

EJERCICIOS DE VARIACIONES

1. Cuántos resultados distintos pueden producirse al lanzar una moneda cuatro veces al aire.

Solución.

Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. $m = 2$, $n = 4$.

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16$$

2. Cuántos números de cuatro cifras distintos pueden formarse con los elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Solución.

Influye orden y elementos, y estos no se pueden repetir. $m = 7$, $n = 4$.

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

3. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir tres juguetes diferentes entre cuatro niños, de manera que ningún niño tenga más de un juguete?

Solución.

Influye orden y elementos, y estos no se pueden repetir. $m = 4$ (niños), $n = 3$ (juguetes).

$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

4. ¿De cuántas formas diferentes se pueden distribuir cinco bolas distintas en tres cajas diferentes?

Solución.

Influye orden y elementos, y estos no se pueden repetir. $m = 5$ (bolas), $n = 3$ (cajas).

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

5. En un examen se proponen diez preguntas; cada pregunta tiene tres respuestas posibles (a,b,c). Si se contestan al azar, ¿cuántos exámenes distintos pueden producirse?

Solución.

Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. $m = 3$ (a, b, c), $n = 10$ (10 respuestas).

$$VR_{3,10} = 3^{10} = 59049$$

6. Se extraen sucesivamente dos bolas de una bolsa que contiene seis de diferentes colores. ¿Cuántos resultados distintos pueden producirse? a) Con devolución. b) Sin devolución.

Solución.

Influye orden y elementos. $m = 6$ (colores), $n = 2$ (extracciones).

a) Admite repetición: $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

b) No admite repetición. $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$

7. El viaje de la ciudad A a la ciudad B se puede realizar por cinco carreteras distintas. ¿De cuántas formas puede realizarse el viaje de ida y vuelta?

Solución.

Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. $m = 5$ (carreteras), $n = 2$ (viajes, ida y vuelta).

$$VR_{5,2} = 5^2 = 25$$

8. De A a B puede irse en coche, avión, moto, tren o barco. ¿De cuántas formas posibles se puede hacer el viaje de ida y vuelta?

Solución.

Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. $m = 5$ (tipo de transporte), $n = 2$ (viajes, ida y vuelta).

$$VR_{5,2} = 5^2 = 25$$

9. Resuelve: $V_{m,2} + V_{m-2,2} + V_{m-4,2} = 98$.

Solución.

$$m \cdot (m-1) + (m-2) \cdot (m-3) + (m-4) \cdot (m-5) = 98$$

Se opera y se ordena, obteniendo una ecuación de 2º grado.

$$3m^2 - 15m - 72 = 0$$

Resolviendo se obtiene $\begin{cases} m = -3 \\ m = 8 \end{cases}$. Se admite solo la positiva

10. Una matrícula de coche de un país europeo esta formada por 3 letras elegidas entre 27 y 4 números escogidos entre los números comprendidos entre 0 y 9. ¿Cuántos coches se pueden matricular en cada país con este sistema?

Solución.

Formas de escoger tres letras:

Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. $m = 27$, $n = 3$.

$$VR_{27,3} = 27^3 = 19683$$

Formas de escoger cuatro números.

$$VR_{10,4} = 10^4 = 10000$$

Cada combinación de letras se puede formar una matrícula con cada combinación numérica, y viceversa, por tanto:

$$n^\circ \text{ matrículas} = VR_{27,3} \cdot VR_{10,4} = 27^3 \cdot 10^4 = 196830000$$

11. Tiras dos dados diferentes al aire. ¿Cuántos resultados distintos pueden producirse?

Solución.

