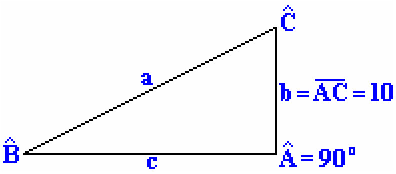
1. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, si sen B = 1/3 y que el lado AC es igual a 10cm. Calcular los otros lados de este triángulo.

Solución.



Mediante la definición de $\operatorname{sen}\hat{B}$, se calcula el lado c.

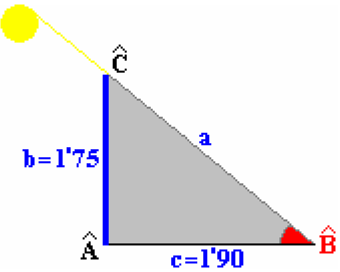
$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{10}{1/3} = 30\,\text{cm}$$

Conocidos un cateto (b) y la hipotenusa (a), y aplicando el teorema de Pitágoras, se calcula el cateto que falta (c).

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{30^2 - 10^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

2. Un individuo cuya altura es de 1,75 m. proyecta una sombra de 1,90 m. Calcular las razones trigonométricas del ángulo que forman los rayos del Sol con la horizontal.

Solución.



Se pide calcular las razones trigonométricas del ángulo B, para lo cual hace falta la longitud de la hipotenusa, que se calcula mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1'75^2 + 1'90^2} = 2'58$$

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{1'75}{2'58} = 0'68$$

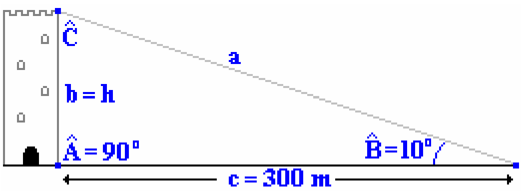
$$\cos\hat{B} = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{1'90}{2'58} = 0'74$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{1'75}{1'90} = 0'92$$

Nota: Como norma general se usan tantos decimales como los que lleven los datos

3. Una torre se a 300 m de su pie, bajo un ángulo de 10º. Calcular su altura. Dato: sen10º=0'1736

Solución.



Aplicando la definición de de tangente al ángulo B se puede calcular la altura de la torre.

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{h}{300}$$

$$h = 300 \cdot \operatorname{tg}\hat{B} = 300 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$$

Cálculo de tg 10º.

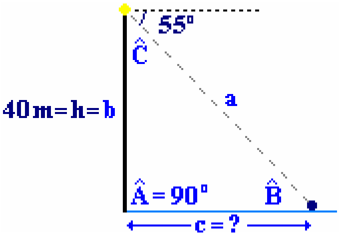
$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{\operatorname{sen} 10}{\cos 10} = \frac{\operatorname{sen} 10}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 10}} = \frac{0'1736}{\sqrt{1 - 0'1736^2}} = 0'1763$$

Se sustituyen en la expresión de la altura.

$$h = 300 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 300 \cdot 0'1763 = 52'89\text{ m}$$

4. Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es de 55º. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

Solución.



La distancia pedida se halla mediante la definición de tangete de $\hat{C}$, el ángulo $\hat{C}$ se calcula como complementario del ángulo de depresión.

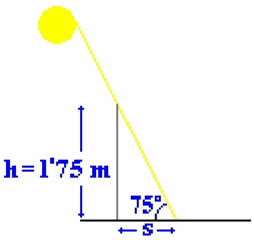
$$\hat{C} = 90 - 55 = 35^{o}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{c}{b} = \frac{c}{40}$$

$$c = 40 \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = 40 \cdot \operatorname{tg} 35^{o} = 28 \text{ m}$$

5. La altura máxima del sol sobre el horizonte se produce en Madrid al mediodía solar del 21 de junio, y es de 73º. ¿Qué sombra proyectaría un poste de 1'75 m?

Solución.



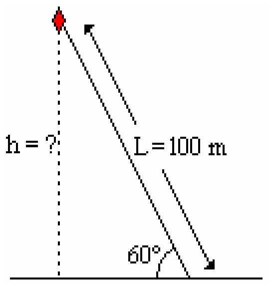
La longitud de la sombra se calcula con la definición de tangente de 75º.

$$\operatorname{tg} 75^{o} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{h}{s}$$

$$\operatorname{tg} 75^{o} = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{\operatorname{tg} 75^{o}} = \frac{1'75}{\operatorname{tg} 75^{o}} = 0'47 \text{ m}$$

6. Una cometa esta unida al suelo por un hilo de 100 m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60º. Suponiendo que el hilo esta tirante, hallar a que altura sobre el suelo se encuentra la cometa.

