Límites

El límite es una herramienta que se utiliza para el estudio de las funciones en los puntos donde tienen problemas de existencia de cualquier tipo. En los puntos donde la función no tenga problemas de existencia, el límite coincide con el valor de la función en el punto.

El límite se estudia en los puntos excluidos del Dominio de la función, en los infinitos, y en el caso de funciones por intervalos en los puntos frontera (Puntos donde cambia la expresión de la función).

El límite de la función en un punto estudia el comportamiento de la función en las proximidades del punto, sin importarle lo que ocurra en el punto. Se dice que el límite de la función f(x) es igual a L cuando x tiende a x_o si cuando x se aproxima a x_o, f(x) se aproxima a L, sin importarnos que ocurra cuando x valga x_o, y se escribe:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \exists\ \delta, \varepsilon > 0 / \text{Si} \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - L\right| < \varepsilon$$

Siendo δ y ε tan pequeños como queramos

Existen definiciones análogas

El límite de una función en un punto si existe, es único.

Para que una función tenga límite en un punto, se deben de cumplir dos condiciones:

a) Que existan los límites laterales en el punto.

b) Que estos sean iguales.

$$\begin{cases} a) \begin{cases} a.1. - \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \\ a.2. - \exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \end{cases} \\ b) \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \end{cases}$$

$$\text{LÍMITES LATERALES:} \begin{cases} \text{Por la izquierda } \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \begin{cases} x \to x_0 \\ x < x_0 \end{cases} \\ \text{Por la derecha } \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \begin{cases} x \to x_0 \\ x < x_0 \end{cases} \end{cases}$$

Cálculo de límites, se sustituye el valor de la variable por el valor hacia el que tiende, se puede obtener tres tipos de solución:

(a) $L \in R$. FIN

(b) $\pm\infty$. Se estudian los límites laterales. FIN.

(c) Indeterminación. Resolución según tipos:

I) $\frac{\infty}{\infty} = ?$ Se divide por la x de mayor grado o se aplica L'Hopital. Se presentan tres casos diferentes según los grados de los polinomios que formen la fracción. Sea

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- Sí Grado P(x) > Grado Q(x) Límite = ∞
- Sí Grado P(x) = Grado Q(x) Límite = finito
- Sí Grado P(x) < Grado Q(x) Límite = 0

Sí las funciones no son polinómicas, se simplifica el proceso teniendo en cuenta los grados del infinito. Cuando $x \to \infty$: $Lx < Lx^n < x < x^n < a^x <$..

II) $\infty - \infty = ?$ Se multiplica y se divide por el conjugado de la irracionalidad.

III) $\frac{0}{0} = ?$. Dos tipos:

Racionales.

- Ruffini, eliminando las raíces comunes
- L'Hopital
- Por infinitésimos. Si x→0 se establecen las equivalencias: $\begin{cases} \text{Sen } x \approx x \\ \text{tg } x \approx x \\ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Irracionales.

- Multiplicando por el conjugado de la irracionalidad y eliminando raíces comunes.
- L'Hopital

IV) $1^\infty = ?$. Se resuelve en forma logarítmica según:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)^{g(x)}\right)^{1^\infty} = \text{EXP}\left[\lim_{x \to x_0} \left(g(x) \cdot (f(x) - 1)\right)\right]$$

Número e

Definición $e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Propiedades:

1. Cualquier número que se sume al exponente no altera el resultado
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+n} = e$$
2. Cualquier número que multiplique al exponente, aparece como exponente de e.
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{nx/m} = e^{n/m}$$
3. Cualquier número que se sume al denominador no altera el resultado
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+n}\right)^x = e$$
4. Cualquier número que multiplique a la fracción, aparece como exponente de e.
$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{n}{m \cdot x}\right)^x = e^{n/m}$$

Propiedades de los límites.

i) $\lim_{x \to a} (K \pm f(x)) = K \pm \lim_{x \to a} f(x)$

ii) $\lim_{x \to a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

iii) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

iv) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

v) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

vi) $\lim_{x \to a} \left((f(x))^{g(x)}\right) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim_{x \to a} g(x)}$