Influye orden y elementos, y estos se pueden repetir. $m = 6$ (caras), $n = 2$ (dados).

$$VR_{6,2} = 6^2 = 36$$

EJERCICIOS DE PERMUTACIONES

1. Resolver: $P_m^{2,3} + P_{m-1} = PC_{m-1}$

Solución.

$$\frac{m!}{2! \cdot 3!} + (m-1)! = ((m-1)-1)!$$

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot 3 \cdot 2} + (m-1) \cdot (m-2)! = (m-2)!$$

Se simplifica $(m-2)!$, se opera y se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$\frac{m \cdot (m-1)}{12} + (m-1) = 1 \quad : \quad \frac{m^2 - m}{12} + m - 2 = 0 \quad : \quad m^2 + 11m - 24 = 0$$

2. De Cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas alrededor de una mesa.

Solución.

$$PC_4 = (4-1)! = 3! = 3 \cdot 2 = 6$$

3. De Cuántas formas pueden alinearse dos chicas y tres chicos.

Solución.

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

4. De Cuántas formas pueden actuar en T.V. cuatro cantantes y tres humoristas.

Solución.

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

5. De Cuántas formas distintas puede obtenerse la suma 8 al lanzar tres dados distintos y sumar los números aparecidos.

Solución.

Posibilidades de suma 8 con tres dados:

$$6 + 1 + 1: P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$5 + 2 + 1: P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$$

$$4 + 3 + 1: P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$$

$$4 + 2 + 2: P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$3 + 3 + 2: P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$\text{Total} = 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$$

6. De cuántas formas pueden ordenarse siete personas, entre las que figuran Juan y María de manera que Juan y María estén colocados uno al lado de otro.

Solución.

Se debe considerar que Juan y Maria forman una solo persona, y se multiplica por 2 ya que para cada ordenación existen dos posibles posiciones de Juan y Maria.

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1440$$

7. Se lanza una moneda ocho veces seguidas y se anotan sucesivamente los resultados obtenidos en cada uno de los lanzamientos. Los ocho lanzamientos constituyen una experiencia. ¿En cuántas experiencias se pueden obtener cinco caras y tres cruces?

Solución.

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

8. ¿Cuántas de las permutaciones formadas por los números {3, 4, 5, 6, 7, 8} empezarán por 3? ¿Cuántas por 64? ¿Cuántas terminarán por 875?

Solución.

- Que empiezan por 3: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

- Que empiezan por 64: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

- Que acaben en 875: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$

9. Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con los números {0, 1, 2, 3, 4}.

Solución.

Hay que descontar los números que empiezan por 0.

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 - 24 = 96$$

10. ¿De cuántas maneras pueden permutarse las letras de la palabra ESCAPARATE dejando fija la P y de modo que los lugares ocupados por vocales no puedan ser ocupados por consonantes y viceversa?

Solución.

- Consonantes: P_4

- Vocales: $P_5^{2,3}$

$$P_4 \cdot P_5^{2,3} = 4! \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 240$$

EJERCICIOS DE COMBINACIONES

1. ¿Cuántas comisiones de tres alumnos pueden formarse con los 35 alumnos de una clase?

Solución.

$$C_{35}^3 = \binom{35}{3} = \frac{35!}{3!(35-3)!} = \frac{35!}{3! \cdot 32!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32!}{3 \cdot 2 \cdot 32!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2} = 6545$$

Otra forma

$$C_{35}^3 = \frac{V_{35}^3}{P_3} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2} = 6545$$

2. ¿Cuántos equipos de 5 atletas se podrían formar para participar en una competición con los doce atletas mejor preparados?

Solución.

$$C_{12}^5 = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 792$$

Otra forma

$$C_{12}^5 = \frac{V_{12}^5}{P_5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 792$$

3. En una carrera en la que toman parte 8 caballos se juega una apuesta que consiste en acertar los dos primeros sin tener en cuenta el orden. ¿Cuántas apuestas diferentes pueden jugarse en esa carrera?

Solución.

$$C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{V_8^2}{P_2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

4. De los 48 trabajadores de una empresa se presentan 6 como candidatos a ocupar dos puestos de representante de los trabajadores. ¿Cuántas elecciones son posibles?