Solución.



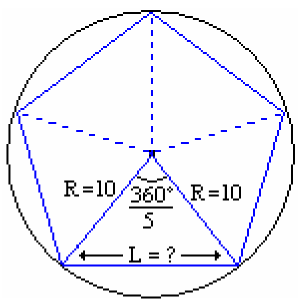
La altura a la que se encuentra la cometa se calcula mediante la definición de seno de 60º

$$\operatorname{sen} 60^{o} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{h}{L}$$

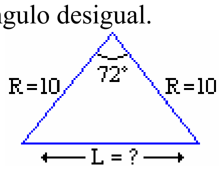
$$\operatorname{sen} 60^{o} = \frac{h}{L} \qquad h = L \cdot \operatorname{sen} 60^{o} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ m}$$

7. Calcular la longitud del lado y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

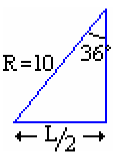
Solución.



Un pentágono regular inscrito en una circunferencia se puede dividir en cinco triángulos isósceles de los que se conocería la longitud de los lados iguales (R) y el ángulo desigual.



Cada triángulo isósceles a su vez se puede dividir en dos triángulos rectángulos de los que se conocería un ángulo agudo y la hipotenusa.

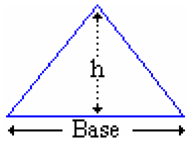


Aplicando la definición de seno de 36º se calcula la longitud del lado de triángulo (L/2) y de está, la del lado del pentágono regular.

$$\operatorname{sen} 36^{o} = \frac{L/2}{R} \qquad \frac{L}{2} = R \cdot \operatorname{sen} 36^{o} \qquad L = 2R \cdot \operatorname{sen} 36^{o} = 2 \cdot 10 \operatorname{sen} 36^{o} \approx 11'8 \text{ cm}$$

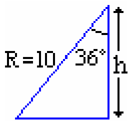
El área del pentágono se calcula como cinco veces la de uno cualquiera de los triángulos isósceles en el que lo hemos dividido.

$$A_{Pent} = 5A_{Tr}$$



El área del triángulo se calcula según su definición

$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h$$



Donde la base es la longitud del lado del pentágono y la altura se calcula de igual forma que el lado del pentágono solo que en este caso utilizando la definición de coseno de 36º.

$$\cos 36^{o} = \frac{h}{R} \qquad h = R\cos 36^{o} = 10\cos 36^{o} \approx 8'1\ \text{cm}$$

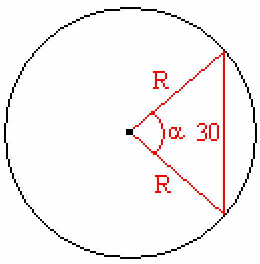
Conocida la base y la altura se calcula el área del triángulo, y multiplicando por cinco está, el área del pentágono.

$$A_{Tr} = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 11'8 \cdot 8'1 \approx 47'6\ \text{cm}^2$$

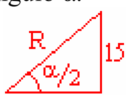
$$A_{Pent} = 5A_{Tr} = 5 \cdot 47'6 = 237'8\ \text{cm}^2$$

8. En una circunferencia de 50 cm de diámetro se traza una cuerda se 30 cm de longitud, cuanto mide el ángulo central.

Solución.



Los extremos de la cuerda y el centro de la circunferencia forman un triángulo isósceles del que conoceríamos las longitudes de todos sus lados, si se divide por la mitad del lado desigual se obtiene un triángulo rectángulo del que también conoceríamos las longitudes de sus lados. Aplicando la definición de seno de α/2 se puede calcular el ángulo α.



$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{R} = \frac{15}{50}$$

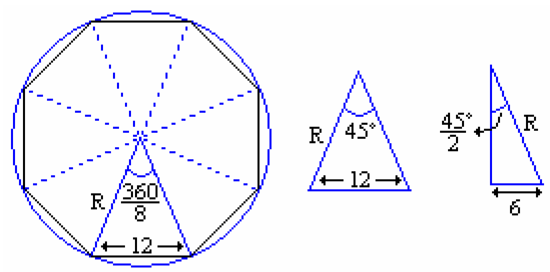
$$\frac{\alpha}{2} = \text{arcsen}\frac{15}{50} \qquad \alpha = 2 \cdot \text{arcsen}\frac{15}{50} = 34'9^{o}$$

9. La longitud del lado de un octógono regular es 12 cm, Hallar el radio de la circunferencia inscrita y circunscrita.

Solución.

