1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

a) $\begin{cases} \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x \cdot \cos y \\ x + y = 30 \end{cases}$

Solución.

Se ordena la 1ª ecuación para obtener el seno de la diferencia

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 0 \\ x + y = 30 \end{cases} : \begin{cases} \operatorname{sen}(x - y) = 0 \\ x + y = 30 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = 0 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 180 \end{cases}$$

Se forman sistemas de ecuaciones:

i. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 30 \end{cases} : \{x = y = 15 : (15, 15)$

ii. $\begin{cases} x - y = 180 \\ x + y = 30 \end{cases} : \begin{cases} x = 105 \\ y = -75 \end{cases} : (105, -75)$

Comprobación:

i. $(15, 15) : \begin{cases} \cos 15 \cdot \operatorname{sen} 15 = \operatorname{sen} 15 \cdot \cos 15 \\ 15 + 15 = 30 \end{cases}$ Solución válida

ii. $(105, -15) : \begin{cases} \cos 105 \cdot \operatorname{sen}(-75) = \operatorname{sen} 105 \cdot \cos(-75) \\ 105 + (-15) = 30 \end{cases}$ Solución válida

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Solución.

El sistema se resuelve sumando y restando las ecuaciones.

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \frac{1}{2} : \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{6} \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Restando las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 0$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = 0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = \pi \end{cases}$$

Tomando sistemas de dos ecuaciones se buscan todas las soluciones posibles:

i. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{6} \\ x-y=0 \end{cases} : \left\{ x=y=\dfrac{\pi}{12} \right. : \left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right)$

ii. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{6} \\ x-y=\pi \end{cases} : \begin{cases} x=\dfrac{7\pi}{12} \\ y=-\dfrac{5\pi}{12} \end{cases} : \left(\dfrac{7\pi}{12}, -\dfrac{5\pi}{12}\right)$

iii. $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{6} \\ x-y=0 \end{cases} : \left\{ x=y=\dfrac{5\pi}{12} \right. : \left(\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right)$

iv. $\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{6} \\ x-y=\pi \end{cases} : \begin{cases} x=\dfrac{11\pi}{12} \\ y=-\dfrac{\pi}{12} \end{cases} : \left(\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}\right)$

Comprobación:

i. $\left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right) : \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \\ \cos\dfrac{\pi}{12}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ Solución válida.

ii. $\left(\dfrac{7\pi}{12}, -\dfrac{5\pi}{12}\right) : \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{-5\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \\ \cos\dfrac{7\pi}{12}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{-5\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ Solución válida.

iii. $\left(\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right) : \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \\ \cos\dfrac{5\pi}{12}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ Solución válida

iv. $\left(\dfrac{11\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{12}\right) : \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{-\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \\ \cos\dfrac{11\pi}{12}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{-\pi}{12}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ Solución válida

c) $\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=2 \end{cases}$

Solución.

El sistema se resuelve por sustitución, de la primera ecuación se despeja y para sustituir en la segunda.

$$\begin{cases} y=\dfrac{2\pi}{3}-x \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=2 \end{cases} : \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)}=2\ ;\quad \operatorname{sen} x=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

Al segundo miembro de la ecuación se aplica el desarrollo del seno de la diferencia.

$$\operatorname{sen} x=2\cdot\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cdot\cos x-\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{sen} x\right]$$

Teniendo en cuenta las relaciones existentes entre ángulos asociados:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = 2\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\operatorname{sen} x\right]$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\cdot\cos x+\operatorname{sen} x$$

Simplificando:

$$\sqrt{3}\cdot\cos x = 0;\ \cos x = 0:\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}: y=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)\\ x=\dfrac{3\pi}{2}: y=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{3\pi}{2}=-\dfrac{5\pi}{6}\Rightarrow\left(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{5\pi}{6}\right)\end{cases}$$

Comprobación:

$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right):\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{1/2}=2\end{cases}\qquad \text{Solución válida.}$$

$$\left(\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{6}\right):\begin{cases}\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{-5\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}}=\dfrac{-1}{-1/2}=2\end{cases}\qquad \text{Solución válida}$$

d) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ \operatorname{ctg}(x+y)=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Solución.

Se trabaja con la segunda ecuación para transformarla.

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ \operatorname{ctg}(x+y)=\dfrac{3}{4}\end{cases}:\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x+y)}=\dfrac{3}{4}\end{cases}:\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ \dfrac{1}{\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}}=\dfrac{3}{4}\end{cases}:\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ \dfrac{1}{\frac{1}{1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}}=\dfrac{3}{4}\end{cases}:\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ 1-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Sistema no lineal que se resuelve por sustitución.

$$\begin{cases}\operatorname{tg} y=1-\operatorname{tg} x\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=\dfrac{1}{4}\end{cases};\ \operatorname{tg} x\cdot(1-\operatorname{tg} x)=\frac{1}{4};\ \ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{4};\ \operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}=0$$

Ecuación de segundo grado con solución única:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \;;\; \operatorname{tg} y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \;;\; x = y = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 26^{\circ}33'54''$$

Solución única y válida

e) $\begin{cases} x + y = 120 \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Solución.