Solución.

$$C_{48}^6 = \binom{48}{6} = \frac{V_{48}^6}{P_6} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 12\,271\,512$$

5. En un salón hay 6 matrimonios. Se eligen al azar dos de esas personas:

- ¿Cuántas elecciones distintas son posibles?
- ¿En cuántas de las elecciones posibles habrá dos hombres?
- ¿En cuántas habrá una mujer y un hombre?
- ¿En cuántas de las posibles elecciones habrá un matrimonio?

Solución.

a. $C_{12}^2 = \binom{12}{2} = \frac{V_{12}^2}{P_2} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$

b. $C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{V_6^2}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$

c. $C_6^1 \cdot C_6^1 = \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1} = \frac{V_6^1}{P_1} \cdot \frac{V_6^1}{P_1} = 6 \cdot 6 = 36$

d. Existen seis matrimonios, por lo tanto 6.

6. En una línea férrea hay 18 estaciones. Si el tren para en todas las estaciones, ¿cuántos viajes distintos pueden realizarse entre ellas?

Solución.

Hay que escoger la estación de salida y la de llegada, no influyendo el orden porque se sobreentiende que es lo mismo el viaje de A a B que de B a A.

$$C_{18}^2 = \binom{18}{2} = \frac{V_{18}^2}{P_2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

7. Un alumno puede elegir 3 entre sus 15 compañeros de clase para realizar un viaje, ¿cuántas elecciones distintas pueden hacerse?

Solución.

$$C_{15}^3 = \binom{15}{3} = \frac{V_{15}^3}{P_3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455$$

8. Con 5 clase de vino, ¿cuántas mezclas se pueden formar de tres vinos?

Solución.

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{V_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$$

9. De cuántas formas posibles pueden elegirse dos botellas entre 18 existentes.

Solución.

$$C_{18}^2 = \binom{18}{2} = \frac{V_{18}^2}{P_2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

10. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 gr, ¿cuántas pesadas posibles pueden realizarse?

Solución.

$$\begin{aligned} C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 &= \frac{V_6^1}{P_1} + \frac{V_6^2}{P_2} + \frac{V_6^3}{P_3} + \frac{V_6^4}{P_4} + \frac{V_6^5}{P_5} + \frac{V_6^6}{P_6} = \\ &= \frac{6}{1} + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE COMBINATORIA

1. 10 amigos juegan 3 partidas de bolos y al final de cada una anotan el vencedor. ¿Cuántos resultados podrían producirse?

Solución.

Influye orden (1ª, 2ª y 3ª partida), influyen elementos, y se pueden repetir.

$$VR_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

2. En una reunión a la que asisten 8 personas, ¿cuántos saludos se intercambian?

Solución.

Influyen solo los elementos y no se pueden repetir.

$$C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{V_8^2}{P_2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

3. En una competición en la que participan 16 atletas, se dan tres medallas, oro, plata y bronce. ¿De cuántas formas pueden llevarse las medallas?

Solución.

Influyen orden y elementos y no se pueden repetir.

$$V_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$$

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 6 entradas numeradas para un concierto de rock 6 amigas?

Solución.

Solo influye el orden.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$$

5. En un torneo regional de ajedrez participan 18 jugadores y se clasifican tres de ellos para pasar a la final. ¿Cuántas posibles clasificaciones hay?

Solución.

Solo influyen los elementos, no influye orden porque no se clasifican como 1º, 2º y 3º.

$$C_{18}^3 = \binom{18}{3} = \frac{V_{18}^3}{P_3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2} = 816$$

6. Un representante tiene que visitar cuatro pueblos A, B, C, D que comunican todos entre sí. ¿Cuántos itinerarios distintos podría hacer?

Solución.

Solo influye el orden

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

7. Calcular cuantos productos diferentes de dos factores se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 5:

- a) Sin repetición de factores.
- b) Pudiendo repetirse los factores.

Solución.

Teniendo en cuenta que el producto de factores es conmutativo, solo influye el orden.

a.
$$C_3^2 = \frac{V_3^2}{P_2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

b.
$$CR_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{V_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

8. Te dan seis puntos sobre una circunferencia. ¿Cuántos segmentos podrías trazar al unirlos de dos en dos? ¿Cuántos triángulos podrías formar con esos 6 puntos?