Circunferencia circunscrita (por fuera).

Se divide la circunferencia en ocho triángulos isósceles de los que conoceríamos la longitud del lado desigual y del ángulo opuesto. A su vez, cada triángulo isósceles se divide en dos para obtener triángulos rectángulos, y del triángulo rectángulo obtenido se calcula la longintud del radio mediante la definición de 45/2.

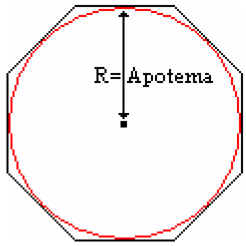


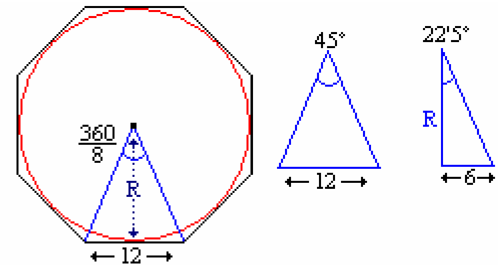
$$\text{sen}\frac{45}{2} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{6}{R}$$

$$R = \frac{6}{\text{sen } 22'5} = 15'7\ \text{cm}$$

Circunferencia inscrita (por dentro)

En este caso el radio de la circunferencia es la apotema del octógono.





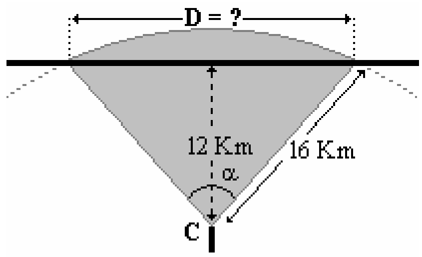
Se calcula de forma análoga al anterior, es decir, se divide el octógono en triángulos isósceles y de un triángulo isósceles se obtiene un triángulo rectangular dividiendo por la mitad. En el triángulo rectángulo, la definición de tangente de 22’5º permite calcular el radio de la circunferencia

$$\text{tag}\,\frac{45}{2}=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}=\frac{6}{R}\qquad R=\frac{6}{\text{tag}\,22'5}=14'5\text{ cm}$$

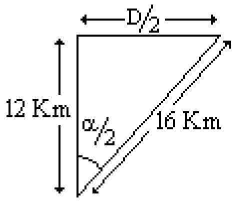
10. La distancia de un cañón a una carretera es de 12 Km. El alcance del cañón es de 16 Km. Suponiendo que la carretera es recta, ¿qué longitud de la carretera está dominada por el cañón? que ángulo sobre la carretera domina.

Solución.

Si sobre el cañón C se traza una circunferencia de radio 12 Km, está corta a la carretera como muestra la figura.



Se pide calcular la distancia D y el ángulo α.



Para ello se puede dividir el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, por el punto medio del lado desigual, quedando el triángulo que muestra la figura. La distancia D se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El ángulo α se calcula con la definición de cualquier razón trigonométrica del ángulo α/2

$$h^2=c^2+c^2\qquad 16^2=12^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

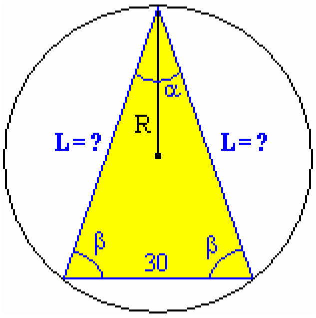
$$\left(\frac{D}{2}\right)^2=16^2-12^2\qquad D=2\sqrt{16^2-12^2}=21'17\text{ Km}$$

Por usar los datos del enunciado, el ángulo α lo calculo por la definición de coseno de α/2.

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{16}\qquad \alpha=2\cdot\text{arccos}\frac{12}{16}=82'8^{\circ}$$

11. Un triángulo isósceles esta inscrito en una circunferencia de 50 cm de diámetro, sí el lado desigual es de 30 cm de longitud, calcular la longitud de los otros dos lados, los ángulos y el área.

Solución.

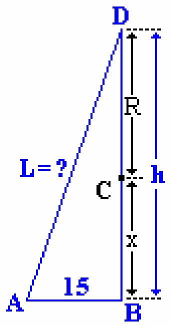


Se pide calcular la longitud de los lados iguales (L), los ángulos α y β, y el área del triángulo. Se empieza por calcular la longitud de los lados iguales, para ello se divide por la base el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, obteniendo el triángulo ABD.

