites laterales:
  - Salto finito: los dos límites laterales son finitos.
  - Salto infinito. Al menos un límite lateral es infinito.

- Discontinuidad no evitable de 2^a especie. No $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ al no existir al menos uno de los límites laterales

La continuidad a una función se estudia en los puntos excluidos del dominio y en el caso de funciones por intervalos en los puntos frontera.