Solución.

Solo influye el orden:

$$\text{- Número de segmentos: } C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{V_6^2}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$$

$$\text{- Número de triángulos: } C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{V_6^3}{P_3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

9. Cuántos mensajes podría mandar utilizando el punto y la raya del alfabeto Morse que tengan seis símbolos.

Solución.

Influyen orden y elementos y se pueden repetir.

$$VR_2^6 = 2^6 = 64$$

10. Las franjas de una diana están numeradas del 1 al 17. Un jugador anota las puntuaciones al tirar tres dardos, ¿cuántas anotaciones distintas podría escribir?

Solución.

Teniendo en cuenta que existe 1ª, 2ª y 3ª tirada, influye orden y elementos.

$$VR_{17}^3 = 17^3 = 4913$$

11. Con las letras de la palabra Carlos, ¿cuántas palabras podrían escribirse? ¿Cuántas de ellas tienen las vocales separadas?

Solución.

Solo influye el orden.

$$\text{Total de palabras: } P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$$

Palabras con las vocales separadas. Se calculan como diferencia entre las totales y las palabras que llevan las vocales juntas.

Vocales juntas: Se consideran ambas vocales como una sola letra, siendo entonces permutaciones de cinco, pero hay que multiplicar por dos porque para cada ordenación habrá dos posible posiciones de las vocales "ao" ó "oa". $2 \cdot P_5$

$$\text{Vocales separadas: } P_6 - 2 \cdot P_5 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{P_6} - 2 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{P_5} = 480$$

12. Resuelve $V_{x,2} = 20$

Solución.

$$V_{x,2} = V_x^2 = x \cdot (x-1) = 20$$

$$x^2 - x - 20 = 0 : \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \text{ No tiene sentido : } x > 0 \end{cases} \quad x = 5$$

13. Cuántas matrículas hay de la forma: $\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Letras}} - \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Números}}$

Solución.

Influye orden y elementos, y se pueden repetir. Considerando el alfabeto español, sin tener en cuenta las letras dobles, hay 27 letras.

$$VR_{27}^3 \cdot VR_{10}^4 = 27^3 \cdot 10^4 = 196,83 \times 10^6 \text{ Matrículas}$$

14. En el lenguaje de los ordenadores un "Byte" es una secuencia de 8 dígitos formada por 0 y 1 de la forma, por ejemplo 00101101. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? ¿Cuántos tienen exactamente 4 ceros y 4 unos?

Solución.

Se consideran los bytes formados 4 ceros y cuatro 1, por lo tanto solo influye el orden y hay elementos repetidos.

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

15. Cuántos números de tres cifras pares distintas son mayores que 500.

Solución.

Se trata de hacer números de tres cifras diferentes con los dígitos 0, 2, 4, 6, 8, que sean mayores de 500. Influye el orden, los elementos y no se puede repetir, variaciones ordinarias. Se calculan todas las posibles y se le restan las que empiezan por 0, 2 y 4, que serán las menores de 500.

$$V_5^3 - \underbrace{V_4^2}_0 - \underbrace{V_4^2}_2 - \underbrace{V_4^2}_4 = V_5^3 - 3 \cdot V_4^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

16. Resuelve:

- a) $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2}$
- b) $P_x = 30 \cdot P_{x-2}$
- c) $C_{n,3} = 4 \cdot V_{n,2}$

Solución.

a. $V_{x,4} = 20 \cdot V_{x,2} : x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 20 \cdot x \cdot (x-1)$

Se simplifica los factores comunes y queda una ecuación de 2º grado.

$$(x-2) \cdot (x-3) = 20 : x^2 - 5x + 6 = 20 : x^2 - 5x - 14 = 0 : \begin{cases} x = -2 : \text{No válida} \\ x = 7 : \text{Válida} \end{cases}$$

b. $P_x = 30 \cdot P_{x-2} : x! = 30 \cdot (x-2)! : x \cdot (x-1) \cdot (x-2)! = 30 \cdot (x-2)!$