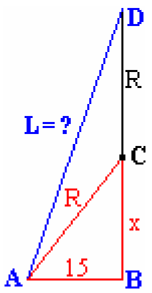
Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo

$$L^2 = 15^2 + h^2$$

Donde h = R + x



La longitud x se puede calcular en el triángulo ABC aplicando el teorema de Pitágoras:



$$R^2 = 15^2 + x^2 \qquad x = \sqrt{R^2 - 15^2}$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{50}{2} = 25\ \text{cm}$$

$$x = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$$

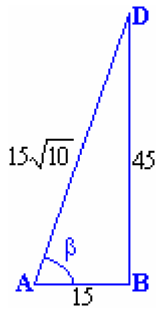
Conocido x se calcula h

$$h = 25 + 20 = 45$$

Conocido h se calcula L con la primera ecuación.

$$L^2 = 15^2 + 45^2 = 2250 \qquad L = \sqrt{2250} = 15\sqrt{10}$$

Ángulo β. Se calcula con la definición de cualquier razón trigonométrica del ángulo β.

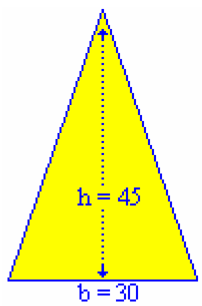


$$\cos\beta = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{15\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\beta = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10} = 71'6^{\circ}$$

Conocido β y teniendo en cuenta que la suma de ángulos es igual a 180º, se calcula α.

$$\alpha + 2\beta = 180^{\circ} \qquad \alpha = 180 - 2\beta = 180 - 2\cdot 71'6 = 36'8^{\circ}$$



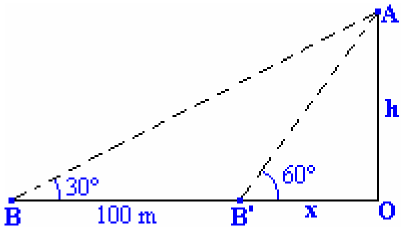
El área del triángulo se calcula por su definición

$$A = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} 30 \cdot 45 = 675\ \text{cm}^2$$

12. Desde un barco se divisa el alto de una montaña bajo una visual que forma con la horizontal un ángulo de 60º. Si el barco se aleja 100 m. la nueva visual forma un ángulo de 30º con la horizontal. Calcular la altura de la montaña.

Solución.

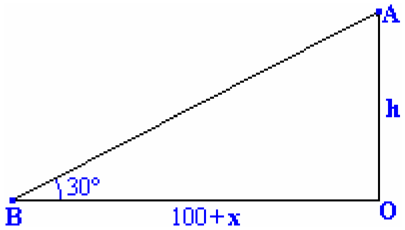
Problema de la doble observación ó doble tangente.



Se resuelve descomponiendo en dos triángulos rectángulos BOA y B'OA, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

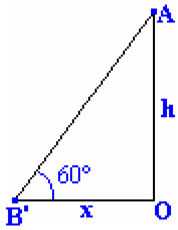
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOB:



$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{h}{100+x}$$

Triángulo AOB'



$$\text{tg}\,60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{Sistema:}\begin{cases}\text{tg}\,30^\circ = \dfrac{h}{100+x}\\ \text{tg}\,60^\circ = \dfrac{h}{x}\end{cases} : h = x\,\text{tg}\,60^\circ : \ \ \text{tg}\,30^\circ = \frac{x\,\text{tg}\,60^\circ}{100+x}$$

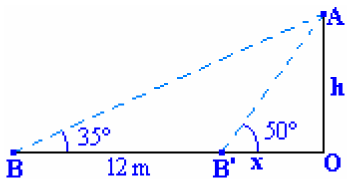
$$\text{tg}\,30^\circ(100+x) = x\,\text{tg}\,60^\circ \ \ : \ \ 100\,\text{tg}\,30^\circ + x\,\text{tg}\,30^\circ = x\,\text{tg}\,60^\circ \ \ : \ \ 100\,\text{tg}\,30^\circ = x\,\text{tg}\,60^\circ - x\,\text{tg}\,30^\circ$$

$$100\,\text{tg}\,30^\circ = x\,(\text{tg}\,60^\circ - \text{tg}\,30^\circ) \ \ : \ \ x = \frac{100\,\text{tg}\,30^\circ}{\text{tg}\,60^\circ - \text{tg}\,30^\circ} = 50\text{ m}$$

$$h = x\,\text{tg}\,60^\circ = 50\,\text{tg}\,60^\circ = 50\sqrt{3} \approx 86'6\text{ m}$$

13. Al observar desde el suelo el punto más alto de un árbol, el ángulo de la visual y la horizontal mide 50º. Desde 12 m más atrás el ángulo es de 35º. Calcula la altura del árbol gráficamente y por técnicas trigonométricas.