El sistema se resuelve por sustitución, se despeja de la primera, se sustituye en la segunda y se aplica el desarrollo del seno de la diferencia.

$$\begin{cases} y = 120 - x \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \end{cases} ;\; \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(120 - x) = \frac{1}{2} ;\quad \operatorname{sen} x - [\operatorname{sen} 120 \cdot \cos x - \cos 120 \cdot \operatorname{sen} x] = \frac{1}{2}$$

Por ángulos asociados: $\begin{cases} \operatorname{sen} 120 = \operatorname{sen}(180 - 60) = \operatorname{sen} 60 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\operatorname{sen} x - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} x\right] = \frac{1}{2} \;;\; \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 1$$

Para resolver la ecuación que queda, se despeja el seno y se eleva al cuadrado para poder utilizar la expresión $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y transformar la ecuación en una ecuación de 2º grado en función de cosenos.

$$\operatorname{sen} x = 1 + \sqrt{3} \cdot \cos x \quad \text{Elevando al cuadrado: } (\operatorname{sen} x)^2 = \left(1 + \sqrt{3} \cdot \cos x\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1^2 + 2\sqrt{3}\cos x + \left(\sqrt{3}\cos x\right)^2 \;;\; 1 - \cos^2 x = 1 + 2\sqrt{3}\cos x + 3\cos^2 x$$

$$4\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x = 0 \;;\; \cos x \cdot \left(4\cos x + 2\sqrt{3}\right) = 0 : \begin{cases} \cos x = 0 \\ 4\cos x + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

i. $\cos x = 0 : \begin{cases} x = 90 ;\; y = 120 - 90 = 30 \Rightarrow (90, 30) \\ x = 270 ;\; y = 120 - 270 = -150 \Rightarrow (270, -150) \end{cases}$

ii. $4\cos x + 2\sqrt{3} = 0 ;\; \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} : \begin{cases} x = 150 ;\; y = 120 - 150 = -30 \Rightarrow (150, -30) \\ x = 210 ;\; y = 120 - 210 = -90 \Rightarrow (210, -90) \end{cases}$

Comprobación:

$(90, 30) : \begin{cases} 90 + 30 = 120 \\ \operatorname{sen} 90 - \operatorname{sen} 30 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Solución válida.

$(270, -150) : \begin{cases} 270 + (-150) = 120 \\ \operatorname{sen} 270 - \operatorname{sen}(-150) = -1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Solución no válida

$(150, -30) : \begin{cases} 150 + (-30) = 120 \\ \operatorname{sen} 150 - \operatorname{sen}(-30) = \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Solución no válida

$$(210,-90):\begin{cases} 210+(-90)=120 \\ \text{sen } 210-\text{sen }(-90)=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Solución válida}$$

f) $\begin{cases} \cos(x+y)=\frac{1}{2} \\ \cos(x-y)=\frac{1}{2} \end{cases}$

Solución.

$$\cos(x+y)=\frac{1}{2}:\begin{cases} x+y=60 \\ x+y=300 \end{cases}$$

$$\cos(x-y)=\frac{1}{2}:\begin{cases} x-y=60 \\ x-y=300 \end{cases}$$

Tomando sistemas de dos ecuaciones se buscan todas las soluciones posibles:

i. $\begin{cases} x+y=60 \\ x-y=60 \end{cases};\ \begin{cases} x=60 \\ y=0 \end{cases};\ (60,0)$

ii. $\begin{cases} x+y=60 \\ x-y=300 \end{cases};\ \begin{cases} x=180 \\ y=-120 \end{cases};\ (180,-120)$

iii. $\begin{cases} x+y=300 \\ x-y=60 \end{cases};\ \begin{cases} x=180 \\ y=120 \end{cases};\ (180,120)$

iv. $\begin{cases} x+y=300 \\ x-y=300 \end{cases};\ \begin{cases} x=300 \\ y=0 \end{cases};\ (300,0)$

Comprobación:

i. $(60,0):\begin{cases} \cos(60+0)=\cos 60=\frac{1}{2} \\ \cos(60-0)=\cos 60=\frac{1}{2} \end{cases}$ Solución válida

ii. $(180,-120):\begin{cases} \cos(180+(-120))=\cos 60=\frac{1}{2} \\ \cos(180-(-120))=\cos 300=\frac{1}{2} \end{cases}$ Solución válida

iii. $(180,120):\begin{cases} \cos(180+120)=\cos 300=\frac{1}{2} \\ \cos(180-120)=\cos 60=\frac{1}{2} \end{cases}$ Solución válida

iv. $(3000,0):\begin{cases} \cos(300+0)=\cos 300=\frac{1}{2} \\ \cos(300-0)=\cos 300=\frac{1}{2} \end{cases}$ Solución válida

g) $\begin{cases} x + y = 90 \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Solución.

Se despeja una de las variables de la 1ª ecuación y se sustituye la 2ª.

$$\begin{cases} y = 90 - x \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \;;\; \text{sen } x + \text{sen}\,(90 - x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Por ángulos complementarios: $\text{sen}\,(90 - x) = \cos x$

$$\text{sen } x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad, se consigue expresar la ecuación en función de una solo función trigonométrica.

$$(\text{sen } x + \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\,\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{6}{4} \;;\; 1 + \text{sen } 2x = \frac{3}{2} \;;\; \text{sen } 2x = \frac{3}{2} - 1$$

$$\text{sen } 2x = \frac{1}{2} : \begin{cases} 2x = 30 ;\; x = 15 ;\; y = 90 - 15 = 75 \Rightarrow (15, 75) \\ 2x = 150 ;\; x = 75 ;\; y = 90 - 75 = 15 \Rightarrow (75, 15) \end{cases}$$

Comprobación:

$$(15, 75) : \begin{cases} 15 + 75 = 90 \\ \text{sen}\,15 + \text{sen}\,75 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \dfrac{2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$(75, 15) : \begin{cases} 15 + 75 = 90 \\ \text{sen}\,75 + \text{sen}\,15 = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \dfrac{2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$