Se simplifican los factoriales y queda una ecuación de segundo grado.

$$x \cdot (x-1) = 30 : x^2 - x - 30 = 0 : \begin{cases} x = -5 : \text{No válida} \\ x = 6 : \text{Válida} \end{cases}$$

c. $C_{n,3} = 4 \cdot V_{n,2} : \frac{V_{n,3}}{P_3} = 4 \cdot V_{n,2} : \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2} = 4 \cdot n \cdot (n-1)$

Se simplifican los factores comunes y quedando una ecuación de 1º grado.

$$\frac{(n-2)}{6} = 4 : n = 26$$

17. En un plano hay 4 puntos rojos, 5 verdes y 6 azules, entre los cuales no hay tres alineados. Hallar el número de rectas determinadas por:

- a) Dos puntos de color rojo.
- b) Dos puntos de mismo color.
- c) Dos puntos de distinto color.
- d) Un punto de color rojo y otro de color verde o azul.

Solución.

La recta que pasa por dos puntos es la misma independientemente del orden en que se tomen los puntos, por lo tanto, solo influyen los elementos, son combinaciones.

a) Dos puntos de color rojo: $C_4^2 = \frac{V_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$

b) Dos puntos de mismo color: Es la suma de las rectas que forman los puntos de color rojo mas las que forman los puntos de color verde mas las que forman los de color azul.

$$C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = \frac{V_4^2}{P_2} + \frac{V_5^2}{P_2} + \frac{V_6^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} + \frac{5 \cdot 4}{2!} + \frac{6 \cdot 5}{2!} = 6 + 10 + 15 = 31$$

- c) Dos puntos de distinto color: Se calculan como diferencia entre las totales menos las que forman dos puntos de igual color.

$$C_{15}^2 - (C_4^2 + C_5^2 + C_6^2) = \frac{V_{15}^2}{P_2} - 31 = \frac{15 \cdot 14}{2!} - 31 = 105 - 31 = 74$$

- d) Un punto de color rojo y otro de color verde o azul: Cada punto rojo forma una recta con cada punto verde ó azul, se multiplica el número de puntos rojos por la suma de verdes y azules:

$$4 \cdot (5 + 6) = 44$$

18. Un tren tiene un vagón de 1ª, tres de 2ª, un coche restaurante, cuatro coches cama y una locomotora. ¿De cuántas formas podemos formar el tren?

Solución.

Solo influye el orden, lo único que se puede hacer es cambiar el orden de los vagones. Hay que tener en cuenta que existen vagones de mismo tipo y por tanto serán permutaciones con elementos repetidos. La máquina solo puede ocupar la primera o la última posición, se tendrá en cuenta multiplicando por 2 las permutaciones de los vagones.

$$\text{Nº total de vagones} = 1 + 3 + 1 + 4 = 9$$

$$\text{Nº de trenes} = 2 \cdot P_9^{3,4} = 2 \cdot \frac{9!}{3!4!} = 5040$$

19. ¿De cuántas formas posibles pueden subir 6 personas en dos ascensores de 4 y 2 plazas respectivamente? Hazlo de dos formas distintas y explica por qué es posible.

Solución.

Solo influyen los elementos, son combinaciones. Se puede calcular de dos formas diferentes, se pueden escoger las cuatro personas que suben por el grande y las dos restantes subirán por el pequeño, combinaciones de 6 elementos tomadas de cuatro en cuatro, ó se pueden seleccionar las dos que suben por el pequeño y las restantes subirán en el grande, combinaciones de seis elementos tomadas de dos en dos.

$$C_6^4 = C_6^2 = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

20. De una baraja de cuarenta cartas se extraen sucesivamente y sin devolución dos cartas.

- ¿Cuántos resultados distintos pueden darse?
- ¿En cuántos resultados las dos cartas son oros?
- ¿En cuántos resultados las dos cartas son del mismo palo?
- ¿En cuántos resultados las dos cartas son de distinto palo?
- ¿En cuántos resultados habrá un "as" y un "rey"?
- ¿En cuántos resultados una de las dos cartas es un rey?