Solución.



Problema de doble observación ó doble tangente.

$$\begin{cases}\text{BOA} : \text{tg}\,35^\circ = \dfrac{h}{12+x}\\ \text{B'OA} : \text{tg}\,50^\circ = \dfrac{h}{x}\end{cases} : h = x\,\text{tg}\,50^\circ : \ \ \text{tg}\,35^\circ = \frac{x\,\text{tg}\,50^\circ}{12+x}$$

$$\text{tg}\,35^\circ(12+x) = x\,\text{tg}\,50^\circ \ \ : \ \ 12\,\text{tg}\,35^\circ + x\,\text{tg}\,35^\circ = x\,\text{tg}\,50^\circ \ \ : \ \ 12\,\text{tg}\,35^\circ = x\,\text{tg}\,50^\circ - x\,\text{tg}\,35^\circ$$

$$12\,\text{tg}\,35^\circ = x\,(\text{tg}\,50^\circ - \text{tg}\,35^\circ) \ \ : \ \ x = \frac{12\,\text{tg}\,35^\circ}{\text{tg}\,50^\circ - \text{tg}\,35^\circ} = 17'1\text{ m}$$

$$h = x\,\text{tg}\,50^\circ = 17'1\,\text{tg}\,50^\circ \approx 20'4\text{ m}$$

14. Calcular la altura de un poste sabiendo que desde un cierto punto se ve bajo un ángulo de 7º. Si nos acercamos 20 m, lo veremos bajo un ángulo de 10º. Datos: tg 7º = 0,1228; tg 10º = 0,1763.

Solución.

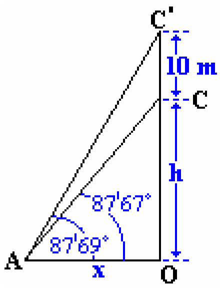
Problema de doble observación ó doble tangente. Igual que los dos anteriores, sus soluciones son:

x = 10'2 m **h = 3'7 m**

15. Se quiere calcular la altura de una colina situada al borde del mar, si colocamos un poste de 10 m sobre su punto más alto, desde un punto de la orilla del mar, se observan los vértices inferior y superior del poste bajo ángulos de 87'67º y 87'69º respectivamente. Calcular la altura de la colina sobre el nivel del mar.

Solución.

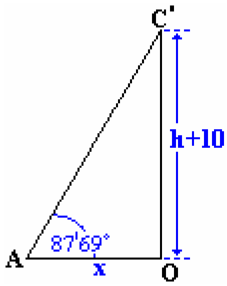
Problema de la doble observación ó doble tangente.



El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y AOC', y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

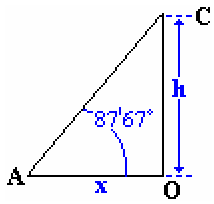
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

Triángulo AOC':



$$\operatorname{tg} 86'69^{\circ} = \frac{h+10}{x}$$

Triángulo AOC:



$$\operatorname{tg} 86'67^{\circ} = \frac{h}{x}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} 86'69^{\circ} = \dfrac{h+10}{x} \\ \operatorname{tg} 86'67^{\circ} = \dfrac{h}{x} \end{array}\right. : h = x \operatorname{tg} 86'67^{\circ} : \quad \operatorname{tg} 86'69^{\circ} = \frac{x \operatorname{tg} 86'67 + 10}{x}$$

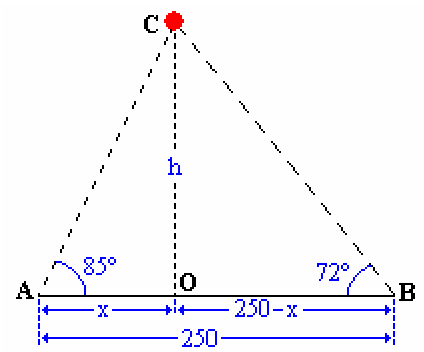
$$x \operatorname{tg} 86'69^{\circ} = x \operatorname{tg} 86'67 + 10 \quad : \quad x \operatorname{tg} 86'69^{\circ} - x \operatorname{tg} 86'67 = 10 \quad : \quad x\left(\operatorname{tg} 86'69^{\circ} - \operatorname{tg} 86'67\right) = 10$$

$$x = \frac{10}{\operatorname{tg} 86'69^{\circ} - \operatorname{tg} 86'67} = 96'1 \text{ m}$$

