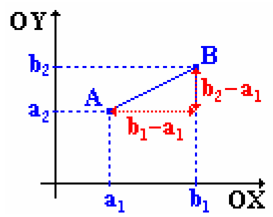
MÉTRICA DE LA RECTA

Distancia entre dos puntos

Sean los puntos A = (a_1 , a_2) y B = (b_1 , b_2), la distancia entre A y B viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$



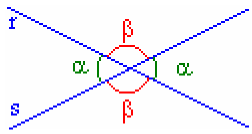
$$d(A-B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

Propiedades de la distancia:

- $d(A-B) \geq 0$
- Sí la $d(A-B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A-B) = d(B-A)$
- $d(A-B) + d(B-C) \geq d(A-C)$

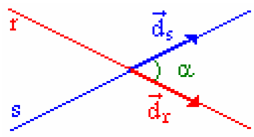
Ángulo entre dos rectas

Dos rectas al cortarse determinan cuatro ángulos, dos a dos iguales. Se denomina ángulo entre dos rectas al menor de ellos



El ángulo entre dos rectas r y s se puede obtener de varias formas diferentes según el tipo de ecuación en que nos vengan expresadas las rectas.

Sí se conocen los vectores de dirección de ambas rectas, el ángulo que formen las rectas será igual que el ángulo que formen los vectores, y por tanto, se calcula como una aplicación del producto escalar de vectores

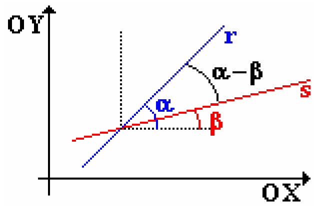


$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{d}_r\circ\vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\cdot\left|\vec{d}_s\right|}$$

Conocidas sus ecuaciones generales, $\begin{cases} r: A_1x+B_1y+C_1=0 \\ s: A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ y sea α el ángulo que forman:

$$\cos\alpha=\frac{\left|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Conocidas las pendientes de cada una de ellas aplicando la fórmula de la tangente de la diferencia:

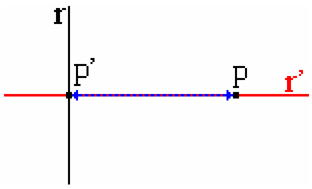


$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}=\left\{\begin{matrix}tg\,\alpha=m_r\\ tg\,\beta=m_s\end{matrix}\right\}=tg(r-s)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$$

Distancia punto – recta

Se define la distancia de un punto a una recta como la mínima distancia entre el punto y la recta. Existen dos formas de calcularla la distancia de punto $P(x_0,y_0)$ a la recta $r\equiv Ax+By+C=0$.

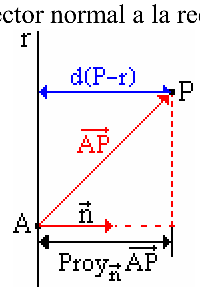
i) Como la distancia del punto P a P', siendo P' el punto de corte de r con su perpendicular trazada desde P.



Este método se realiza por pasos:

1) Calcular r', perpendicular a r que pasa por $P(x_0, y_0)$, utilizando para ello, el haz de rectas perpendiculares a r, y particularizando en el punto P para calcular el parámetro k.
2) Calcular el punto P', como intersección de r y r'. Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones.
3) Calcular la distancia de P a r como la distancia de P a P'

ii) Como proyección del vector $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{n}$, siendo A un punto cualquiera de la recta y $\vec{n}$, un vector normal a la recta.



$$d(P-r)=Proy_{\vec{n}}\overline{AP}=\frac{\overline{AP}\circ\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

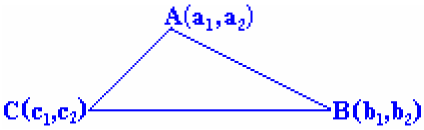
Distancia entre dos rectas

Solo tiene sentido entre rectas paralelas. Sean $r\equiv Ax+By+C=0$ y $r'\equiv Ax+By+C'=0$

$$d(r-r')=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Área de un triángulo de vértices.

Conocidas las coordenada de los vértices de un triángulo, el área (S) del triángulo se puede obtener como aplicación del producto escalar, siendo $\overline{AB'}$ el vector normal (perpendicular) de $\overline{AB}$.



$$S = \frac{\left|\overline{AB'} \circ \overline{AC}\right|}{2}$$

El vector $\overline{AB'}$ se obtiene a partir del vector $\overline{AB}$, intercambiando sus componentes y a una de las dos el signo.

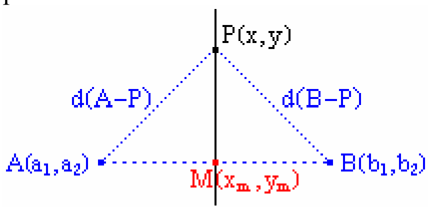
El área de un triángulo se puede determinar conociendo las longitudes de sus lados mediante la formula de Heron. Si las longitudes de los lados fuesen a, b y c, su área sería:

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

siendo s la semisuma de las longitudes de los lados $\left(s = \frac{a+b+c}{2} \right)$

Mediatriz de un segmento.

Definición; lugar geométrico de los puntos el plano que equidistan de los extremos de un segmento. La mediatriz es una recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. La mediatriz de vértices $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$ se puede calcular de dos formas:



i) Por su definición. Sea P(x,y) un punto genérico de la mediatriz, de la definición d(A–P) = d(B–P)

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}$$

teniendo en cuenta que sí dos raíces son iguales, sus radicándoos también deben serlo

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2$$

desarrollando los cuadrados y ordenando se llega a la ecuación general de la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$ ó expresado de otra forma a la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos A y B.

ii) Con el punto medio(M) del segmento $\overline{AB}$, y siendo el vector $\overline{AB}$ normal a la mediatriz se calcula la ecuación

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (A, B) = \vec{n}$$

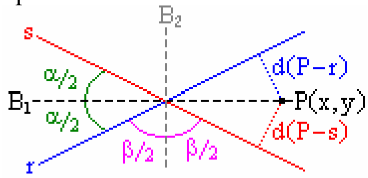
La ecuación de la mediatriz tiene la forma:

$$Ax + By + k = 0$$

Determinándose el valor de k con el punto M.

Bisectriz de dos rectas.

Definición; lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas secantes. Son dos rectas que dividen a los ángulos que forman otras dos rectas secantes en partes iguales.



Se calculan mediante la definición de distancia de un punto a una recta, tomando un punto genérico P(x , y).

Sean las rectas $r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$ sus bisectrices serán:

$$d(P-r) = d(P-s)$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Operando una vez con cada signo, aparecen dos ecuaciones generales, correspondiente cada una de ellas a cada una de las bisectrices, y siendo estas perpendiculares entre sí.

Elementos de un triángulo.

i. **Mediana.** Recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto.
ii. **Baricentro.** Punto donde se cortan las medianas.
iii. **Altura.** Recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.
iv. **Ortocentro.** Punto donde se cortan las alturas.
v. **Mediatriz.** Recta que equidista de dos vértices de un triángulo.
vi. **Circuncentro.** Punto donde se cortan las mediatrices. Centro del triángulo.
vii. **Bisectriz.** Rectas que dividen los ángulos de un triángulo en dos partes iguales.
viii. **Incentro.** Punto donde se cortan las bisectrices de un triángulo. Centro de la circunferencia inscrita en un triángulo.