Solución.

- a. Influye orden (sucesivamente) y elementos, no se pueden repetir.

$$V_{40}^2 = 40 \cdot 39 = 1560$$

- b. Influye orden (sucesivamente) y elementos, no se pueden repetir, el cálculo se restringe a los oros.

$$V_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

- c. Igual que el anterior, pero se repite cuatro veces, una por cada palo.

$$V_{10}^2 + V_{10}^2 + V_{10}^2 + V_{10}^2 = 4V_{10}^2 = 4 \cdot 10 \cdot 9 = 360$$

- d. Se obtiene por diferencia entre el número total de posibilidades menos las que las dos cartas son iguales.

$$\text{Total} - \text{dos iguales} = 1560 - 360 = 1200$$

- e. Cada as puede ir acompañado de un rey (4x4), y se multiplica por dos porque puede ser as/rey o rey/as.

$$4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$$

f. Parecido al anterior, cada rey puede ir acompañado de una de las 36 cartas que no son rey, y multiplicado por dos por el orden.

$$4 \cdot 36 \cdot 2 = 288$$

21. Una bolsa contiene 6 bolas blancas y 4 bolas rojas. Se extraen dos bolas. Cuántos resultados pueden producirse que tengan:

- a) Las dos bolas blancas.
- b) Las dos bolas rojas.
- c) Una bola de cada color.

Solución.

a. Solo influyen los elementos, combinaciones.

$$C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{V_6^2}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

b. Solo influyen los elementos, combinaciones.

$$C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{V_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

c. Por diferencia entre las totales menos las que sean de igual color.

$$C_{10}^2 - (C_6^2 + C_4^2) = \binom{10}{2} - \left(\binom{6}{2} + \binom{4}{2} \right) = \frac{10 \cdot 9}{2} - (15 + 6) = 24$$

22. La mesa presidencial de un acto público es circular y está formada por 8 personas. ¿De cuántas formas pueden colocarse estas personas en la mesa presidencial si solamente el presidente tiene un puesto fijo? Si el presidente quiere tener a su lado al secretario, ¿de cuántas formas se pueden colocar?

Solución.

Solo influye el orden, permutaciones circulares, no se tiene en cuenta al presidente por que tienen posición fija.

$$PC_7 = (7 - 1)! = 6! = 720$$

Si el secretario ha de sentarse junto al presidente, solo permutamos seis posiciones, que se multiplican por dos debido al orden en que se sienten presidente y secretario.

$$2 \cdot PC_2 = 2 \cdot (6 - 1)! = 2 \cdot 5! = 240$$

23. ¿Cuántos números de 5 cifras existen en el sistema decimal que sean capicúas? ¿Y de 6 cifras?

Solución.

Un número capicúa es el que se lee de igual forma de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Si el número tiene cinco dígitos, se escogen los dos primeros teniendo en cuenta que influye el orden, los elementos, se pueden repetir y la primera cifra no puede ser cero.

$$VR_{10}^2 - V_{10}^1$$

$V_{10}^1 \equiv$ Los que empiezan por cero, que serian de cinco dígitos

En la posición central puede ir cualquiera de los diez dígitos, se multiplica por 10,

Los dos últimos se repiten como los primeros pero invirtiendo el orden, teniendo en cuenta esto:

$$n^\circ \text{ capicúas} = 10 \cdot (VR_{10}^2 - V_{10}^1) = 10 \cdot (100 - 10) = 900$$

De seis dígitos, se escogen los tres primeros teniendo en cuenta que influye el orden, los elementos, se pueden repetir y el primero no puede ser cero, y los tres últimos se repiten en orden inverso.

$$VR_{10}^3 - VR_{10}^2 = 1000 - 100 = 900$$

24. De un conjunto formado por 5 chicos y 4 chicas hay que formar una comisión compuesta por 3 personas.

- a) ¿Cuántas comisiones pueden formarse?
- b) ¿En cuántas comisiones figurar solamente una chica?
- c) ¿Y al menos dos chicas?