16. Dos observadores separados 250 m ven un globo estático situado entre ellos bajo ángulos de 72º y 85º. A que altura se encuentra el globo. A que distancia del globo se encuentra cada observador.

Solución.

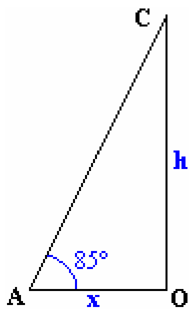
Problema de la doble observación ó doble tangente.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}}$$

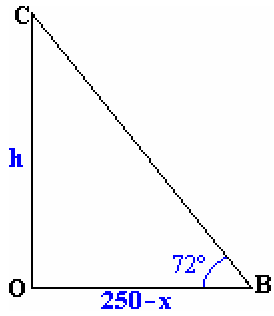
El problema se resuelve descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos AOC y BOC, y definiendo en cada uno de ellos la tangente del ángulo conocido en función de h y de x. Las dos ecuaciones permiten plantear un sistema del que se calcula h.

Triángulo AOC:



$$\operatorname{tg} 85^{o} = \frac{h}{x}$$

Triángulo BOC:



$$\operatorname{tg} 72^{o} = \frac{h}{250 - x}$$

$$\text{Sistema:} \begin{cases} \operatorname{tg} 85^{o} = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 72^{o} = \dfrac{h}{250 - x} \end{cases} : h = x \operatorname{tg} 85^{o} : \ \operatorname{tg} 72^{o} = \frac{x \operatorname{tg} 85^{o}}{250 - x}$$

$$\operatorname{tg} 72^{o} (250 - x) = x \operatorname{tg} 85^{o} \ : \ 250 \operatorname{tg} 72^{o} - x \operatorname{tg} 72^{o} = x \operatorname{tg} 85^{o} \ : \ 250 \operatorname{tg} 72^{o} = x \operatorname{tg} 85^{o} + x \operatorname{tg} 72^{o}$$

$$x (\operatorname{tg} 85^{o} + \operatorname{tg} 72^{o}) = 250 \operatorname{tg} 72^{o} \ : \ x = \frac{250 \operatorname{tg} 72^{o}}{\operatorname{tg} 85^{o} + \operatorname{tg} 72^{o}} \approx 53 \text{ m}$$

$$h = 53 \operatorname{tg} 85^{o} \approx 606'2 \text{ m}$$

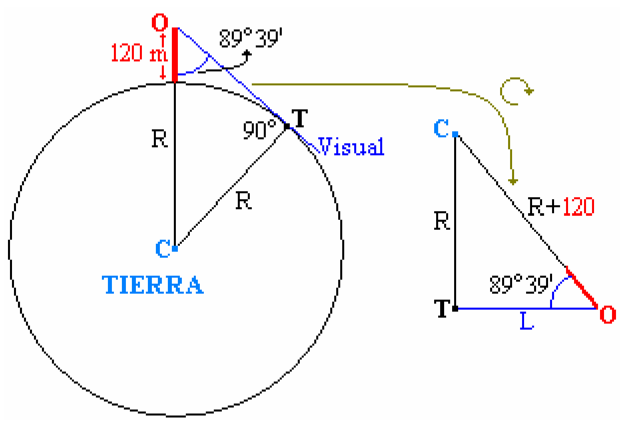
Las distancias de cada observador al globo se calculan con la definición de seno en cada uno de los triángulos.

- **Triángulo AOC:** $\operatorname{sen} 85^{o} = \dfrac{h}{\overline{AC}} : \overline{AC} = \dfrac{h}{\operatorname{sen} 85^{o}} = \dfrac{602'2}{\operatorname{sen} 85^{o}} \approx 604'3 \text{ m}$
- **Triángulo BOC:** $\operatorname{sen} 72^{o} = \dfrac{h}{\overline{BC}} : \overline{BC} = \dfrac{h}{\operatorname{sen} 72^{o}} = \dfrac{602'2}{\operatorname{sen} 72^{o}} \approx 633 \text{ m}$

17. Un observador colocado a una altura de 120 m sobre el nivel del mar, dirige la vista hacia el horizonte y ésta visual forma con la vertical un ángulo de 89º39'. Calcular el radio de la tierra supuesta esférica. A que distancia se encuentra el horizonte.

Solución.

La visual sobre el horizonte es tangente a la línea de tierra. Si se supone que la Tierra es esférica, y teniendo en cuenta que la tangente a una circunferencia en el punto de tangencia es perpendicular al radio, la visual en el horizonte en perpendicular al radio de la Tierra, por lo tanto el triángulo formado por el punto de observación (O), el punto de tangencia en el horizonte (T) y el centro de la tierra (C) es rectángulo en T.



Para poder observarlo con mayor claridad el triángulo, se saca del dibujo y se gira.

La definición de seno de 89º 39' permite plantear una ecuación con una incógnita (R).

$$\operatorname{sen} 89^{o}39' = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{R}{R + 120}$$

$$\operatorname{sen} 89^{o}39' (R + 120) = R \ : \ R \operatorname{sen} 89^{o}39' + 120 \operatorname{sen} 89^{o}39' = R \ : \ R - R \operatorname{sen} 89^{o}39' = 120 \operatorname{sen} 89^{o}39'$$

$$R(1 - \operatorname{sen} 89^{o} 39') = 120 \operatorname{sen} 89^{o} 39' \ : \ R = \frac{120 \operatorname{sen} 89^{o} 39'}{1 - \operatorname{sen} 89^{o} 39'} = 6\,431\,520 \text{ m} = 6431'5 \text{ Km}$$

La distancia al horizonte (L) se calcula con la definición de tangente de 89º39' conocido el radio de la Tierra.

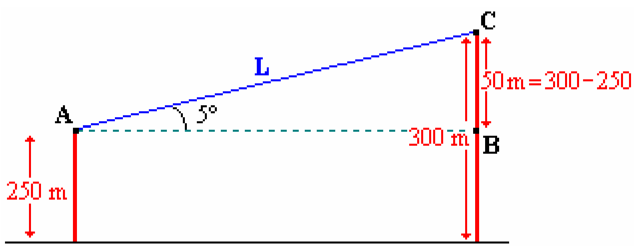
$$\operatorname{tg} 89^\circ\, 39' = \frac{R}{L} \quad : \quad L = \frac{R}{\operatorname{tg} 89^\circ\, 39'} = \frac{6\,431\,520}{\operatorname{tg} 89^\circ\, 39'} = 39\,288 \text{ m} \approx 39'3 \text{ Km}$$

Nota: Para poder ver con mayor claridad el triángulo rectángulo en el dibujo, la altura de observación (120 m) y el radio terrestre (6400 Km) no están a escala.

18. Dos torretas de vigilancia forestal se encuentran situadas respectivamente a 250 y 300 m de altura. Si la visual que une los puntos de observación de ambas torretas forma un ángulo de 5º con la horizontal, cual debe ser el alcance mínimo de las radios que usan los vigilantes para que puedan estar en contacto.

Solución.

Un esquema gráfico del enunciado permite formar un triángulo rectángulo ABC del que se conoce un ángulo y su cateto opuesto (la diferencia de altura de las torretas permita calcular la longitud del lado AC).

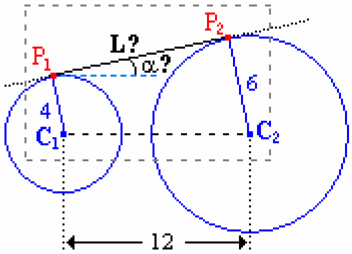


De la definición de seno de 5 se calcula L (mínimo alcance de las radios).

$$\operatorname{sen} 5 = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{50}{L} \quad : \quad L = \frac{50}{\operatorname{sen} 5^\circ} \approx 574 \text{ m}$$

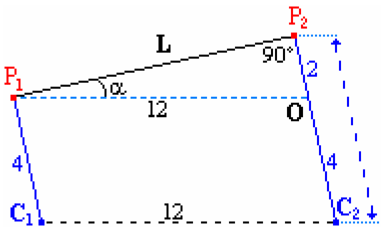
19. Calcular el ángulo que forma la tangente exterior a dos circunferencias, de radios 6 y 4 cm, con la recta que une los centros de ambas, si estos distan 12 cm. Calcular la longitud de dicha tangente.

Solución.