Solución.

a. Solo influyen los elementos, para que dos comisiones sean distintas, al menos una persona será diferente, combinaciones.

$$C_9^3 = \binom{9}{3} = \frac{V_9^3}{P_3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$$

b. Serán las comisiones formadas por una chica y dos chicos.

$$4 \cdot C_5^2 = 4 \cdot \frac{V_5^2}{P_2} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$$

c. Serán la suma de las formadas por dos chicas y un chico más las formadas por tres chicas.

$$5 \cdot C_4^2 + C_4^3 = 5 \cdot \frac{V_4^2}{P_2} + \frac{V_4^3}{P_3} = 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = 34$$

25. ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse con las cifras 2, 3, 4, 5 y 6 que sean menores que 65000?

Solución.

Solo influye el orden, a todos los posibles números de cinco cifras, le restamos todos los que empiecen por 65.

$$P_5 - P_3 = 5! - 3! = 120 - 6 = 116$$

26. Se lanzan dos monedas distintas y un dado, ¿cuántos resultados diferentes pueden darse?

Solución.

Por cada cara que muestre el dado, se añaden los posibles resultados de dos monedas diferentes.

$$6 \cdot VR_2^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$$

27. Con los números {1, 2, 3, 4, 5}:

- a) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir?
- b) ¿Cuántos son capicúas?
- c) Calcular la suma de todos ellos.

Solución.

a. Influye orden, elementos y se pueden repetir.

$$VR_5^3 = 5^3 = 125$$

b. Se escogen los dos primeros y el tercero se repite adecuadamente para que sea capicúa.

$$VR_5^2 = 5^2 = 25$$

c. Se suman por separado las centenas, las decenas y la unidades.

$$(5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 100 \cdot VR_5^2 + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 10 \cdot VR_5^2 + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 1 \cdot VR_5^2 = \\ = 15 \cdot 100 \cdot 25 + 15 \cdot 10 \cdot 25 + 15 \cdot 1 \cdot 25 = 15 \cdot 25 \cdot 111 = 41625$$

28. Entre los 30 alumnos de clase se quieren formar equipos de dos alumnos para jugar al tenis.

- a) ¿Cuántos equipos se pueden formar?
- b) ¿En cuántos interviene un mismo alumno?

Solución.

a. Solo influyen los elementos, combinaciones.

$$C_{30}^2 = \binom{30}{2} = \frac{V_{30}^2}{P_2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$$

b. En 29 equipos, una con cada compañero. $C_{29}^1 = \binom{29}{1} = \frac{V_{29}^1}{P_1} = \frac{29}{1} = 29$

29. Calcular cuántos números distintos de tres cifras diferentes pueden formarse con los dígitos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} que estén comprendidos entre 400 y 600.

Solución.

Serán los cuatrocientos y los quinientos. Influyen los elementos, el orden y no se pueden repetir.

$$\underbrace{V_6^2}_{5___} + \underbrace{V_6^2}_{4___} = 6^2 + 6^2 = 72$$

30. Con los siete colores de arco iris cuantas banderas horizontales o verticales se pueden hacer teniendo en cuenta:

- a) Tricolor
- b) Bicolor con tres franjas

Solución.

a. Influye orden elementos y no se puede repetir, se multiplica por dos por las posibilidades de horizontal y vertical.

$$2 \cdot V_7^3 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 420$$

b. Se seleccionan dos colores sin importar el orden, por cada combinación se pueden obtener dos banderas de tres franjas bicolor. Ejemplo: R - A : $\begin{cases} A - R - A \\ R - A - R \end{cases}$

$$2 \cdot C_7^2 = 2 \cdot \binom{7}{2} = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 42$$