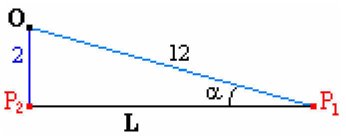


Designamos por P_1 y P_2 a los puntos de tangencia, por L a la longitud de la tangente exterior común (distancia de P_1 a P_2) y por α al ángulo que forma la tangente con la recta que une los centros.

Para entender mejor el problema ampliamos la zona recuadrada, trazando por el punto P_1 una paralela a la recta que une los centros.



Teniendo en cuenta que el radio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia, el triángulo formado por los puntos OP_2P_1 es rectángulo en P_2. La longitud de la hipotenusa del triángulo (OP_1) es la distancia entre los centros ($OP_1C_1C_2$ forman un paralelogramo), la longitud del cateto OP_2 es la diferencia entre los radios de las circunferencias.



Para ver mejor el triángulo y resolverlo fácilmente es conveniente girarlo por el punto O. Si observamos la figura resultante vemos un triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa (12) y el cateto opuesto del ángulo buscado (2), mediante la definición de seno se podrá calcular el ángulo α.

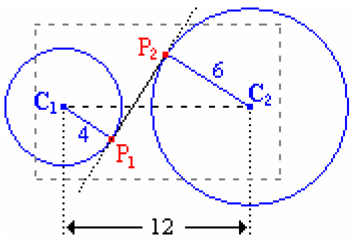
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{2}{12} \quad : \quad \alpha = \operatorname{arcsen} \frac{2}{12} \approx 9'6^\circ$$

La longitud de la tangente se puede obtener mediante la definición de coseno de α.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos 9'6^\circ = \frac{L}{12} \quad : \quad L = 12 \cos 9'6^\circ \approx 11'8 \text{ cm}$$

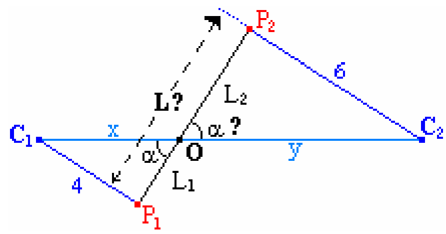
20. Calcular el ángulo que forma la tangente interior a dos circunferencias, de radios 6 y 4 cm, con la recta que une los centros de ambas, si estos distan 12 cm. Calcular la longitud de dicha tangente.



Solución.

Designamos por P_1 y P_2 a los puntos de tangencia, por L a la longitud de la tangente interior común (distancia de P_1 a P_2) y por α al ángulo que forma la tangente con la recta que une los centros.

Para entender mejor el problema ampliamos la zona recuadrada.



Teniendo en cuenta que el radio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia, los triángulos formados por los puntos C_1P_1O y C_2P_2O son rectángulos en P_1 y P_2 respectivamente, además los ángulos denominados α de ambos triángulo son iguales (dos rectas al cortarse determinan cuatro ángulos iguales dos a dos), por lo tanto los triángulos son semejantes.

Si aplicamos la definición de seno al ángulo α de cada triángulo e igualamos se obtiene una ecuación con dos incógnitas (x, y). Por otro lado la suma de x e y es la distancia entre los centros por lo que obtenemos una segunda ecuación que nos permite plantear un sistema, resolviendo el sistema se obtienen x e y.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Triángulo } C_1P_1O : \text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{x}\\ \text{Triángulo } C_2P_2O : \text{sen}\,\alpha = \dfrac{6}{y}\end{array}\right\} : \dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{y}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad x + y = 12\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l}\dfrac{4}{x} = \dfrac{6}{y}\\ x + y = 12\end{array}\right. : \left\{\begin{array}{l}x \approx 4'8\\ y \approx 7'2\end{array}\right.$$

Conocidas las longitudes x e y, se calculan los datos pedidos en el enunciado.

Sen α. $\text{Triángulo } C_1P_1O : \text{sen}\,\alpha = \dfrac{4}{4'8} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\dfrac{4}{4'8} \approx 56'4^{\circ}$

Longitud de la tangente: $P_1P_2 = L_1 + L_2$

Las longitudes L_1 y L_2 se obtienen mediante la definición de coseno de α en cada triángulo

$$\cos\alpha = \frac{L_1}{x} \quad : \quad L_1 = 4'8\cos 56'4 \approx 2'7\text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{L_2}{y} \quad : \quad L_2 = 7'2\cos 56'4 \approx 4\text{ cm}$$

$$L = 2'7 + 4 = 6'7\text{ cm}$$